دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

ضربگرهای فشرده روی برخی از جبرهای باناخ

توسط:

مهدی محمّدی جوزدانی

استاد راهنما:

دکتر علی غفاری

استاد مشاور:

دکتر رضا معمارباشی

اردیبهشت ۱۳۹۳

تقدیم به

همه کسانی که زحماتشان در راه کسب علم روشنگر راهمان بوده است.

تقدیر و سپاس

سپاس خدایی را که ستایش گران نمی توانند حق سپاسش را ادا کنند و حساب گران از شمارش نعمت های بی پایانش عاجزند، خدایی که نه کلام گنجایش تعریفش را دارد و نه زمان فرصت شمارش را.

ضمن سپاس بی کران از خداوند، مراتب سپاس و امتنان خود را نسبت به استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر علی غفاری که دانش لازم را در اختیارم قرار داده و راهنمایی های ایشان همواره برایم درس آموز بوده است، اعلام نموده و از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر رضا معمار باشی که زحمت مشاوره این پایان نامه را بر عهده گرفته اند، صمیمانه تشکر می نمایم.

نسبت به زحمات آقایان دکتر بهرام محمدزاده و دکتر مجید اسحقی که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، بی نهایت سپاسگذارم.

چکیده

برای گروه فشرده موضعی G، دوگان جبرهای باناخ $L^{\infty}(G)^{*}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ضربگرهای چپ فشرده روی $L^{\infty}(G)^{*}$ را بررسی کرده و ثابت می‌کنیم وجود یک ضربگر چپ فشرده روی $L^{\infty}(G)^{*}$ با فشردگی G معادل است. همچنین رده‌ی عناصر به طور کامل پیوسته چپ $L^{\infty}(G)^{*}$ را توصیف می‌کنیم. دوگان جبرهای نیم‌گروهی $M_a(S)$ را برای رده‌ی وسیعی از نیم‌گروه‌های فشرده موضعی S تحت توپولوژی‌های محدب موضعی، مطالعه می‌کنیم. در ابتدا توپولوژی محدب موضعی روی $M_a(S)$ را که تحت آن می‌توان فضای باناخ $L^{\infty}(S, M_a(S))$ را به‌عنوان دوگان قوی $M_a(S)$ در نظر گرفت، مطالعه و بررسی کنیم. سپس نشان می‌دهیم به جز حالتی که S متناهی باشد تعداد نامتناهی از این قبیل توپولوژی‌ها روی $M_a(S)$ وجود دارند . در اینجا ضربگرهای راست فشرده روی جبر باناخ $L^{\infty}(S, M_a(S))^{*}$ را همراه با ضرب آرنز مطالعه می‌کنیم.

واژه های کلیدی:

ضربگر، نیم‌گروه، گروه فشرده موضعی، به طور کامل پیوسته، جبر باناخ.

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان نامه مطالب به ۴ فصل تقسیم بندی شده‌اند.

در فصل اول به بیان برخی قضایا و مفاهیم مقدماتی پرداخته‌ایم. البته اکثر قضایا بدون برهان ارائه شده‌اند که خواننده برای مطالعه بیشتر این مفاهیم می‌تواند به مراجع ذکر شده، مراجعه نماید.

فصل دوم شامل چهار بخش است. در بخش دوم نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی روی G، یک ضربگر چپ فشرده ناصفر و نیز یک عنصر به طور کامل پیوسته چپ ناصفر روی $L^\infty(G)^*$ وجود دارد.

در بخش سوم ارتباط بین عناصر به طور کامل پیوسته چپ دو فضای $L(G)$ و $L^\infty(G)^*$ را مشخص می‌کنیم. در واقع در این بخش برخی ویژگی‌های مربوط به عناصر به طور کامل پیوسته چپ از $L^\infty(G)^*$ مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در بخش چهارم این فصل، مجموعه‌ی تمام ضربگرهای چپ فشرده روی $L^\infty(G)^*$ را به ازای زیر جبر A از $L^\infty(G)^*$ با در نظر گرفتن یک شرط با نماد $M_{cl}(A)$ نمایش داده و سپس دو ایده‌آل بسته در $M_{cl}(L^\infty(G)^*)$ معرفی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که $M_{cl}(L^\infty(G)^*)$ به صورت مجموع مستقیم این دو ایده‌آل نوشته می‌شود.

فصل سوم شامل ۲ بخش است. در بخش دوم یک توپولوژی محدب موضعی $\beta(S)$ روی $M_a(S)$ قرار می‌دهیم. سپس توپولوژی قوی و توپولوژی القایی روی فضای دوگان $(M_a(S),\beta(S))^*$ را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم این دو توپولوژی روی $(M_a(S),\beta(S))^*$ معادل‌اند. به‌عنوان یکی از مهم‌ترین نتایج این بخش ثابت می‌کنیم که دوگان $(M_a(S),\beta(S))$ همراه توپولوژی قوی با $L^\infty(S,M_a(S))$ مجهز به $\|\cdot\|_\infty-$ توپولوژی یکسان است.

فصل چهارم شامل دو بخش است. در این فصل به بررسی ضربگرهای راست فشرده روی برخی جبرهای باناخ مربوط به نیم‌گروه‌های فشرده موضعی می‌پردازیم. در این مورد به فعالیت‌های ساکایی [1] و آکمن [2] اشاره

[1] Sakai

[2] Akemann

کنیم. ساکایی ثابت کرد؛ اگر گروه G فشرده موضعی و نافشرده باشد، آن‌گاه صفر تنها ضربگر راست فشرده روی جبر گروهی $L(G)$ است و همچنین آکمن نشان داد، اگر G فشرده باشد، در آن‌صورت هر ضربگر راست روی $L(G)$ فشرده است. در بخش اول فصل چهارم ضمن بیان مفاهیم اولیه مورد نیاز برای این فصل، برخی از نتایج مرتبط با $L^\infty(S, M_a(S))$ و $M_a(S)$ ارائه شده است، به‌عنوان نمونه یکی از نتایج حائز اهمیت بیان شده در این بخش، اثبات یکریخت بودن جبر های ضربگر فضاهای $M_a(S)$، $M(S)$ و $L^\infty(S, M_a(S))^*$ با $M(S)$ می‌باشد. در بخش آخر هم ضربگرهای راست فشرده روی $L^\infty(S, M_a(S))^*$ را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم که از جمله نتایج مهم این بخش این است که ضربگرهای راست فشرده روی $L^\infty(S, M_a(S))^*$ عملگرهای فشرده نیز هستند.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بیان برخی مفاهیم و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که به درک بهتر مطالب ارائه شده در فصول بعدی کمک خواهند کرد. از اثبات اکثر قضایا در این فصل صرف نظر شده است و برای مطالعه بیشتر این مطالب می‌توانید به مراجع ذکر شده، مراجعه نمایید.

فرض کنید X یک فضای برداری و $A \subseteq X$. پوسته محدب A را با نماد $co(A)$ نمایش داده و بنا به تعریف، پوسته A مجموعه همه ترکیبات محدب از اعضای A است. به عبارت دیگر $x \in co(A)$ اگر و تنها اگر $a, \ldots, a_n \in A$ و اسکالرهای نامنفی $\alpha, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ موجود باشند که $\sum_{i=}^{n} \alpha_i =$ و $x = \sum_{i=}^{n} \alpha_i a_i$. به آسانی دیده می‌شود که اشتراک هر تعداد از زیرمجموعه‌های محدب از فضای برداری X نیز محدب است. در واقع اشتراک همه زیرمجموعه‌های محدب از X که شامل A است، برابر پوسته محدب A است.

تعریف ۱.۱.۱. اگر X و Y دو فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow Y$ تابعی دوسوئی، پیوسته و دارای معکوس پیوسته باشد، f را یک همیومورفیسم و X و Y را همیومورف گوئیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $f : X \longrightarrow Y$ خطی و پوشا باشد. f را یکریختی طولپا

گوئیم هرگاه برای هر $x \in X$، $\|x\| = \|f(x)\|$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید A فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. اگر نگاشت ضرب از $A \times A$ به‌توی A برای هر $a, b, c \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، در خواص زیر صدق کند،

$$a(b+c) = a.b + a.c, \quad (a+b)c = a.c + b.c, \quad a(b.c) = (a.b)c,$$

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

آن‌گاه A یک جبر است. اگر نرمی روی جبر A موجود باشد، آنرا جبر نرمدار گوئیم هرگاه برای $x, y \in A$، $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. اگر نرم یاد شده کامل باشد، A را یک جبر باناخ گوئیم.

توجه کنید جبرهای باناخی وجود دارند که همانی ندارند و در عوض شامل توری هستند که مشابه همانی عمل می‌کند. این تور به واحد تقریبی معروف است. در اینجا به تعریف آن می‌پردازیم.

همان طور که می‌دانید اگر A جبر نرمدار باشد، یک واحد تقریبی چپ برای A، تور $(e_\alpha) \subseteq A$ است به طوری‌که برای هر $a \in A$، $e_\alpha a \longrightarrow a$. تور (e_α) در A کراندار است هرگاه عدد ثابت و مثبت k موجود باشد که برای هر $\alpha \in D$، $\|e_\alpha\| \leq k$.

به طور مشابه واحد تقریبی راست کراندار در A، تور کراندار $(e_\alpha) \subseteq A$ است که برای هر $a \in A$، $ae_\alpha \longrightarrow a$. واحد تقریبی راست و چپ را یک واحد تقریبی گوییم.

قضیه ۴.۱.۱ (قضیه تجزیه کوهن[1]). فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathcal{A}$-مدول باناخ چپ (راست) باشد.

آ) اگر $\mathcal{A}$ دارای واحد تقریبی چپ (راست) کراندار باشد، آن‌گاه $\overline{\mathcal{A}X} = \mathcal{A} \cdot X$ ($\overline{X\mathcal{A}} = X \cdot \mathcal{A}$)؛

ب) اگر $\mathcal{A}$ دارای واحد تقریبی چپ (راست) کراندار باشد، آن‌گاه $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

[1] Cohen factorization theorem

برهان. به قضیه ۱۱.۱۰ از مرجع [۴] مراجعه شود. $\square$

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده و نیز $C(X)$، مجموعه همه توابع مختلط مقدار پیوسته روی X باشد. برای $f, g \in C(X)$ و $k \in \mathbb{C}$، $f + g,\ kf,\ fg \in C(X)$ را برای هر $x \in X$ با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم:

(i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$؛

(ii) $(kf)(x) = kf(x)$؛

(iii) $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

با این اعمال $C(X)$ یک جبر یکدار جابجایی است. اکنون $\|.\|_\infty : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|;\ x \in X\}$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین برای هر $f, g \in C(X)$، $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. در آن‌صورت $(C(X), \|.\|_\infty)$ یک جبر باناخ است.

گوییم $f \in C_b(X)$ در بینهایت صفر می‌شود هرگاه برای هر $\epsilon >$، زیر مجموعه فشرده K موجود باشد که اگر $x \notin K$، $|f(x)| < \epsilon$. مجموعه همه توابع پیوسته که در بینهایت صفر می‌شوند را با نماد $C(X)$ نمایش می‌دهیم. در واقع $f \in C(X)$ اگر و تنها اگر برای هر $\epsilon >$، $\overline{\{x \in X\ ;\ |f(x)| \geq \epsilon\}}$ فشرده باشد، به‌سادگی دیده می‌شود که $C(X)$ زیر مجموعه‌ی بسته از $C_b(X)$ است.

توجه کنید که اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، اعضای σ جبر تولیدشده توسط زیر مجموعه‌های باز این فضا را زیر مجموعه‌های بورل گوییم. لذا در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، $\{a\} = \bigcap_{n=}^{\infty} \left(a - \frac{}{n}, a + \frac{}{n}\right)$ مجموعه‌ای بورل است. بنابراین $[a, b) = \{a\} \bigcup (a, b)$ نیز بورل است. قرار می‌دهیم $S = \{[a, b);\ a, b \in \mathbb{R}\}$ و σ حلقه تولید شده توسط S را با $\sigma(S)$ نمایش می‌دهیم. هر عنصر در $\sigma(S)$ مجموعه‌ای بورل است. از طرف

دیگر $\{a\} = \bigcap_{n=}^{\infty} [a, a + \frac{}{n}) \in \sigma(S)$ و بنابراین $(a, b) = [a, b)\setminus\{a\} \in \sigma(S)$. نتیجه این‌که $\sigma(S)$ همان زیر مجموعه‌های بورل فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری و $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$؛

ب) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

ρ را یک شبه نرم گوئیم. ρ یک نرم است هرگاه از $\rho(x) =$ بتوان نتیجه گرفت که $x =$.

فضای باناخ همه تابعک‌های خطی کراندار بر X را با نماد $X^* = B(X, \mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه تعریف می‌کنیم $X^{**} = (X^*)^*$.

فرض کنید X یک فضای باناخ و Y یک زیرفضای بسته X باشد. فضای خارج قسمتی

$$\frac{X}{Y} = \{x + Y;\ x \in X\}$$

یک فضای باناخ با نرم خارج قسمتی تعریف شده به صورت زیر است:

$$\|x + Y\| = \inf\{\|x + y\| :\ y \in Y\} \quad (x \in X).$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $T \in B(X, Y)$. $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ را با ضابطه $\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle$ تعریف می‌کنیم. T^* را الحاق T می‌گوییم.

به سادگی می‌توان نشان داد که $T^* \in B(Y^*, X^*)$ و $\|T\| = \|T^*\|$.

اکنون توپولوژی ضعیف را تعریف کنیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. ضعیف‌ترین توپولوژی روی X که هر $x^* \in X^*$ نسبت به آن پیوسته است را توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم.

تور (a_α) در X به a در توپولوژی ضعیف میل می‌کند اگر و تنها اگر برای هر $f \in X^*$، $\langle f, a_\alpha \rangle$ به $\langle f, a \rangle$ میل کند.

اکنون قصد داریم یک توپولوژی روی X^* قرار دهیم که به توپولوژی ضعیف ستاره موسوم است.

فرض کنیم X یک فضای باناخ و X^* دوگان X باشد. برای هر $x \in X$، نگاشت $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ را با ضابطه $\hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$ تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$(X^*)' = \{\hat{x};\ x \in X\}$$

اگر $\Lambda \neq \Lambda$، پس $x \in X$ موجود است که $\Lambda(x) \neq \Lambda(x)$. پس $\hat{x}(\Lambda) \neq \hat{x}(\Lambda)$. لذا $(X^*)'$ نقاط X^* را جدا می‌کند.

تعریف ۹.۱.۱. کوچکترین توپولوژی روی X^* که همه عناصر فضای برداری $(X^*)'$ پیوسته باشند را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می‌گوییم. متداول است که از نماد $\sigma(X^*, X)$ نیز برای نمایش توپولوژی ضعیف ستاره استفاده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. اولین ضرب آرنز روی دوگان دوم A^{**} را برای عناصر $\mu, \nu \in A$، $g \in A^*$ و $m, n \in A^{**}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle g\mu, \nu \rangle := \langle g, \mu\nu \rangle \quad \langle ng, \mu \rangle := \langle n, g\mu \rangle \quad \langle m \cdot n, g \rangle := \langle m, ng \rangle$$

A^{**} با ضرب فوق یک جبر باناخ است.

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنید G گروه هاسدورف و فشرده‌ی موضعی باشد. آن‌گاه $I : C(G)^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که

(الف) اگر $f \in C(G)^+$، آن‌گاه $I(f) \geq$. همچنین اگر $f \neq$ ، $I(f) \neq$.

(ب) برای هر $f, g \in C(G)^+$، $I(f+g) = I(f) + I(g)$.

(ج) برای هر $\alpha \geq$ و $f \in C(G)^+$، $I(\alpha f) = \alpha I(f)$.

(د) برای هر $f \in C(G)^+$ و $a \in G$، $I({}_a f) = I(f)$ که در آن ${}_a f(b) = f(ab)$.

در این حالت I را پایای چپ گوییم.

به‌علاوه اگر J تابعی باشد که در شرایط فوق صدق کند، یک $c >$ موجود هست که $I = cJ$.

I را انتگرال هار چپ گوییم. قضیه فوق به قضیه انتگرال هار چپ معروف است. اندازه متناظر منسوب به تابعک I در قضیه قبل را با λ نمایش داده و اندازه هار چپ روی گروه G می‌گوییم.

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض کنیم I انتگرال هار چپ روی $C(G)^+$ و $f \neq$. برای هر $x \in G$، قرار می‌دهیم $\Delta(x) = \dfrac{I(f_{x^{-}})}{I(f)}$. در آن‌صورت Δ تابعی پیوسته و یک همریختی است. به Δ تابع مدولار گوییم.

برهان. به قضیه ۱۵.۱۱ از مرجع [۱۳] مراجعه شود. $\square$

$M(G)$، جبر همه اندازه‌های بورل منظم مختلط مقدار روی G را با نرم $\|\mu\| = |\mu|(G)$ و ضرب پیچشی $\mu * \nu$ با ضابطه‌ی

$$\langle f, \mu * \nu \rangle := \int_G \left(\int_G f(xy) d\mu(x) \right) d\nu(y) \quad (f \in C(G))$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین $M(G)$ یک جبر باناخ یکدار با همانی δ_{e_G} است.

حال فرض کنید λ اندازه‌ی هار روی G باشد. اندازه‌ی μ را نسبت به اندازه‌ی هار، پیوسته‌ی مطلق گوئیم هرگاه برای هر F فشرده که $\lambda(F) =$ ، $|\mu|(F) =$. زیرفضایی از $M(G)$ مرکب از اندازه‌هایی که به‌طور مطلق نسبت به λ پیوسته‌اند را با نماد $M_a(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. اگر μ اندازه‌ای روی $\sigma-$ جبر S از زیرمجموعه‌های X باشد، تابع اندازه پذیر $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ را انتگرال پذیر گوییم هرگاه $\int |f| d\mu < \infty$. مجموعه همه توابع انتگرال پذیر را با نماد $L(X)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید G گروهی هاسدورف و فشرده‌ی موضعی باشد. اختیار کنیم $\mu \in M_a(G)$. در آن‌صورت یک $f_\mu \in L(G)$ موجود است که برای هر $\varphi \in C(G)$،

$$\int \varphi f_\mu d\lambda(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

همچنین $\|f_\mu\| = \|\mu\|$ و می‌نویسیم $d\mu = f_\mu d\lambda$ و $\mu \longrightarrow f_\mu$ یک یکریختی طولپاست. این نشان می‌دهد که $M_a(G)$ با $L(G)$ به‌طور طولپا یکریخت است. ضرب پیچشی روی $L(G)$ برای $f, g \in L(G)$ به‌صورت

$$(f * g)(s) = \int_G f(t) g(t^- s) d\lambda(t)$$

بوده که در اینجا انتگرال فوق تقریباً برای همه $s \in G$ موجود است. جبر باناخ $L(G)$ دارای واحد تقریبی کراندار به می‌باشد. $L(G)$ یکدار است اگر و تنها اگر G گسسته باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $< p < +\infty$. خانواده‌ی همه توابع اندازه پذیر $f: X \to [-\infty, +\infty]$ که $|f|^p$ انتگرال پذیر باشد را با نماد $L^p(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. تابع اندازه پذیر $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ را اساساً کراندار گوییم هرگاه عددی مانند α موجود بوده که $|f|$ تقریباً همه جا از عدد ثابت α کمتر یا مساوی باشد. مجموعه‌ی همه توابع اساساً کراندار روی X را با نماد $L^\infty(X)$ نمایش می‌دهیم.

دوگان بین فضاهای باناخ را با نماد $\langle\rangle$ نمایش می‌دهیم. بنابراین برای $f \in L^\infty(G)$ و $\varphi \in L(G)$،

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx.$$

توجه کنید زیرمجموعه‌های اندازه پذیر با اندازه صفر را زیرمجموعه‌های پوچ فضا گوییم. واضح است شرط لازم و کافی برای آن‌که $f \in L^{\infty}(X)$، وجود عددی مانند α است که برای آن $\{x \in X; |f(x)| > \alpha\}$ موضعاً پوچ باشد. قصد داریم روی $L^{\infty}(X)$ یک نرم قرار دهیم. برای $f \in L^{\infty}(X)$ تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{\alpha;\ \{x;\ |f(x)| > \alpha\} \text{موضعاً پوچ است}\}.$$

قضیه ۱۶.۱.۱. (قضیه نمایش ریس[۲]) اگر X یک فضای هاسدورف و فشرده‌ی موضعی و $C(X)^*$ مجموعه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته روی $C(X)$ باشد، آن‌گاه $C(X)^* = M(X)$. در واقع اگر $\Lambda : C(X) \to \mathbb{C}$ تابعک خطی پیوسته باشد، آن‌گاه اندازه بورل، منظم و کراندار μ موجود است که $\Lambda(f) = \int f(x)d\mu(x)$. توجه کنید که اگر μ اندازه‌ای بورل، منظم و کراندار باشد، در آن‌صورت نگاشت تعریف شده‌ی فوق تابعکی خطی و پیوسته روی $C(X)$ بوده و $\|\Lambda\| = \|\mu\|$.

قضیه ۱۷.۱.۱. (قضیه گلداشتاین[۳]) فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. در آن‌صورت X در X^{**} با توپولوژی ضعیف ستاره چگال است.

برهان. به قضیه A.۳.۲۹ از مرجع [۵] مراجعه شود. $\square$

اگر A یک جبر یکدار (به‌عبارتی دارای همانی ضربی e) باشد، فرض می‌کنیم $\|e\| =$. از این پس عنصر همانی یک جبر باناخ را با ۱ نمایش می‌دهیم.

عملگر خطی T را کراندار گوئیم هرگاه $\|T\| < \infty$. به سادگی نتیجه می‌شود که عملگر خطی T کراندار است اگر و تنها اگر T پیوسته باشد.

---

[۲] Riesz's representation theorem

[۳] Goldstine's theorem

مثال ۱۸.۱.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ و $\mathcal{B}(X)$، مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار روی X باشد. ترکیب توابع را به‌عنوان عمل ضرب روی $\mathcal{B}(X)$ در نظر می‌گیریم. برای $T \in \mathcal{B}(X)$ تعریف می‌کنیم

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \ x \in X, \ \|x\| \leq \}.$$

واضح است که تابع تعریف شده یک نرم روی $\mathcal{B}(X)$ است و $\mathcal{B}(X)$ با این نرم یک جبر باناخ می‌باشد. $\mathcal{B}(X)$ دارای عملگر همانی $e = I$ روی X بوده، لذا یکدار است. به خاطر آورید اگر $\dim X \geq$ ، $\mathcal{B}(X)$ جابجایی نیست.

فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار و $T : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی باشد. فرض کنید U گوی واحد در X باشد. T را فشرده گوئیم هرگاه $\overline{T(U)}$ فشرده باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید A و B دو جبر (حلقه) باشند، در آن‌صورت نگاشت خطی (جمعی) $\varphi : A \longrightarrow B$ را یک همریختی گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in A$،

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. نگاشت $* : A \longrightarrow A \ ; \ a \longmapsto a^*$ یک برگشت روی A است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(i) برای هر $a \in A$، $(a^*)^* = a$؛

(ii) برای هر $a, b \in A$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، $(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha} a^* + \bar{\beta} b^*$؛

(iii) برای هر $a, b \in A$، $(ab)^* = b^* a^*$.

$(A, *)$ یک جبر باناخ با برگشت نامیده می‌شود.

تعریف ۲۱.۱.۱. جبر باناخ با برگشت A را که برای هر $x \in A$ در معادله C^* یعنی $\|x^* x\| = \|x\|$ صدق کند، یک C^*- جبر گوئیم.

مثال ۲۲.۱.۱. فرض کنید در مثال ۵.۱.۱ و برای هر $x \in X$ و $f \in C(X)$، نگاشت $* : C(X) \longrightarrow C(X)$ را با ضابطه $f^*(x) = \overline{f(x)}$ تعریف کنیم. در آن‌صورت $*$ یک برگشت روی $C(X)$ بوده که در معادله‌ی C^* صدق می‌کند. بنابراین $C(X)$ یک C^*- جبر است.

تعریف ۲۳.۱.۱. مجموعه ناتهی S را همراه با عمل دوتایی شرکت‌پذیر یک نیم‌گروه می‌نامیم. معمولاً این عمل را ضرب نیم‌گروه می‌نامند. در حالتی که نیم‌گروه S یکدار باشد، عنصر همانی آن را با e نمایش می‌دهیم.

فصل ۲

ضربگرهای چپ فشرده روی جبرهای باناخ مربوط به گروه‌های فشرده موضعی

هدف ما در این فصل مطالعه ضربگرهای چپ فشرده روی $L^\infty(G)^*$ می‌باشد. در بخش دوم این فصل ثابت خواهیم کرد فشردگی G با وجود یک ضربگر چپ فشرده ناصفر روی $L^\infty(G)^*$ معادل است. در بخش سوم برخی رده‌های عناصر به طور کامل پیوسته‌ی چپ در $L^\infty(G)^*$ را مورد مطالعه قرار داده و در بخش چهارم رابطه‌ی بین ضربگرهای چپ فشرده روی $L^\infty(G)^*$ و پوچساز راست $L^\infty(G)^*$ را بررسی خواهیم کرد.

۱.۲ مقدمه

یادآوری می کنیم که برای گروه فشرده موضعی G، $L^\infty(G)$ را فضای لبگ با نرم سوپریمم اساسی $\|\cdot\|_\infty$ در نظر می گیریم. $L^\infty(G)$ را زیرفضایی از $L^\infty(G)$ در نظر می گیریم که شامل همه $g \in L^\infty(G)$ که در بی‌نهایت صفر می‌شوند، در نظر می‌گیریم؛ یعنی، برای هر $\epsilon > 0$، زیر مجموعه فشرده K از G وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|g\chi_{G\setminus K}\|_\infty < \epsilon,$$