دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

# نظریه مدولی بعد مثلثی و مباحث مرتبط

رساله دکتری ریاضی محض

**مهدی گورابی**

اساتید راهنما

**دکتر احمد حقانی**
**دکتر محمدرضا ودادی**

۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری ریاضی محض(جبر) مهدی گورابی

تحت عنوان

# نظریه مدولی بعد مثلثی و مباحث مرتبط

در تاریخ ۲۶ اسفند ماه ۱۳۹۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

| | |
|---|---|
| ۱- استاد راهنما | دکتر احمد حقانی |
| ۲- استاد راهنما | دکتر محمدرضا ودادی |
| ۳- استاد مشاور | دکتر حسین خبازیان |
| ۴- استاد داور ۱ | دکتر امید علی شهنی کرم‌زاده<br>(دانشگاه شهید چمران اهواز) |
| ۵- استاد داور ۲ | دکتر منصور معتمدی<br>(دانشگاه شهید چمران اهواز) |
| ۶- استاد داور ۳ | دکتر عاطفه قربانی<br>(دانشگاه صنعتی اصفهان) |

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده     دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

# فهرست مطالب

چکیده: در این رساله ضمن تعریف تجزیه متعامد برای یک مدول نشان می‌دهیم که یک مدول تعداد متناهی جمعوند تماماً پایا دارد اگر و تنها اگر حلقه درونریختی‌هایش بعد مثلثی متناهی داشته باشد. بعد مثلثی یک مدول را برابر با سوپریموم طول تجزیه‌های متعامد چپ آن تعریف می‌کنیم. بعد مثلثی یک مدول تحت موریتا پایاست و برای حلقه‌های ایدآل اصلی آرتینی بعد مثلثی یک مدول با تعداد مولفه‌های ساکل آن مدول برابر است. نتایج اخیر بیرکنمیر و همکارانش درباره بعد مثلثی حلقه‌ها به مدول‌ها تعمیم داده شده است و برخی از نتایج مربوط به بعد مثلثی حلقه‌ها با رویکرد مدولی ساده‌تر بدست آمده‌اند. همچنین حلقه‌های نیم اول تکه‌ای تعریف شده‌اند. رده حلقه‌های نیم‌اول تکه‌ای به‌طور سره شامل حلقه‌های نیم‌اول و حلقه‌های اول تکه‌ای می‌باشد. این خاصیت برای حلقه‌ها موریتا پایاست وبرخی توسیع‌های یک حلقه نیز آن‌را به ارث می‌برند. با استفاده از حلقه‌های نیم‌اول تکه‌ای، حلقه‌های بئر ضعیف راست مشخصه سازی شده‌اند. حلقه‌هایی که پوچ‌ساز هر ایدآل پوچ‌توان آن به عنوان یک ایدآل راست توسط یک خودتوان تولید می‌شود. در نهایت تعمیمی از مدول‌های اول را معرفی نموده و برخی خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

# فصل ۱

# مقدمه

مفهوم مجموعه خودتوان‌های مثلثی چپ یک حلقه و کاربردهای آن در نظریه نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته یک حلقه در [۵] بیان شده‌اند. خودتوان $e \in R$ نیم‌مرکزی چپ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in R$، $xe = exe$. مجموعه تمام خودتوان‌های نیم‌مرکزی چپ را با $\mathrm{S}_l(R)$ نمایش می‌دهند. مجموعه مرتب $E = \{e_1, ..., e_n\}$ از خودتوان‌های ناصفر $R$ یک مجموعه از خودتوان‌های مثلثی چپ حلقه $R$ است هرگاه

- $e_1 + \cdots + e_n = 1_R$.
- $e_1 \in S_l(R)$.
- $e_{k+1} \in \mathrm{S}_l(c_kRc_k)$ که در آن $c_k = 1 - (e_1 + \cdots + e_k)$.

این مجموعه کامل نامیده می‌شود هرگاه برای هر $e_i \in E$، $\mathrm{S}_l(e_iRe_i) = \{0, e_i\}$. مجموعه خودتوان‌های مثلثی راست یک حلقه نیز به‌صورت مشابه تعریف می‌شود.
$\{1_R\}$ یک مجموعه از خودتوان‌های مثلثی چپ حلقه $R$ است. در [۵] شرایطی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که $R$ دارای یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ است. تعداد اعضای مجموعه‌های کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ یک حلقه برابر هستند. بنابراین با توجه به این یکتایی بعد مثلثی حلقه $R$ برابر $n$ تعریف شده است هرگاه $R$ دارای یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ (راست) $n$ عضوی باشد و با نماد $\tau\dim(R) = n$ نمایش داده می‌شود. اگر $R$ شامل مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ (راست) نباشد، آن‌گاه $\tau\dim(R) = \infty$ تعریف شده است.

کاربردهای جالبی از حلقه‌های با بعد مثلثی متناهی ارایه شده است. به عنوان مثال حلقه‌های شبه‌بئر با بعد مثلثی متناهی مشخصه سازی شده‌اند. از جمله تعمیم حلقه اول توسط یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ آن حلقه تحت عنوان حلقه اول تکه‌ای بیان شده است. حلقه $R$ اول تکه‌ای نسبت به مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی $E = \{e_1, ..., e_n\}$ نامیده می‌شود هرگاه $xRy = 0$ نتیجه دهد $x = 0$ یا $y = 0$ که در آن $x \in e_iRe_j$ و $y \in e_jRe_k$ $(1 \leq i, j, k \leq n)$. اگر $R$ نسبت به $E$ اول تکه‌ای باشد آن‌گاه $R$ نسبت به هر مجموعه

کاملی از خودتوان‌های مثلثی چپ $R$ اول تکه‌ای است. برای یک حلقه با بعد مثلثی متناهی مفاهیم شبه‌بئر و اول تکه‌ای یکسان هستند ([۵] قضیه ۴−۱۱). در نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته حلقه‌های اول تکه‌ای حلقه‌های روی قطر اصلی اول هستند. در [۷] توسیع حلقه‌های اول تکه‌ای مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. همچنین نشان داده شده است که برخی توسیع‌های حلقه $R$ دارای بعد مثلثی یکسانی با آن هستند ([۷] قضیه ۴−۴).

اگر هر ایدآل $R$ در یک جمعوند راست $R$ اساسی باشد آن‌گاه هر توسیع اساسی $R$ دارای بعد مثلثی کمتر یا مساوی بعد مثلثی $R$ است [۹]. به عنوان نتیجه‌ای از این مطلب نشان داده شده است که $Q(R)$ حلقه کسرهای راست ماکسیمال $R$ حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی حلقه اول است اگر و تنها اگر $Q(R)$ نیم‌اول با بعد مثلثی متناهی باشد.

انگیزه اصلی نگارش این رساله کوشش در تعمیم دادن مفاهیم اصلی و نتایج فوق از نظریه حلقه‌ها به نظریه مدول‌ها است. فصول ۳ به بعد این رساله مشتمل بر تحقیقات نوین ما در نظریه مدول است که نتایج آن در [۱۸]، [۱۹] و [۲۰] منتشر شده است. اینک به اختصار مندرجات فصول ۳، ۴ و ۵ توضیح داده می‌شود.

در فصل ۳ مفهوم بعد مثلثی حلقه‌ها برای مدول‌ها تعمیم داده شده است. با استفاده از مفهوم تجزیه متعامد برای $R$−مدول $M$، بعد مثلثی $M$ تعریف شده است. سپس شرایطی بدست آمده است که بعد مثلثی مدول $M$ متناهی باشد. برای $R$−مدول $M$، رابطه بین بعد مثلثی و بعد یکنواخت آن بررسی شده است و نشان داده‌ایم که بعد یکنواخت $M$ یک کران بالا برای بعد مثلثی $M$ است. خاصیت موریتا برای مدول‌ها مطالعه شده‌اند و نشان داده‌ایم که بعد مثلثی تحت موریتا برای مدول‌ها پایا است. از دیدگاه نظریه مدول‌ها، بعد مثلثی حلقه ماتریس‌های صوری بالا مثلثی مطالعه شده‌اند. اگر $R$ یک حلقه آرتینی باشد که همه ایدآل‌های آن دوری هستند آن‌گاه بعد مثلثی $R$−مدول ناصفر $M$ برابر با تعداد مولفه‌های ساکل $M$ است. همچنین نشان داده شده است که حلقه‌های کامل تعویض‌پذیر حلقه‌هایی با بعد مثلثی متناهی هستند که همه مدول‌ها روی چنین حلقه‌هایی برگشت‌پذیر هستند. یکسان بودن بعد مثلثی توسیع‌های مختلف $R$ مانند $R[x]$، $R[x,x^{-1}]$، $R[x,\sigma]$ که در آن $\sigma$ یک درونریختی در $\mathrm{End}_R(M)$ است، $R[x,\sigma,\delta]$ که در آن $\sigma$ مشتق‌گیر درونی $R$ است از دیدگاه نظریه مدول‌ها بررسی شده‌اند. در [۷] یکسان بودن بعد مثلثی $R$ و $R[x,\sigma]$ تحت شرایط خاصی برای درونریختی $\sigma$ بررسی شده است. در انتهای فصل ۳ فرم مدولی قضیه اصلی [۹] بیان شده است و به عنوان نتیجه‌ای از آن این مطلب ثابت شده است که با اعمال شرایط خاص روی حلقه $R$ و $R$−مدول $M$ مرکز $\mathrm{End}_R(M)$ حاصل‌ضرب مستقیم چند میدان است. همچنین برای هر $R$−مدول $M$، بعد مثلثی $E(M)$ (پوش تزریقی $M$) کوچک‌تر یا مساوی بعد مثلثی $\hat{M}$ (پوش شبه‌تزریقی $M$) است.

در فصل ۴ مفهوم حلقه‌های نیم‌اول تکه‌ای نسبت به مجموعه‌ای از خودتوان‌های مثلثی چپ معرفی شده است. اگر $R$ نسبت به یک مجموعه از خودتوان‌های مثلثی چپ $R$ نیم‌اول تکه‌ای باشد آن‌گاه $R$ نسبت به هر مجموعه کاملی از خودتوان‌های مثلثی چپ $R$ نیم‌اول تکه‌ای است. همچنین حلقه $R$ نیم‌اول تکه‌ای است اگر و تنها اگر $R$ دارای یک نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته باشد که حلقه‌های روی قطر اصلی آن نیم‌اول هستند. در مورد موریتا پایا بودن این خاصیت نیز برای حلقه‌ها تحقیق شده است و نشان داده‌ایم که این خاصیت برای حلقه‌ها موریتا پایا است. در مورد برقراری این خاصیت برای برخی توسیع‌های یک حلقه نتایجی بدست آمده است. $m$−سیستم‌ها نقش عمده‌ای در مطالعه حلقه‌های اول ایفا می‌کنند. این مفهوم به‌طور مناسبی توسط یک مجموعه از خودتوان‌های مثلثی چپ تعمیم داده شده است. در انتهای این فصل مفهوم حلقه‌های بئر ضعیف بیان شده است و شرایطی بدست

آمده که حلقه‌های نیم‌اول تکه‌ای و بئر ضعیف معادل باشند.

در فصل ۵ تعمیمی از مدول‌های اول تحت عنوان مدول‌های اول تکه‌ای معرفی و برخی از خواص آن ارایه شده است.

# فصل ۲

# تعاریف و مفاهیم ابتدایی

در این رساله حلقه‌ها یک‌دار و مدول‌ها یکانی و راست در نظر گرفته شده‌اند. در این فصل بعضی از تعاریف و نتایجی را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، ذکر خواهیم کرد. برای مطالعه سایر تعاریف و قضایای مربوط به نظریه حلقه‌ها و مدول‌ها از جمله حلقه‌های اول و نیم‌اول، حلقه‌های آرتینی و نوتری، مدول‌های تزریقی و تصویری و ... به [۱]، [۲۳] و [۳۱] مراجعه کنید.

## ۲—۱ هم ارزی موریتا

فرض کنیم $C$ و $D$ دو رسته باشند. کلاس تمام تابعگون‌های $F : C \longrightarrow D$ با ریخت‌هایی به شکل زیر تشکیل یک رسته می‌دهند. برای هر دو تابعگون $F, G : C \longrightarrow D$ یک ریخت $t : F \longrightarrow G$ عبارت است از یک دسته ریخت

$$\{t_a : F(a) \longrightarrow G(a)|\ a \in C\}$$

در رسته $D$ با این خاصیت که اگر $f : a \longrightarrow b$ یک ریخت در $C$ باشد، آن‌گاه

$$t_b F(f) = G(f) t_a$$

هر هم‌ارزی در این رسته را یک هم‌ارزی طبیعی بین دو تابعگون $F$ و $G$ گویند، و در چنین حالتی $F$ و $G$ را به‌طور طبیعی هم‌ارز گویند.

**تعریف ۲—۱** دو رسته $C$ و $D$ را هم‌ارز موریتا گویند هرگاه تابعگون‌های $F : C \longrightarrow D$ و $G : D \longrightarrow C$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که تابعگون‌های $FoG$ و $GoF$ به‌طور طبیعی به ترتیب با تابعگون‌های $I_D$ و $I_C$ هم‌ارز طبیعی باشند. ($I_D$ و $I_C$ تابعگون‌های همانی روی رسته‌های $C$ و $D$ هستند)

**تعریف ۲–۲** فرض کنیم $R$ و $S$ دو حلقه هستند.

۱) دو حلقه $R$ و $S$ را هم‌ارز موریتا می‌نامند هر گاه یک هم‌ارزی رسته‌ای بین رسته‌های $\mathrm{Mod}-R$ و $\mathrm{Mod}-S$ وجود داشته باشد. در این‌صورت می‌نویسیم $R \approx S$.

۲) خاصیت $\mathcal{P}$ برای حلقه‌های هم‌ارز موریتای $R$ و $S$ موریتا پایا نامیده می‌شود اگر برقراری این خاصیت برای حلقه $R$، برقراری آن برای حلقه $S$ را ایجاب کند.

۳) خاصیت $\mathcal{P}$ برای مدول‌ها، موریتا پایا است اگر برقراری این خاصیت برای $R$–مدول $M$ ایجاب کند برای هر حلقه $S$ که $R \approx S$ و هر هم‌ارزی رسته‌ای $F : \mathrm{Mod}-R \longrightarrow \mathrm{Mod}-S$، خاصیت $\mathcal{P}$ برای $S$–مدول $F(M)$ برقرار است.

**تعریف ۲–۳** $R$–مدول $M$ یک مولد برای $R$–مدول $N$ است ($N$ را تولید می‌کند) هرگاه یک برویختی مانند $M^{(\lambda)} \longrightarrow N \longrightarrow 0$ وجود داشته باشد. اگر $M$ تمام $R$–مدول‌ها را تولید کند، آن‌گاه $M$ یک مولد نامیده می‌شود.

**قضیه ۲–۴** برای دو حلقه $R$ و $S$ شرایط زیر معادل هستند.

۱) $R \approx S$.

۲) مولد متناهی تولید و تصویری $P_R$ وجود دارد به‌طوری‌که $S \simeq \mathrm{End}(P_R)$.

۳) مولد متناهی تولید و تصویری ${}_RQ$ وجود دارد به‌طوری‌که $S \simeq \mathrm{End}({}_RQ)$.

**اثبات .** برای اثبات به [1] نتیجه ۲۲–۴ مراجعه کنید. $\square$

**قضیه ۲–۵** برای هر عدد صحیح $n \geq 1$، حلقه‌های $R$ و $\mathrm{M}_n(R)$ هم‌ارز موریتا هستند.

**اثبات .** برای هر عدد صحیح $n$، $R^{(n)}$ یک مولد متناهی تولید و تصویری است. همچنین حلقه درونریختی‌های آن با $\mathrm{M}_n(R)$ یکریخت است. بنابراین با استفاده از قضیه ۲–۴ حلقه‌های $R$ و $\mathrm{M}_n(R)$ هم‌ارز موریتا هستند. $\square$

**قضیه ۲–٦** اگر $R$ و $S$ دو حلقه هم‌ارز موریتا باشند آن‌گاه عدد صحیح مثبت $n$ و خودتوان ماتریسی $e \in \mathrm{M}_n(R)$ وجود دارند به‌طوری‌که $S \simeq e\mathrm{M}_n(R)e$.

اثبات . چون $R$ و $S$ هم‌ارز موریتا هستند پس با توجه به قضیه ۲—۴ مولد متناهی تولید و تصویری $P_R$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$S \simeq \mathrm{End}(P_R)$$

چون $P$ متناهی تولید و تصویری است پس عدد صحیح مثبت $n$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$R^{(n)} \simeq P \oplus Q$$

بنابراین با توجه به [۱] قضیه ۵—۹، خودتوان $e \in \mathrm{M}_n(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که داریم

$$S \simeq \mathrm{End}_R(P) \simeq e\mathrm{End}_R(R^{(n)})e \simeq e\mathrm{M}_n(R)e$$

□

## ۲—۲ بعد یکنواخت

**در این بخش مفهوم بعد یکنواخت آورده می‌شود. در فصل ۳ رابطه بعد یکنواخت و بعد مثلثی مدول‌ها مقایسه شده‌اند.**

**تعریف ۲—۷ فرض کنیم $M$ یک $R$–مدول و $N$ زیرمدول آن باشد.**

۱) **$N$ زیرمدول اساسی مدول $M$ نامیده می‌شود هرگاه $N$ با هر زیرمدول ناصفر $M$ اشتراک ناصفر داشته باشد و در این‌صورت می‌نویسیم $N \subseteq_e M$. همچنین $M$ توسیع اساسی $N$ نامیده می‌شود.**

۲) **زیرمدول $N$ اساساً بسته در $M$ نامیده می‌شود هرگاه $N$ هیچ توسیع اساسی سره در $M$ نداشته باشد.**

۳) **$N$ زیرمدول کوچک $M$ نامیده می‌شود هرگاه حاصل‌جمع $N$ و هر زیرمدول سره $M$، زیرمدول سره $M$ باشد.**

**تعریف ۲—۸ $R$–مدول $M$ یکنواخت نامیده می‌شود، هرگاه هر زیرمدول ناصفر $M$ زیرمدولی اساسی در $M$ باشد.**

**تعریف ۲—۹ اگر زیرمدول اساسی $V \subseteq_e M$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $V$ حاصل‌جمع مستقیم $n$ زیرمدول یکنواخت $M$ باشد آن‌گاه بعد یکنواخت $M$ برابر $n$ است و با $\mathrm{u.dim}(M) = n$ نمایش داده می‌شود. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد می‌نویسیم $\mathrm{u.dim}(M) = \infty$. نماد $\mathrm{u.dim}(R)$ نمایانگر بعد یکنواخت حلقه $R$ است وقتی که به‌عنوان $R$–مدول راست در نظر گرفته شود.**

**گزاره ۲—۱۰** فرض کنیم $M$ یک $R$–مدول است.

۱) $\mathrm{u.dim}(M) = ۰$ اگر و تنها اگر $M = ۰$ باشد.

۲) $\mathrm{u.dim}(M) = ۱$ اگر و تنها اگر $M$ یکنواخت باشد.

**اثبات .** با استفاده از تعریف به آسانی دیده می‌شود. □

**گزاره ۲—۱۱** $R$–مدول $M$ دارای بعد یکنواخت متناهی است اگر و تنها اگر $M$ شامل هیچ حاصل‌جمع مستقیم تعداد نامتناهی زیرمدول ناصفر نباشد.

**اثبات .** برای اثبات به [۲۶] گزاره ٦—۴ مراجعه کنید. □

**گزاره ۲—۱۲** فرض کنیم $M$ یک $R$–مدول است. در این‌صورت داریم:

۱) $\mathrm{u.dim}(M_۱ \oplus M_۲) = \mathrm{u.dim}(M_۱) + \mathrm{u.dim}(M_۲)$.

۲) اگر $N \subseteq M$، آن‌گاه $\mathrm{u.dim}(N) \leq \mathrm{u.dim}(M)$. اگر $N \subseteq_e M$ آن‌گاه حالت تساوی برقرار است. اگر $N$ زیرمدول اساسی $M$ نباشد آن‌گاه $\mathrm{u.dim}(N) < \mathrm{u.dim}(M)$ بجز حالتی که $\mathrm{u.dim}(N) = \mathrm{u.dim}(M) = \infty$.

**اثبات .** (۱) با استفاده از تعریف به آسانی دیده می‌شود.
(۲) اگر حاصل‌جمع مستقیم زیرمدول‌های یکنواخت $A = N_۱ \oplus ... \oplus N_k$ در $N$ اساسی و $N$ زیرمدول اساسی $M$ باشد آن‌گاه $A$ زیرمدول اساسی $M$ نیز هست. بنابراین داریم

$$\mathrm{u.dim}(N) = \mathrm{u.dim}(M) = k$$

فرض کنیم $N$ زیرمدول اساسی $M$ نباشد. اگر بعد یکنواخت $N$ نامتناهی باشد آن‌گاه $M$ نیز دارای بعد یکنواخت نامتناهی است. پس حالتی درنظر گرفته می‌شود که بعد یکنواخت $N$ متناهی باشد. بنابراین حاصل‌جمع مستقیم زیرمدول‌های یکنواخت $B = N_۱ \oplus ... \oplus N_n$ وجود دارد که در $N$ اساسی است. چون $N$ در $M$ اساسی نیست پس $۰ \neq N' \subseteq M$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$B \oplus N' \subseteq_e M$$

بنابراین $(n + ۱) \leq \mathrm{u.dim}(M)$. □

**مثال ۲—۱۳** برخلاف برخی بعدهای خاص بعد یکنواخت روی دنباله‌های دقیق کوتاه خاصیت جمعی ندارد. به عنوان مثال دنباله دقیق کوتاه زیر از $\mathbb{Z}$–مدول‌ها را در نظر بگیرید.

$$۰ \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^۲\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow ۰$$

**بعد یکنواخت تمام زیرمدول‌های ناصفر این دنباله یک است.**
**در مورد فاکتور مدول‌ها نیز توجه داشته باشید که بعد یکنواخت فاکتور یک مدول با بعد یکنواخت متناهی لزوماً متناهی نیست. به عنوان مثال $\mathrm{u.dim}(\mathbb{Q}) = ۱$ ولی $\mathrm{u.dim}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \infty$ است.**

**گزاره ۲–۱۴** اگر $M$ یک $R$–مدول باشد، آن‌گاه مجموعه

$$Z(M) = \{m \in M \mid mI = ۰, s.t.\ \ I \subseteq_e R_R\} = \{m \in M \mid \mathrm{r.ann}(m) \subseteq_e R_R\}$$

یک زیرمدول $M$ است و آن‌را زیرمدول منفرد $M$ می‌نامیم.

اثبات . **ساده است.** $\square$

**تعریف ۲–۱۵ فرض کنیم $M$ یک $R$–مدول باشد. اگر $Z(M) = M$ آن‌گاه $M$ مدول منفرد نامیده می‌شود و اگر $Z(M) = ۰$ آن‌گاه $M$ یک مدول نامنفرد نامیده می‌شود.**

## ۲–۳ ساکل

**تعریف ۲–۱۶ فرض کنیم $R$ یک حلقه و $M$ یک $R$–مدول باشد.**

۱) **حاصل‌جمع تمام زیرمدول‌های ساده $M$، ساکل $M$ نامیده می‌شود و با نماد $\mathrm{Soc}(M)$ نمایش داده می‌شود. اگر $M$ زیرمدول ساده نداشته باشد، آن‌گاه $\mathrm{Soc}(M) = ۰$.**

۲) **ساکل راست حلقه $R$ مجموع تمام ایدآل‌های راست مینیمال (ساده) $R$ است. ساکل چپ حلقه $R$ نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. $\mathrm{Soc}(R_R)$ و $\mathrm{Soc}({}_RR)$ ایدآل‌های حلقه $R$ هستند.**

**گزاره ۲–۱۷** فرض کنیم $M$ یک $R$–مدول است. در این‌صورت داریم

$$\mathrm{Soc}(M) = \bigcap\{A \mid \text{زیرمدول اساسی } M \text{ است } A\}$$

اثبات . **فرض کنیم $S$ زیرمدول ساده و $A$ زیرمدول اساسی $M$ باشد. چون $A \cap S$ ناصفر است پس داریم**

$$S \subseteq A$$

**بنابراین $\mathrm{Soc}(M)$ در اشتراک تمام زیرمدول‌های اساسی $M$ قرار دارد.**
**از طرفی فرض کنیم $H = \bigcap\{A \mid$ زیرمدول اساسی $M$ است $A\}$. نشان می‌دهیم $H$ نیم‌ساده است. برای این کار**

**فرض کنیم $N \subseteq H$. زیرمدول $N'$ در $M$ وجود دارد به‌طوری‌که**

$$N \oplus N' \subseteq_e M$$

**بنابراین داریم**

$$H = H \cap (N \oplus N') = N \oplus (H \cap N')$$

**این نشان می‌دهد که $N$ جمعوند مستقیم $H$ است. پس $H$ نیم‌ساده است و داریم $H \subseteq \mathrm{Soc}(M)$.** □

نتیجه ۲–۱۸ فرض کنیم $M$ و $N$ دو $R$–مدول هستند.

۱) $\mathrm{Soc}(M)$ بزرگترین زیرمدول نیم‌ساده $M$ است.

۲) اگر $f : N \longrightarrow M$ یک $R$–همریختی باشد، آن‌گاه $f(\mathrm{Soc}(N)) \subseteq \mathrm{Soc}(M)$.

۳) اگر $N \subseteq M$، آن‌گاه $\mathrm{Soc}(N) = \mathrm{Soc}(M) \cap N$.

۴) $\mathrm{Soc}(\mathrm{Soc}(M)) = \mathrm{Soc}(M)$.

۵) اگر $M = \oplus_{i\in I} M_i$، آن‌گاه $\mathrm{Soc}(M) = \oplus_{i\in I}\mathrm{Soc}(M_i)$.

٦) $\mathrm{Soc}(M)$ زیرمدول اساسی $M$ است اگر و تنها اگر برای هر $K \subseteq M$، $\mathrm{Soc}(K) \neq 0$.

اثبات . **برای اثبات به [۳۱] قضیه ۲۱–۲ مراجعه کنید.** □

## ۲–۴ مدول‌های برگشت‌پذیر

**خواص مدول‌های برگشت‌پذیر در مقاله‌های متعددی ازجمله [۲۲]، [۱۷] و [۲۴] و ... مطالعه شده‌اند. دراین بخش ضمن تعریف مدول‌ها و حلقه‌های برگشت‌پذیر برخی خواص آن‌را که در [۲۱] بیان شده است می آوریم.**

تعریف ۲–۱۹ **فرض کنیم $M$ یک $R$–مدول است.**

۱) $M$ **برگشت‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $N \subseteq M$، $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$.**

۲) $M$ **اساساً برگشت‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $N \subseteq_e M$، $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$.**

۳) **حلقه $R$ برگشت‌پذیر (متناهی) نامیده می‌شود هرگاه تمام $R$–مدول‌ها (متناهی تولید) برگشت‌پذیر باشند.**

**قضیه ۲—۲۰** برای حلقه $R$ شرایط زیر معادل هستند.

۱) $R$ برگشت‌پذیر متناهی است.

۲) برای هر $n \geq 1$ و $x \in R^n \setminus K$ که در آن $0 \neq K \subseteq R^n$، اعضای $r_1, ..., r_n \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که برای برخی $r_j$ ها $xr_j \notin K$ و برای هر $y \in K$، $\sum_i xr_i\pi_i(y) \in K$ ($\pi_i$ بروریختی طبیعی است).

۳) برای هر $n \geq 1$ و هر دو ایدآل راست $I$ و $J$ در $S = \mathrm{M}_n(R)$ یا $J \subseteq I$ یا $x \in J \setminus I$ وجود دارد به‌طوری‌که $xI \subseteq I$.

۴) تمام $R$–مدول‌های متناهی تولید اساساً برگشت‌پذیر هستند.

۵) برای هر $R$–مدول متناهی تولید $M$ و هر $R$–مدول $X$، $\mathrm{Hom}_R(M, X) = 0$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Hom}_R(M, E(X)) = 0$

**اثبات .** **(۱) ⇐ (۲) فرض کنیم $n \geq 1$ و $K$ و $x \in R^n \setminus K$ که در آن $0 \neq K \subseteq R^n$. طبق فرض همریختی**

$$f : R^n/K \longrightarrow (xR + K)/K$$

**وجود دارد. اگر $\{e_1, ..., e_n\}$ پایه استاندارد $R^n$ باشد، قرار می‌دهیم**

$$f(e_i + K) = xr_i + K$$

**به آسانی دیده می‌شود که $j$ وجود دارد به‌طوری‌که $xr_j \notin K$. این نشان می‌دهد که برای هر $y \in K$ داریم**

$$\sum_i xr_i\pi_i(y) \in K$$

**(۲) ⇐ (۱) اگر $A \in S$ و $y \in R^n$ آن‌گاه**

$$\sum_i Ae_i\pi_i(y) = Ay$$

**مدول متناهی تولید $M$ را به صورت $R^n/K$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $L/K \subseteq R^n/K$ و $x \in L \setminus K$. همچنین $r_1, ..., r_n$ اعضای مرتبط با $x$ باشند. ماتریس $A_{n\times n}$ را طوری می‌سازیم که ستون $i$–ام آن $xr_i$ است. بنابراین طبق فرض ضرب از چپ توسط $A$ یک همریختی ناصفر از $R^n/K$ به $L/K$ تعریف می‌کند.**

**(۳) ⇔ (۱) توسط تابعگونی که هم‌ارزی موریتا بین $R$ و $S$ برقرار می‌کند، $R$–مدول‌های تولید شده با $n$ عضو به $S$–مدول‌های دوری نظیر می‌شود و برعکس. بنابراین معادل بودن (۳) و (۱) از [۲۱] قضیه‌های ۲—۵ و ۲—۲ بدست می‌آید.**

**(۱) ⇐ (۴) به آسانی بدست می‌آید.**

**(۴) ⇐ (۱) فرض کنیم $N$ زیرمدول ناصفر مدول متناهی تولید $M$ باشد. همریختی ناصفر $f : M \longrightarrow E(N)$ وجود دارد. چون بنا به فرض $f(M)$ اساساً برگشت‌پذیر است پس**

$$\mathrm{Hom}_R(f(M), N \cap f(M)) \neq 0$$

**این نشان می‌دهد که** $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq \circ$.

**(۴)** $\Leftarrow$ **(۵) توجه کنیم که** $f(M)$ **برای هر همریختی** $f \in \mathrm{Hom}_R(M,E(X))$ **اساساً برگشت‌پذیر است.**

**(۵)** $\Leftarrow$ **(۴) فرض کنیم** $M$ **متناهی تولید و** $N \subseteq_e M$**. بنابراین** $E(M)=E(N)$**. این نشان می‌دهد که**

$$\mathrm{Hom}_R(M,E(M)) \neq \circ$$

**پس نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.** □

قضیه ۲—۲۱ هر حلقه هم‌ارز موریتا با یک حلقه تعویض‌پذیر، برگشت پذیر متناهی است.

اثبات . **برای اثبات به [۲۱] مراجعه کنید.** □

## ۲—۵ مدول‌های یگانه زنجیر و یگانه زنجیر همریخت‌وار

**تعریف ۲—۲۲ فرض کنیم** $M$ **یک** $R$**−مدول است.**

**۱)** $M$ **یگانه زنجیر نامیده می‌شود هرگاه زیرمدول‌های آن توسط رابطه شمول به‌طور خطی مرتب شده باشند.**

**۲) اگر برای هر زیرمدول متناهی تولید و ناصفر** $K,L \subseteq M$ **مدول‌های** $K/\mathrm{J}(K)$ **و** $L/\mathrm{J}(L)$ **ساده و یکریخت باشند آن‌گاه** $M$ **یگانه زنجیر همریخت‌وار نامیده می‌شود.**

گزاره ۲—۲۳ برای $R$−مدول $M$ شرایط زیر معادل هستند.

۱) $M$ یگانه زنجیر است.

۲) زیرمدول‌های دوری $M$ توسط رابطه شمول به‌طور خطی مرتب شده‌اند.

۳) هر زیرمدول $M$ حداکثر یک زیرمدول ماکسیمال دارد.

۴) برای هر زیرمدول متناهی تولید $\circ \neq K \subseteq M$، $K/\mathrm{J}(K)$ ساده است.

۵) برای هر مدول خارج قسمتی $L$ از $M$، $\mathrm{Soc}(L)$ صفر یا ساده است.

اثبات . **برای اثبات به [۳۱] ۵۵ — ۱ مراجعه کنید.** □

گزاره ۲—۲۴ فرض کنیم $R$−مدول $M$ یگانه زنجیر باشد. در این‌صورت داریم:

۱) هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی $M$ یگانه زنجیر است.

۲) $M$ یکنواخت است و زیرمدول‌های متناهی تولید آن دوری هستند.

اثبات . **با استفاده از تعریف ۲—۲۲** به آسانی دیده می‌شود. □

**اگر $p$ یک عدد اول باشد آن‌گاه $\mathbb{Z}$—مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یگانه زنجیر است.**

نتیجه ۲—۲۵ فرض کنیم $R$—مدول $M$ یگانه زنجیر همریخت‌وار باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادل هستند.

۱) $M$ یگانه زنجیر است و $M/\mathrm{J}(M) \neq 0$.

۲) $M$ متناهی تولید است.

اثبات . **با استفاده از تعریف ۲—۲۲** به آسانی دیده می‌شود. □

گزاره ۲—۲۶ فرض کنیم $M$ یک $R$—مدول باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادل هستند.

۱) $M$ یگانه زنجیر همریخت‌وار است.

۲) برای هر $K, L \subseteq M$ اگر ساکل $N/K$ و $N/L$ ناصفر باشند آن‌گاه ساکل آنها ساده و یکریخت هستند.

اثبات . **برای اثبات به** [۳۱] **۵۶ — ۱ مراجعه کنید.** □

## ۲—۶ خودتوان‌های مثلثی

**در این بخش ابتدا مفهوم خودتوان‌های مثلثی چپ و خواص آن‌ها و سپس مفهوم بعد مثلثی یک حلقه آورده می‌شود. در فصل ۳ این مفهوم برای مدول‌ها تعمیم داده شده است. این مفاهیم در [۵] ارایه شده‌اند و خواص آن‌ها به‌طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین در [۷]، [۹] و [۱۰] نیز مطالب متنوعی درباره آنها چاپ شده است.**

تعریف ۲—۲۷ **فرض کنیم $R$ یک حلقه است. خودتوان $e \in R$ نیم‌مرکزی چپ (راست) حلقه $R$ نامیده می‌شود اگر $Re = eRe$ ($eR = eRe$). مجموعه تمام خودتوان‌های نیم‌مرکزی چپ (راست) حلقه $R$ با $\mathrm{S}_l(R)$ ($\mathrm{S}_r(R)$) نمایش داده می‌شود.**

**لم ۲—۲۸** فرض کنیم $e$ یک خودتوان در حلقه $R$ باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادل هستند.

۱) $\mathrm{S}_l(eRe) = \{\circ, e\}$.

۲) $\mathrm{S}_r(eRe) = \{\circ, e\}$.

اثبات . با استفاده از تعریف ۲—۲۷ معادل بودن جمله‌های فوق به آسانی دیده می‌شود. □

**تعریف ۲—۲۹** فرض کنیم $R$ یک حلقه است.

۱) خودتوان $e \in R$ نیم‌مرکزی تقلیل یافته چپ (راست) حلقه $R$ نامیده می‌شود هرگاه $\mathrm{S}_l(eRe) = \{\circ, e\}$ ($\mathrm{S}_r(eRe) = \{\circ, e\}$).

۲) اگر $۱_R$ خودتوان نیم‌مرکزی تقلیل یافته باشد، آن‌گاه $R$ نیم‌مرکزی تقلیل یافته نامیده می‌شود.

**تعریف ۲—۳۰** فرض کنیم برای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $R_{ij}$ یک $R_i - R_j$—دومدول باشد. همچنین

$$S = \begin{pmatrix} R_{۱۱} & R_{۱۲} & \dots & R_{۱n} \\ \circ & R_{۲۲} & \dots & R_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}$$

شامل تمام ماتریس‌هایی به‌صورت

$$\begin{pmatrix} r_{۱۱} & r_{۱۲} & \dots & r_{۱n} \\ \circ & r_{۲۲} & \dots & r_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

باشد به‌طوری‌که برای هر $۱ \leq i, j \leq n$، $r_{ij}$ عضو $R_{ij}$ است. اگر جمع و ضرب ماتریسی برای $S$ تعریف شده باشند، آن‌گاه $S$ حلقه ماتریس‌های مثلثی تعمیم یافته نامیده می‌شود.

**تعریف ۲—۳۱** حلقه $R$ دارای نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته است هرگاه یکریختی حلقه‌ای

$$R \simeq \begin{pmatrix} R_۱ & R_{۱۲} & \dots & R_{۱n} \\ \circ & R_۲ & \dots & R_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & R_n \end{pmatrix}$$

موجود باشد که در آن هر $R_i$ یک حلقه یک‌دار و هر $R_{ij}$ یک $R_i - R_j$— دومدول است. بیشتر از این اگر هر حلقه $R_i$ نیم‌مرکزی تقلیل یافته باشد آن‌گاه حلقه $R$ را دارای نمایش ماتریسی مثلثی تعمیم یافته کامل گویند.