بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض- جبر

با عنوان

گروههای وایل آفین تعمیم یافته از نوع کاهشی

استاد راهنما

دکتر محمد شهریاری

استاد مشاور

دکتر حسن مهتدیفر

پژوهشگر

علی نعمتی

بهمن ۱۳۸۶

تقدیم به

الگوی ایمان و تلاش

پدر بزرگوارم

الگوی مهر و لبخند

مادر مهربانم

و

خواهران و برادران عزیزم

تقدیر و تشکر

سپاس خداوند یکتا را که بندگان شکر نعمتش را به جای نتوانند آورد.

اکنون که به لطف و عنایت خداوند متعال توانستم پژوهش حاضر را به سرانجام برسانم، بر خود لازم می‌دانم که از راهنمایی‌ها و مساعدت‌های اساتید و دوستان و سروران گرامی که بنده را در طول این دوره به هر نحوی در انجام این کار یاری نمودند، تشکر و قدردانی کنم.

از استاد راهنمایم آقای **دکتر محمد شهریاری** که راهنمایی پایاننامه را برعهده داشتند، آقای **دکتر حسن مهتدی‌فر** که مشاوره‌ی پایان‌نامه را بر عهده داشتند و همچنین از استاد محترم آقای **دکتر حمید موسوی**، معاونت محترم پژوهشی دانشکده ریاضی، که داوری پایان نامه را متقبل شدند و سایر اساتید بزرگوار گروه کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای امیر شمالی دانشجوی دکتری جبر که همواره این حقیر را در طول انجام پایاننامه یاری نمودند تشکر می‌نمایم.

همچنین از مسئولین محترم کتابخانه دانشکده ریاضی و سایر مسئولین دانشکده ریاضی تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از برادر بزرگوارم جناب آقای مهندس ذبیحا... نعمتی که همواره راهنما و پشتیبان اینجانب در تمام دوران تحصیل و عرصه‌های مختلف زندگی بوده‌اند، کمال تشکر و آرزوی موفقیت روزافزون برای ایشان دارم.

همچنین از دوستان و سروران بسیار عزیزم آقایان داود محمدی، ترحم مصری، مهدی بایری‌یار، بهنام رضائی، مرتضی کامرانی، اکبر فتحی، نادر سلحشور، محسن اعتصامی، محمود مظاهری، سعید بابانژاد، مسعود شعبانی، یونس سجودی، یاسر بازوند، حامد اسماعیل‌زاده و سایر دوستان و عزیزانی که در حی‌ن انجام این پژوهش مای‌ه دلگرمی‌ای‌نجانب بودند،کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از پدر و مادر بزرگوارم که دعای خیرشان در تمام مراحل زندگی راه‌گشای مشکلات بوده و از خواهران عزیزم و برادران بزرگوارم بی‌نهایت سپاسگزارم و همواره قدردان زحمات ایشان خواهم بود.

علی نعمتی

نام خانوادگی: نعمتی **نام:** علی

عنوان: گروههای وایل آفین تعمیم یافته از نوع کاهشی

استاد راهنما: دکتر محمد شهریاری **استاد مشاور:** دکتر حسن مهتدیفر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر **دانشگاه:** تبریز

دانشکده: علوم ریاضی **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۸٦/۱۱/۳ **تعداد صفحه:** ۱۰۰

کلید واژه‌ها:. انعکاس، گروههای وایل، سیستم‌ریشه، فرم دوخطی، درجه پوچی، نیم‌لاتیس، EAWG، EARS و اندیس

چکیده:

گروههای وایل آفین تعمیم یافته (یا باختصار EAWG)، در واقع گروههای وایل سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته هستند. گروههای وایل تولید شده بوسیله انعکاس‌ها، نقش مهمی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی ایفا می‌کنند. در تئوری لی، گروههای وایل جبرهای لی با تجزیه فضاهای ریشه، گروههای تولید شده توسط انعکاس‌ها هستند.

یک سیستم ریشه متناهی در واقع زیرمجموعه متناهی و ناتهی R از فضای برداری با بعد متناهی V می‌باشد که دارای فرم نیم معین مثبت و دو خطی $(\cdot,\cdot)$ است بطوریکه دارای خواص زیر می‌باشد: $0 \in R$، $-R = R$ و R، V را تولید کند و در آن گسسته باشد.

ریشه $a \in R$ را بخش‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه $\frac{1}{2}a \notin R$. در صورتیکه یک سیستم ریشه تنها شامل ریشه‌های بخش‌ناپذیر باشد آن سیستم ریشه را کاهشی می‌نامیم.

عنصر $a \in R$ را ایزوتروپیک نامیم هرگاه $(a,a) = 0$. در غیر اینصورت آن ریشه را غیر ایزوتروپیک نامیم. پوچی سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته سایتو بنابه تعریف برابر با بعد رادیکال فرم تعریف شده می‌باشد.

در این پایاننامه درباره گروههای وایل سیستم های ریشه آفین تعمیم یافته از نوع کاهشی بحث خواهیم کرد. در واقع این ریشه‌ها همان ریشه‌های جبرهای لی آفین تعمیم یافته می‌باشند. نشان می‌دهیم که EAWG بصورت حاصلضرب نیم‌مستقیم گروه وایل متناهی و زیرگروه نرمال شبه هایزنبرگ آن نوشته می شود.

با استفاده از مفهوم شاخص که تحت سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته پایاست یک ویژگی مهم سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته (وابسته به گروه وایل آنها) را بیان خواهیم کرد که این خاصیت برای کلاسی از آنها برقرار است.

همچنین نشان می‌دهیم که برای هر سیستم ریشه آفین تعمیم یافته بنام R از نوع X، یک زیرمجموعه متناهی $\Pi(X)$ از ریشه‌های غیرایزوتروپیک آن موجود است بطوری که مجموعه ریشه‌های غیرایزوتروپیک از اثر $\Pi(X)$ روی زیرگروه $W_{\Pi(X)}$ از گروه W بدست می‌آیند.

در نهایت در فصل آخر مطالعه خود را روی گروههای وایل EARS از اندیس صفر متمرکز خواهیم کرد.

فهرست مطالب

مقدمه

مقدمه

گروههای وایل آفین تعمیم یافته (یا باختصار EAWG[1])، در واقع گروههای وایل سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته (یا باختصار EARS[2]) هستند. گروههای وایل تولید شده بوسیله انعکاس‌ها، نقش مهمی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی ایفا می‌کنند. در تئوری لی، گروههای وایل جبرهای لی با تجزیه فضاهای ریشه، گروههای تولید شده توسط انعکاس‌ها هستند.

گروههای وایل مختلف شامل اشکال مختلف می‌باشند که وابسته به نوع جبر لی یا سیستم ریشه‌ها خواهند بود. در سالهای اخیر نوع جالبی از گروههای وایل آفین تعمیم یافته علاقه محققین را به خود جذب کرده است و آن بخاطر یک زیرگروه نرمال ذاتی[3] است که زیرگروه شبه هایزنبرگ نامیده می‌شود و ساختار داخلی خیلی مهمی دارد. مطالعه چنین گروههایی هم بخاطر کاربرد آنها و هم از نقطه نظر نظریه گروهها جالب است.

یک سیستم ریشه متناهی در واقع زیرمجموعه متناهی و ناتهی Rاز فضای برداری با بعد متناهی V می‌باشد که دارای فرم نیم معین مثبت و دو خطی$(\cdot,\cdot)$ است و دارای خواص زیر می‌باشد:

$0 \in R$، $-R = R$ و R، Vرا تولید کند و در آن گسسته باشد.

عناصر Rریشه نامیده می‌شود. تنها مضارب ممکن یک ریشه $\alpha \in R$ که بتواند ریشه باشد عبارتند از: $0, \pm\frac{1}{2}\alpha, \pm\alpha, \pm 2\alpha$

---

[1] Extended Affine Weyl Groups

[2] Extended Affine Root Systems

[3] Intrinsic

ریشه $\alpha \in R$ را بخش‌ناپذیر[4] می‌نامیم هرگاه $\frac{1}{2}\alpha \notin R$. در صورتیکه یک سیستم ریشه تنها شامل ریشه‌های بخش‌ناپذیر باشد آن سیستم ریشه را کاهشی[5] می‌نامیم.

در سال ۱۹۸۵، سایتو[6] مفهوم سیستم های ریشه آفین تعمیم یافته را معرفی کرد که در آن R در V گسسته می‌باشد. هم چنین سایتو اصولی را برای EARS معرفی کرد. سیستمهای ریشه مفروض سایتو فقط شامل سیستمهای ریشه غیر ایزوتروپیک بودند. او درباره انواع این سیستم‌های ریشه و گروههای وایل آنها مطالعه نمود و EARS از درجه پوچی ۲ را کلاس‌بندی نمود.

عنصر $\alpha \in R$ را ایزوتروپیک[7] نامیم هرگاه $(\alpha,\alpha)=0$. در غیر اینصورت آن ریشه را غیر ایزوتروپیک نامیم. پوچی سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته سایتو بنابه تعریف برابر با بعد رادیکال فرم تعریف شده می‌باشد.

سیستم‌های ریشه آفین و متناهی نمونه‌هایی از سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته سایتو می‌باشند. در واقع زمانی که فرم، معین مثبت باشد $R \cup \{0\}$ سیستم ریشه متناهی است.

هم چنین مجموعه ریشه‌های غیر ایزوتروپیک یک سیستم‌های ریشه آفین، یک سیستم ریشه آفین تعمیم یافته سایتو از نوع کاهشی با پوچی ۱ می‌باشد و زمانی که درجه پوچی ۱ باشد اصول سیستم-های ریشه آفین تعمیم یافته سایتو و مک دونالد برهم منطبق می‌شوند.

در سال ۱۹۹۰، هوک کراون[8] و تورسانی[9] یک سیستم با یک سری اصول برای کلاس جدیدی از جبرهای لی روی میدان اعداد مختلط معرفی کردند. آنها این جبرها را جبرهای لی ساده کشی نامیدند.

---

[4] Indivisible

[5] Reduced

[6] Saito

[7] Isotropic

[8] Hoegh Krohn

[9] Torresani

در سال ۱۹۹۷، آلیسون[۱۰]، اعظم و همکاران با استفاده از نمادهای مشابه سیستم های ریشه آفین تعمیم یافته، اصول معینی را برای یک سری از سیستم‌های ریشه معرفی کردند[3].

درسال ۱۹۹۲ مودی و شای[۱۱] درباره گروههای وایل چنبره‌ای[۱۲] بحث نمودند. کار آنها تمام شامل تمام EAWG بود که از یک سیستم ریشه از نوع Simply Laced با رتبه بیشتر از ۱ درست شده بودند. آنها همچنین حالت A_1 را به طور جداگانه مورد بحث و بررسی قرار دادند[17].

در مقاله [3]، مولفان توصیف کاملی از یک سیستم ریشه آفین تعمیم یافته را با استفاده از مفهوم نیم‌لاتیس‌ها ارائه دادند که در آن، یک لاتیس در واقع زیرمجموعه ناتهی E از فضای برداری متناهی البعد V است بطوریکه $0 \in E$، $E + 2E \subseteq E$ و E، V را تولید کرده و در آن گسسته است.

در واقع مجموعه ریشه های غیرایزوتروپیک یک سیستم ریشه آفین تعمیم یافته سایتو، یک سیستم ریشه آفین تعمیم یافته کاهشی می‌باشد.

در این پایان‌نامه درباره گروههای وایل سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته از نوع کاهشی بحث خواهیم کرد که در آن سیستم‌های ریشه همان سیستم‌های ریشه جبرهای لی آفین تعمیم یافته می-باشند.

نشان می‌دهیم که هر EAWG بصورت حاصلضرب نیم‌مستقیم گروه وایل متناهی و زیرگروه نرمال شبه هایزنبرگ آن نوشته می‌شود.

با استفاده از مفهوم اندیس[۱۳] ، یک ویژگی مهم سیستم‌های ریشه آفین تعمیم یافته (وابسته به گروه وایل آنها) را بیان خواهیم کرد که برای کلاسی از آنها برقرار است.

---

۱۰ Allison

۱۱ Moody & Shi

۱۲ Troidal

۱۳ Index

این پایان‌نامه در ۵ فصل تنظیم شده است که در فصل اول تعاریف پایه و نیم‌لاتیس‌ها و ساختار EARS ارائه شده است.

در فصل دوم گام‌های بعدی را برای مطالعه ساختار EAWG طی می‌کنیم. مفهوم دوگان سیستم ریشه آفین متناهی را نیز معرفی خواهیم کرد.

در فصل سوم ساختار EAWG را بیان خواهیم کرد و نشان می‌دهیم که گروه وایل آفین تعمیم یافته W بصورت حاصلضرب نیم‌مستقیم $W^{\&}$ (گروه وایل متناهی) در زیرگروه مشخصه H از W نوشته می‌شود.

در فصل چهار یکی از مشخصه‌های پایه برای سیستمهای ریشه آفین متناهی بیان می‌گردد. به عبارتی دیگر نشان می‌دهیم که برای هر EARS بنام R از نوع X ، یک زیرمجموعه متناهی $\Pi(X)$ از ریشه‌های غیرایزوتروپیک موجود است به طوری که مجموعه ریشه‌های غیر ایزوتروپیک از اثر $W_{\Pi(X)} \leq W$ روی $\Pi(X)$ بدست می‌آیند.

در نهایت در فصل آخر درباره گروههای وایل EARS های از اندیس صفر بحث خواهد شد.

فصل اول

مفاهیم پایه

۱-۱- مفاهیم پایه

تعریف ۱-۱: فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. یک فرم دو خطی روی V تابعی چون $f: V \times V \rightarrow \mathrm{F}$ است که به هر جفت مرتب از بردارهای $a, b \in V$ یک اسکالر $f(a,b)$ در F تخصیص می‌دهد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$f(ca_1 + a_2, b) = cf(a_1, b) + f(a_2, b)$$

$$f(a, cb_1 + b_2) = cf(a, b_1) + f(a, b_2)\,.$$

تعریف ۱-۲: فرض کنیم f یک فرم دو خطی روی فضای برداری V باشد. گوییم f متقارن است هرگاه به ازای همه بردارهای a و b در V، داشته باشیم: $f(a,b) = f(b,a)$.

تعریف ۱-۳: فرم دو خطی f روی فضای برداری V ناتبهگون[1] نامیده می شود هرگاه به ازای هر بردار غیر صفر a در V، bیی در V وجود داشته باشد بطوریکه داشته باشیم: $f(a,b) \neq 0$.

تعریف ۱-٤: فرض کنیم f یک فرم دو خطی روی فضای برداری V باشد. گوییم f معین مثبت است هر گاه به ازای هر $a \in V$ $0 \neq$ داشته باشیم $f(a,a) > 0$ و f نیم‌معین مثبت است هرگاه به ازای هر $a \in V$ $0 \neq$ داشته باشیم $f(a,a) \geq 0$.

تعریف ۱-٥: فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی نابدیهی و با بعد متناهی همراه با فرم دو خطی نیم‌معین مثبت و متقارن $(\cdot,\cdot)$ باشد. فرض کنید $R \subseteq V$، قرار دهید:

$$R^{\times} = \{a \in R : (a,a) \neq 0\},\ R^0 = \{a \in R : (a,a) = 0\}$$

آنگاه $R = R^{\times} \,\dot\cup\, R^0$ که در آن $\dot\cup$ به معنی اجتماع مجزا است.

---

[1] Nondegenerate

تعریف ۱–٦: فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی نابدیهی و با بعد متناهی همراه با فرم دو خطی نیم‌معین مثبت و متقارن $(\cdot,\cdot)$ باشد. در این صورت رادیکال فرم دوخطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$rad(\cdot,\cdot) = \{\alpha \in V : (\alpha,\beta) = 0 \quad \forall \beta \in V\}$$

تعریف ۱–۷: یک سیستم ریشه متناهی در واقع یک زیرمجموعه ناتهی R از فضای برداری حقیقی با بعد متناهی V حاوی فرم دوخطی معین مثبت $(\cdot,\cdot)$ می‌باشد که در اصول زیر صدق می‌کند:

۱- $0 \in R$. ۲- R، V را تولید کند. ۳- برای هر انعکاس $\sigma_\alpha\,(\alpha \in R')$ داشته باشیم: $\sigma_\alpha(R) = R$.

۴- برای هر $\alpha,\beta \in R$ که $\alpha \neq 0$ داشته باشیم: $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbf{Z}$.

زیرمجموعه $T \subseteq X$ از فضای برداری حقیقی یا مختلط X در X گسسته است هرگاه توپولوژی آن روی T گسسته باشد. به عبارتی دیگر برای هر دنباله مانند $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ از عناصر T که به نقطه $a \in T$ همگرا باشد داشته باشیم:

$$\exists N \geq 1 : \forall n \geq N \quad a_n = a$$

بوضوح می‌گوییم T در X گسسته است اگر و تنها اگر در زیر فضای حقیقی تولید شده توسط آن یعنی $\langle T \rangle$ گسسته باشد.

۱-۲- سیستم ریشه آفین تعمیم یافته

مجموعه $R \subseteq V$ را یک سیستم ریشه آفین تعمیم یافته (EARS[1]) در V نامیم هرگاه R در اصول زیر صدق کند:

(R1) $0 \in R$.

(R2) $-R = R$.

(R3) R، V را تولید کند.

(R4) اگر $\alpha \in R^{\times}$ آنگاه $2\alpha \notin R$.

(R5) R در V گسسته[2] باشد.

(R6) اگر $\alpha \in R^{\times}$ و $\beta \in R$ آنگاه اعداد صحیح $d,u \in \mathbf{Z}^{\geq 0}$ موجود باشند که

$$\{\beta + n\alpha :\ n \in \mathbf{Z}\} \cap R = \{\beta - (d-i)\alpha \ \mid\ 0 \leq i \leq d+u\}, \qquad d - u = 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$$

(R7) $R^{\times}$ تحویل ناپذیر باشد (یعنی $R^{\times}$ را نتوان به صورت $R^{\times} = R_1 \cup R_2$ نوشت که $(R_1,R_2) = 0$).

(R8) برای هر $\delta \in R^0$ یک $\alpha \in R^{\times}$ موجود باشد که $\alpha + \delta \in R$.

تعریف ۱-۸: دو سیستم ریشه R و R' را ایزومورف نامیم هرگاه یک نگاشت خطی دوسویی $\varphi : V \longrightarrow V$ موجود باشد بطوریکه $\varphi(R) = R'$ و داشته باشیم:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \qquad \forall x,y \in V \quad : \ (\varphi(x),\varphi(y)) = \varepsilon(x,y)$$

---

[1] Extended Affine Root Systems

[2] discrete

قرار می‌دهیم $V^0 := rad(\cdot,\cdot)$ و $\overline{V} := V/V^0$. فرض می‌کنیم که نگاشت $\overline{}: V \longrightarrow \overline{V}$ نگاشت کانونی باشد.

هم چنین می‌توان فرم دو خطی متقارن فوق را روی $\overline{V}$ تعمیم داد که $(\overline{a},\overline{b}) = (a,b)$. بنابراین فرم $(\cdot,\cdot)$ روی $\overline{V}$ معین مثبت است.

قرار می‌دهیم $\overline{R} = \{\overline{a} : \quad a \in R\}$.

بنابر قضیه [3, II.2.8]، $\overline{R}$ یک سیستم ریشه متناهی تحویل‌ناپذیر(شامل صفر) در $\overline{V}$ می‌باشد.

چون فرم $(\cdot,\cdot)$ روی $\overline{V}$ معین مثبت است بنابراین داریم:

$$V^0 = \{a \in V : (a,a) = 0\} \quad \Rightarrow \quad R^0 = R \cap V^0$$

تعریف ۱-۹: زیرمجموعه $\Delta = \{a_1,\ldots,a_l\}$ از R را یک سیستم بنیادی برای R نامیم هرگاه:

۱. Δ یک پایه برای V به عنوان فضای برداری باشد.

۲. هر ریشه $b \in R$ را بتوان به صورت ترکیب خطی $b = \sum_{i=1}^{l} k_i a_i$ هم‌علامت از عناصر Δ نوشت بطوریکه k_iها همگی مثبت یا همگی منفی هستند.

۱-۳- سیستم‌های ریشه از نوع کاهشی[1] و غیرکاهشی

فرض کنید X_ℓ یکی از انواع سیستم‌های ریشه $A_l(l \geq 1), B_l(l \geq 2), C_l(l \geq 3), D_l(l \geq 4)$ $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, BC_1(l \geq 1)$ باشد. در این صورت R را سیستم ریشه کاهشی از نوع X_1 نامیم هرگاه R یکی از انواع $A_l(l \geq 1), B_l(l \geq 2), C_l(l \geq 3), D_l(l \geq 4), E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ باشد و اگر R از نوع $BC_1(l \geq 1)$ باشد آن را غیر کاهشی می‌نامیم.

---

[1] Reduced

فرض کنید R Î a_j, a_i و a_j ¹ 0 باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\langle a_i, a_j \rangle = \frac{2(a_i, a_j)}{(a_j, a_j)}.$$

فرض کنید که $\{a_1, ..., a_1\}$ مجموعه مرتبی از ریشه‌ها باشد. ماتریس $\left(\langle a_i, a_j \rangle\right)_{1´1}$ را ماتریس کارتان سیستم ریشه R می‌نامیم. مؤلفه‌های این ماتریس، اعداد صحیح کارتان نامیده می‌شوند.

نکته ۱: یک سیستم ریشه متناهی از نوع کاهشی مانند R با رتبه ℓ را سیستم ریشه متناهی از نوع X_1 نامیم هرگاه ماتریس کارتان آن با ماتریس کارتان X_1 در شکل صفحه بعد هم‌ارز باشد.

در شکل صفحه بعد ماتریس کارتان سیستم‌های ریشه متناهی کاهشی از نوع X_1 را مشاهده می‌کنید:

Table 1. *Cartan matrices*

$$A_\ell:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_\ell:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_\ell:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_\ell:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdot & \cdot & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdot & \cdot & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & & \cdot & \cdot & & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & & \cdot & \cdot & & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6:\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7:\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8:\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad G_2:\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ماتریس کارتان انواع سیستم‌های ریشه

تعریف ۱-۱۰: پوچی R را همان بعد V^0 مساوی با ν و رتبه R را همان بعد $\bar{V}$ مساوی با ℓ تعریف می‌کنیم. عناصر R^0 ریشه‌های ایزوتروپیک و عناصر R' ریشه‌های غیر ایزوتروپیک نامیده می‌شوند. R کاهشی است اگر $\bar{R}$ کاهشی باشد. نوع R را همان نوع $\bar{R}$ در نظر می گیریم.

۱-٤- سیستم‌های ریشه از نوع SL و NSL

تعریف ۱-۱۱: یک سیستم ریشه متناهی از نوع کاهشی را Simply Laced (یا باختصار SL) نامیم هرگاه یکی از نوع‌های $A_l, D_l\ (l \geq 4), E_6, E_7, E_8$ باشد در غیر اینصورت آن را Nonsimply Laced (باختصار NSL) می‌نامیم.

نکته ۲: طول ریشه $\alpha \in R \setminus \{0\}$ را برابر با $(\alpha,\alpha)^{1/2}$ تعریف کرده و با نماد $\|\alpha\|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱۲: عناصری از $R \setminus \{0\}$ که کمترین طول دارند را ریشه های کوتاه[1] و عناصری از $R \setminus \{0\}$ که طولشان دو برابر طول ریشه‌های کوتاه باشد را ریشه‌های بلند[2] می‌نامیم. ریشه‌هایی که نه بلند و نه کوتاه باشند ریشه‌های فوق بلند[3] نامیده می‌شوند.

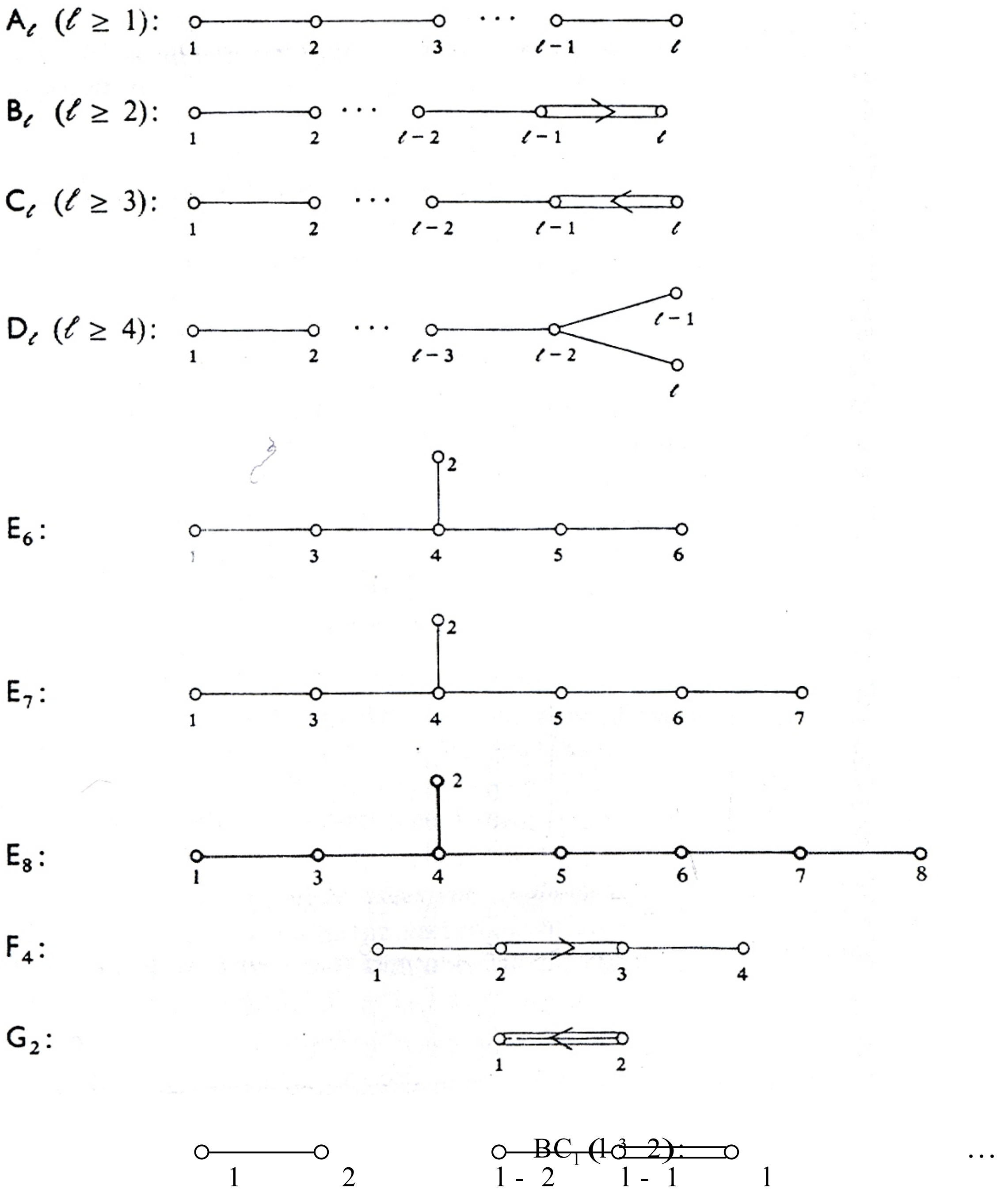
بنابراین با استفاده از تعریف فوق خواهیم داشت:

$$R \setminus \{0\} = R_{sh} \cup R_{lg} \cup R_{ex}$$

[1] Short roots
[2] Long roots
[3] Extra roots

نکته ۳: توجه می‌کنیم که در سیستم‌های ریشه کاهشی، تنها ریشه‌های بلند و کوتاه را خـواهیم داشـت در حالیکه در سیستم‌های ریشه از نوع غیر کاهشی، ریشه‌های از نوع فوق بلند نیز خواهیم داشت.

در زیر نمودارهای دینکین انواع سیستمهای ریشه‌ها را مشاهده می‌کنید:



نمودار ۱–۲– نمودار دینکین انواع سیستم ریشه