وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

زیرگروه‌های مشتق حاصل‌ضرب‌هایی از یک زیرگروه آبلی و یک زیرگروه دوری

توسط:

مریم بیوک‌زاده فرد

استاد راهنما:

دکتر پیمان نیرومند

استاد مشاور:

دکتر اسداله فرامرزی ثالث

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

زیرگروه‌های مشتق حاصل‌ضرب‌هایی از یک زیرگروه آبلی و یک زیرگروه دوری

توسط:

مریم بیوک‌زاده فرد

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم
برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **بسیار خوب**

دکتر پیمان نیرومند استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر محسن پرویزی استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد (استاد داور)

دکتر عبدالعلی بصیری استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد داور)

دکتر مصطفی زارع خورمیزی استادیار ریاضی محض گرایش منطق ریاضی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

تقدیم به ....

سپاسگزاری

سپاسگزاری می‌کنم از ....

چکیده

زیرگروه‌های مشتق حاصل‌ضرب‌هایی از یک زیرگروه آبلی و یک زیرگروه دوری

به وسیله‌ی:
مریم بیوک‌زاده فرد

در این پایان‌نامه، نشان می‌دهیم اگر $G = AB$ گروهی متناهی باشد که در آن A, B زیرگروه‌های آبلی‌اند، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ایتو زیرگروه مشتق یعنی G' آبلی است.
هم‌چنین در حالتی که زیرگروه‌های A یا B دوری باشند، می‌توان خواص بیشتری را مورد بررسی قرار داد. نشان می‌دهیم، به‌عنوان مثال $G'/(G' \cap A)$ در این حالت با زیرگروهی از B یکریخت است.

واژه‌های کلیدی: زیرگروه مشتق، قضیه‌ی ایتو، زیرگروه فراتینی، گروه پوچ‌توان

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌های اختصاری

$C_G(g)$: مرکزساز عنصر $g \in G$

$C_G(H)$: مرکزساز H در G

$r(G)$: رتبه گروه آبلی متناهی G

$\mathrm{Core}_G(H)$: هسته H در G

$Z(G)$: مرکز گروه G

G': زیرگروه مشتق G

$\Phi(G)$: زیرگروه فراتینی G

$|G|$: تعداد اعضای گروه G

$|G:H|$: شاخص زیرگروه H در گروه G

$[x,y]$: جابه‌جاگر دو عضو x, y از گروه G

x^y: مزدوج عضو x توسط y

$\mathrm{Aut}(G)$: گروه خودریختی‌های گروه G

پیشگفتار

تعدادی از مقاله‌ها، ویژگی‌هایی از گروه‌ها را به صورت حاصل‌ضرب AB از زیرگروه‌های آبلی A و B بیان می‌کنند که در سال ۱۹۵۰ چاپ شدند. شاید معتبرترین این‌ها، یک مقاله در سال ۱۹۵۵ توسط ایتو [1] [۱۲] باشد که وی ثابت کرد چنین گروهی دوآبلی [2] است. به عبارت دیگر، اگر $G = AB$ که A و B زیرگروه‌های آبلی باشند، آن‌گاه زیرگروه مشتق G' لزوماً آبلی است.

حالتی که A و B هر دو دوری باشند، توسط ردی [3] ، داگلاس [4] ، هوپرت [5] و کوهن [6] بررسی شد. ردی [۱۳] ثابت کرد، اگر $G = AB$ که A دوری نامتناهی و B دوری متناهی باشند، آن‌گاه زیرگروه مشتق G' توسط یک عضو از B و حداکثر یک عضو دیگر تولید می‌شود و بنابراین در حالت خاص، اگر $G' \cap B = ۱$ آن‌گاه G' دوری است.

ردی هم‌چنین یک نتیجه مشابه برای حالتی که A و B هر دو دوری نامتناهی باشند، اثبات کرد. وی نشان داد که یکی از A یا B شامل یک زیرگروه نابدیهی است که نرمال شده توسط یک عضو نابدیهی از دیگری می‌باشد.

کوهن [۲] نشان داد، اگر $G = AB$ که A و B دوری نامتناهی باشند و

$$G' \cap A = G' \cap B = A \cap B = ۱$$

[1] N. Ito

[2] Metabelian

[3] L. Redei

[4] J. Douglas

[5] B. Huppert

[6] P. M. Cohn

آن‌گاه G' دوری است.
جزئیات حالتی که A و B هر دو دوری متناهی باشند، بررسی نشده است.
فرض کنید زمانی که $G = AB$ متناهی و A و B آبلی‌اند، به جای G' که با قضیه‌ی ایتو می‌دانیم آبلی است، به طور کلی یک زیرگروه نرمال آبلی دلخواه K از G در نظر بگیریم. نشان می‌دهیم گروه $K/(K \cap A)$ به گونه‌ای به وسیله‌ی ساختاری از B کنترل می‌شود.
برای مثال می‌دانیم که $|K/(K \cap A)| = |KA : A|$ و این $|G : A|$ را عاد می‌کند و این هم $|B|$ را عاد می‌کند و بنابراین حداقل، مرتبه‌ی $K/(K \cap A)$ تحت کنترل است.
اگر A در G نرمال باشد، می‌توانیم خواص بیشتری را مورد بررسی قرار دهیم. در این حالت

$$K/(K \cap A) \cong AK/A \subseteq AB/A \cong B/(A \cap B)$$

و از این که B آبلی است، می‌توان نتیجه گرفت که $K/(K \cap A)$ با زیرگروهی از B یکریخت است.
در حالت خاص، اگر B دوری باشد، آن‌گاه $K/(K \cap A)$ دوری است.

به طور کلی در این پایان‌نامه موارد زیر را اثبات خواهیم کرد.

قضیه الف . فرض کنید $G = AB$ متناهی که A آبلی و B دوری باشند. اگر K یک زیرگروه نرمال آبلی از G باشد، با خاصیتی که ۲-زیرگروه سیلوی K مشمول در G' است، آن‌گاه $K/(K \cap A)$ دوری است.

قضیه ب. فرض کنید $G = AB$ متناهی که A دوری و B آبلی باشند. اگر K یک زیرگروه نرمال آبلی از G باشد، با خاصیتی که ۲-زیرگروه سیلوی K مشمول در G' است، آن‌گاه $K/(K \cap A)$ با زیرگروهی از B یکریخت است.

برای اثبات نتایجی مانند این‌ها، فرض این که G متناهی باشد، لازم نیست و کافیست B متناهی باشد. زیرا اگر B متناهی باشد، آن‌گاه $|G : A| < \infty$ و بنابراین $\overline{G} = G/N$ که $N = \mathrm{Core}_G(A)$ یک گروه متناهی است. در این حالت بنا به لم ددکیند داریم

$$NK \cap A = N(K \cap A)$$

و می‌توان دید که $K/(K \cap A) \cong \overline{K}/(\overline{K} \cap \overline{A})$.
بنابراین برای به دست آوردن اطلاعات درباره‌ی $K/(K \cap A)$ کافیست گروه متناهی $\overline{G}$ را در نظر بگیریم. چون $\overline{G} = \overline{A}\ \overline{B}$ و B متناهی و آبلی است، زیرگروه‌هایی از $\overline{B}$ با زیرگروه‌هایی از B یکریخت‌اند.

نتیجه ج. فرض کنید $G = AB$ که A و B آبلی و B متناهی است. اگر A یا B دوری باشند، آن‌گاه $G'/(G' \cap A)$ با زیرگروهی از B یکریخت است.

نتیجه د. فرض کنید $G = AB$ که A و B دوری و حداقل یکی از A و B متناهی‌اند، در این صورت دو عضو برای تولید G' کافیست.

اگر فرض شود که نه A و نه B دوری اند، آن‌گاه هرچند نیازی نیست $K/(K \cap A)$ با زیرگروهی از B یکریخت باشد. با این حال ساختاری از $K/(K \cap A)$ به وسیله‌ی ساختاری از B کنترل می‌شود.

برای شرح دادن قضایایی در این راستا، به خاطر آورید که رتبه یک گروه آبلی متناهی X ، کم‌ترین تعداد اعضایی است که برای تولید X کافیست و آن را با $r(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه و. فرض کنید $G = AB$ متناهی که A و B آبلی‌اند و K زیرگروه نرمال آبلی از G است. در این صورت $r(K/(K \cap A)) \leq f(r(B))$ برای یک تابع f که مستقل از گروه G می‌باشد.

قضیه هـ. فرض کنید p یک عدد اول باشد. در این صورت یک p -گروه G قابل بیان به صورت AB وجود دارد که A و B زیرگروه‌های آبلی‌اند به طوری که $G'/(G' \cap A)$ با هیچ زیرگروهی از B یکریخت نیست. در واقع، $r(G'/(G' \cap A))$ می‌تواند بزرگ‌تر از $r(B)$ با یک مقدار دلخواه بزرگ باشد.

این پایان‌نامه در شش فصل تدوین شده است.

در فصل اول که با عنوان مفاهیم و تعاریف مقدماتی مطرح شده، به بیان قضایا و تعاریفی می‌پردازیم که در فصول بعدی مورد نیاز است.

در فصل دوم به حقایق پایه‌ای درباره جابه‌جاگرها و زیرگروه‌های نرمال و آبلی به انضمام قضیه‌ی ایتو می‌پردازیم.

در فصل سوم حالت‌های خاصی که G' یک ۲-گروه است را بررسی می‌کنیم.

در فصل چهارم، حقایق پایه‌ای را درباره‌ی گروه‌های سه‌گانه قابل تجزیه به فرم

$$UV = UK = VK$$

که K, V, U زیرگروه‌هایی با اشتراک‌های دو به دو بدیهی‌اند، نشان می‌دهیم.

و در نهایت، در فصل پنجم و ششم این پایان‌نامه قضیه‌های (الف)، (ب)، (و)، (هـ) را اثبات خواهیم کرد.

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

در این فصل مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن و A یک مجموعه‌ی ناتهی از خودریختی‌های G باشد. گوییم H یک زیرگروه A -پایا از G است، اگر برای هر $\alpha \in A, h \in H$ داشته باشیم $\alpha(h) \in H$.

تعریف ۲.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. در این صورت H را زیرگروه مشخصه [۱] G نامیم، هرگاه به ازای تمام خودریختی‌های α از G داشته باشیم $\alpha(H) \leq H$.

لم ۳.۱. اگر H زیرگروه مشخصه‌ای از G باشد، آن‌گاه به ازای تمام خودریختی‌های α از G داریم $\alpha(H) = H$.

اثبات. فرض کنید $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ و β وارون α باشد. واضح است که β نیز یک خودریختی از G بوده و داریم $\beta(H) \leq H$. بنابراین باید داشته باشیم $\alpha\beta(H) \leq \alpha(H)$ و در نتیجه $H \leq \alpha(H)$ از طرفی طبق فرض داریم $\alpha(H) \leq H$ ، بنابراین $\alpha(H) = H$. $\square$

قضیه ۴.۱. فرض کنید G یک گروه است، در این صورت $Z(G)$ و G' زیرگروه‌های مشخصه‌ی G می‌باشند.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $Z(G)$ زیرگروه مشخصه‌ی G است. فرض کنید $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ و $g \in \alpha(Z(G))$. بنابراین می‌توان نوشت $g = \alpha(z)$ که $z \in Z(G)$. اگر $h \in G$ ، آن گاه چون α یک‌به‌یک است، عضو $k \in G$ وجود دارد به طوری که $\alpha(k) = h$. حال با توجه به این که α یک

[۱] Characteristic subgroup

خودریختی از G است، می‌توان نوشت

$$gh = \alpha(z)\alpha(k) = \alpha(zk) = \alpha(kz) = \alpha(k)\alpha(z) = hg$$

پس g با تمام اعضای G جابه‌جا می‌شود و لذا $g \in Z(G)$. پس $\alpha(Z(G)) \leq Z(G)$ یعنی $Z(G)$ یک زیرگروه مشخصه‌ی G است.
حال نشان می‌دهیم G' یک زیرگروه مشخصه‌ی G است. اگر $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ آن‌گاه به ازای اعضای x و y در گروه G می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\alpha([x,y]) &= \alpha(x^{-1}y^{-1}xy)\\
&= \alpha(x^{-1})\alpha(y^{-1})\alpha(x)\alpha(y)\\
&= (\alpha(x))^{-1}(\alpha(y))^{-1}\alpha(x)\alpha(y)\\
&= [\alpha(x),\alpha(y)] \in G'
\end{aligned}$$

چون G' به وسیله‌ی تمام $[x,y]$ ها تولید می‌شود، لذا $\alpha(G') \leq G'$ یعنی G' زیرگروه مشخصه‌ی G است. □

قضیه ۵.۱. هر زیرگروه مشخصه‌ی G زیرگروهی نرمال است.

اثبات. به ازای هر $g \in G$ خودریختی α_g از G که به صورت $\alpha_g = g^{-1}kg$ ، $k \in K$ ، تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. بنا به لم (۳.۱) داریم $\alpha_g(H) = H$ پس $g^{-1}Hg = H$ و در نتیجه $H \trianglelefteq G$. □

قضیه ۶.۱. فرض کنید G یک گروه و $H \leq K \trianglelefteq G$. اگر H زیرگروه مشخصه‌ی K باشد، آن‌گاه $H \trianglelefteq G$.

اثبات. فرض کنید g عضو دلخواهی از G است. چون $K \trianglelefteq G$ ، لذا α_g که به صورت $\alpha_g = g^{-1}kg$ ، $k \in K$ ، تعریف می‌شود یک خودریختی از K است. چون H زیرگروه مشخصه‌ی K است، پس بنا به لم (۳.۱) داریم $\alpha_g(H) = H$. بنابراین $g^{-1}Hg = H$ و در نتیجه $H \trianglelefteq G$. □

تعریف ۷.۱. هرگاه $\{H_i | i \in I\}$ خانواده‌ای از زیرگروه‌های گروه G باشد، آن‌گاه زیرگروه $\langle \bigcup_{i\in I} H_i \rangle$ تولید شده به وسیله‌ی مجموعه‌ی $\bigcup_{i\in I} H_i$ زیرگروه تولید شده به وسیله‌ی گروه‌های $\{H_i | i \in I\}$ یا الحاق H_i ها نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد، الحاق تمام زیرگروه‌های نرمال G مشمول در H را هسته H در G می‌نامیم. در واقع برای زیرگروه H داریم

$$\mathrm{Core}_G(H) = \bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg.$$

تعریف ۹.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، در این صورت نمای G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$min\{n \mid \forall g \in G\ ;\ g^n = 1\}.$$

تعریف ۱۰.۱. یک گروه که در آن هر عنصر مرتبه‌اش توانی ($0 \geq$) از عدد اول ثابتی مانند p است یک $p-$ گروه نامیده می‌شود. اگر H زیرگروهی از گروه G و H یک $p-$ گروه باشد، گوییم H یک $p-$ زیرگروه G است. به‌خصوص به ازای هر عدد اول p ، $\langle e\rangle$ یک $p-$ زیرگروه G است، زیرا $|\langle e\rangle| = 1 = p^0$.

نتیجه ۱۱.۱. گروه متناهی G یک $p-$ گروه است اگر و فقط اگر $|G|$ توانی از p باشد.

اثبات. به صفحه‌ی ۹۳ از [۸] رجوع شود. □

تعریف ۱۲.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. اگر $|G| = p^\alpha m$ که $(p,m) = 1$ ، آن‌گاه یک زیرگروه از G که دارای مرتبه p^α است، $p-$ زیرگروه سیلوی گروه G نامیده می‌شود. در واقع این زیرگروه یک $p-$ زیرگروه ماکسیمال G است.

$p-$ زیرگروه‌های سیلو همواره وجود دارند، گرچه ممکن است بدیهی باشند و هر $p-$ زیرگروه مشمول یک $p-$ زیرگروه سیلو است.

قضیه ۱۳.۱. فرض کنیم P یک $p-$ زیرگروه سیلو از گروه متناهی G باشد، اگر $N \trianglelefteq G$ آن‌گاه $(PN)/N$ یک $p-$ زیرگروه سیلوی G/N است.

اثبات. به صفحه‌ی ۴۰ از [۱۴] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. H یک زیرگروه هال [۲] از G نامیده می‌شود، اگر مرتبه‌ی H نسبت به $|G:H|$ اول باشد.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و $K \leq G$ باشد. زیرگروه H از G را یک متمم [۳] در G گوییم، هرگاه $G = HK$ و $H \cap K = 1$.

---

[۲] Hall subgroup

[۳] Complement

تعریف ۱.۱۶. زیرگروه H از گروه G یک $p-$ متمم هال از گروه G نامیده می‌شود، هرگاه

(۱) H زیرگروه هال از گروه G باشد.

(۲) $p-$ زیرگروه سیلویی چون P از G وجود داشته باشد به طوری که $P \cap H = ۱$ و $G = HP$.

تعریف ۱.۱۷. فرض کنید G یک گروه و K و H زیرگروه‌های G باشند به طوری که

(۱) $H \trianglelefteq G$

(۲) $K \cap H = ۱$

(۳) $G = KH$

در این صورت G را حاصل‌ضرب نیم مستقیم H توسط K می‌نامیم و با نماد $G = K \ltimes H$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۱۸. فرض کنید H و K دو گروه و $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ یک همریختی است. همچنین فرض کنید $K \ltimes_{\varphi} H$ مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب $(k,h) \in K \times H$ است که در آن قانون زیر تعریف شده است

$$(k_۱, h_۱)(k_۲, h_۲) = (k_۱ k_۲, \varphi_{k_۲}(h_۱) h_۲)$$

در این صورت $K \ltimes_{\varphi} H$ تشکیل یک گروه می‌دهد و حاصل‌ضرب نیم مستقیم خارجی نامیده می‌شود.

اثبات. به صفحه‌ی ۲۷ از [۱۴] رجوع شود. $\square$

گزاره ۱.۱۹. گروه $G = K \ltimes_{\varphi} H$ تعریف شده در گزاره‌ی (۱.۱۸) دارای زیرگروه‌های $H^* \cong H$ و $K^* \cong K$ است به طوری که

$$H^* \trianglelefteq G, H^* \cap K^* = ۱, G = H^* K^*$$

یعنی G حاصل‌ضرب نیم مستقیم H^* توسط K^* است.

اثبات. به صفحه‌ی ۲۸ از [۱۴] رجوع شود. $\square$

قضیه ۱.۲۰. فرض کنید H و K زیرگروه‌هایی از یک گروه دلخواه G باشند.

(۱) $|HK||H \cap K| = |H||K|$. بنابراین اگر H و K متناهی باشند، آن‌گاه

$$|H : H \cap K| = |HK|/|K|.$$

(۲) $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$. تساوی برقرار است، اگر $|G : H|$ و $|G : K|$ متناهی و نسبت به هم اول باشند.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۴ از [۱۴] مراجعه کنید. □

لم ۲۱.۱. (ددکیند) [۴] فرض کنید X و Y و H زیرگروه‌هایی از یک گروه باشند که $X \subseteq H$ در این صورت

$$H \cap (XY) = X(H \cap Y).$$

اثبات. به صفحه‌ی ۱۵ از [۱۴] مراجعه کنید. □

نتیجه ۲۲.۱. اگر X و Y و H زیرگروه‌هایی از یک گروه باشند و $X \subseteq H \subseteq XY$ آن‌گاه

$$H = X(H \cap Y).$$

اثبات. بنا به لم ددکیند داریم

$$H \cap (XY) = X(H \cap Y)$$

از طرفی چون $H \subseteq XY$ پس

$$H = X(H \cap Y)$$

□

لم ۲۳.۱. (فیتینگ) [۵] فرض کنید A از طریق خودریختی‌ها روی یک گروه آبلی G عمل کند و فرض کنید A و G متناهی و $(|G|, |A|) = ۱$. در این صورت

$$G = C_G(A) \times [G, A].$$

اثبات. به صفحه‌ی ۱۴۱ از [۱۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۴.۱. اگر p یک عدد اول باشد، آن‌گاه یک p -گروه آبلی مقدماتی یک گروه متناهی G یکریخت با

$$\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p$$

است.

---

[۴] Dedekind

[۵] Fitting

تعریف ۱.۲۵. اگر V یک فضای برداری n -بعدی روی میدان K باشد. آن‌گاه گروه خطی عام [۶] $GL(V)$ گروه تمام تبدیلات خطی وارون‌پذیر روی V نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲۶. اگر K یک میدان باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر (غیرتکین) با درایه‌های در K یک گروه است و با $GL(n, K)$ نشان داده می‌شود و آن را نیز گروه خطی عام نامند.

در واقع خواهیم داشت

$$GL(n, K) \cong GL(V).$$

توجه داشته باشید اگر $K = \mathbb{Z}_p$ باشد، آن‌گاه $GL(n, K)$ رابا $GL(n, p)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۲۷. فرض کنید G یک p -گروه آبلی مقدماتی باشد. در این صورت G یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{Z}_p$ است.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۴۳ از [۱۵] رجوع شود. □

نتیجه ۱.۲۸. اگر V یک p -گروه آبلی مقدماتی باشد، آن‌گاه G روی V به عنوان یک گروه از تبدیلات خطی عمل می‌کند.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۰۶ از [۱۶] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۲۹. هر گروه آبلی با تولید متناهی G مساوی (یکریخت با) مجموع مستقیم متناهی گروه‌هایی دوری است که هر یک نامتناهی یا از مرتبه‌ی توانی از یک عدد اول است.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۱۸ از [۸] مراجعه کنید. □

گزاره ۱.۳۰. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه نرمالی از آن باشد که دارای مرتبه‌ی ۲ است. در این صورت H در G مرکزی است.

اثبات. چون زیرگروه H دارای مرتبه‌ی ۲ است، پس $H = \{1, h\}$ و $h^{-1} = h$.
حال $h \in H$ در نظر می‌گیریم. چون $H \trianglelefteq G$ ، پس برای هر $g \in G$ داریم $g^{-1}hg \in H$. اگر $g^{-1}hg = h$ آن‌گاه $hg = gh$ و اگر $g^{-1}hg = 1$ آن‌گاه $hg = g$ ، پس $h = 1$ و لذا می‌توان نتیجه گرفت که H در G مرکزی است. □

[۶] General linear group

تعریف ۳۱.۱. فرض کنید x و y عناصر دلخواه گروه G باشند. جابه‌جاگر x و y و مزدوج x توسط y را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$$

$$x^y=y^{-1}xy$$

در حالت کلی یک جابه‌جاگر ساده از وزن n مرتب شده از چپ به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[x_1,x_2,...,x_n]=[[x_1,x_2,...,x_{n-1}],x_n] \ \ n\geqslant 2$$

که x_i جابه جاگر از وزن یک می‌باشد.

تعریف ۳۲.۱. فرض کنید X_1 و X_2 دو زیرمجموعه غیرتهی از گروه G باشند، زیرگروه جابه‌جاگر X_1 و X_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[X_1,X_2]=\langle [x_1,x_2] | x_1\in X_1, x_2\in X_2\rangle$$

به ویژه $G'=[G,G]$ زیرگروه جابه‌جاگر گروه G است که به آن زیرگروه مشتق گروه G گوییم.
به‌علاوه هرگاه $X_1,X_2,...,X_n$ که $(n\geqslant 2)$ زیرمجموعه‌های غیرتهی از گروه G باشند، زیرگروه جابه‌جاگر $X_1,X_2,...,X_n$ به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[X_1,X_2,...,X_n]=[[X_1,X_2,...,X_{n-1}],X_n]$$

جابه‌جاگر $[X_1,X_2,X_2,...,X_2]$ که X_2 ، n مرتبه تکرار شده باشد را با نماد $[X_{1,n}X_2]$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳۳.۱. فرض کنید G یک گروه و x و y و z و t عناصر دلخواهی از گروه G باشند. در این صورت

(۱) $[x,y]=[y,x]^{-1}$, $x^y=x[x,y]$.

(۲) $[x,y^{-1}]=[y,x]^{y^{-1}}$, $[x^{-1},y]=[y,x]^{x^{-1}}$.

(۳) $[x,y]^z=[x^z,y^z]$, $([x,y]^z)^t=[x,y]^{zt}$.

(۴) $[xy,z]=[x,z]^y[y,z]$, $[x,yz]=[x,z][x,y]^z$.

(۵) $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x=1$, $[y,x,z^y][z,y,x^z][x,z,y^x]=1$.

اتحادهای قسمت (۴) را اتحادهای هال [7] و اتحادهای قسمت (۵) را اتحادهای هال- ویت [8] می‌نامند.

[7] Hall identities

[8] Hall-Witt identities

اثبات. به فصل ۵ از [۱۴] مراجعه شود. □

قضیه ۳۴.۱. فرض کنید H و K و L زیرگروه‌هایی از گروه دلخواه G باشند، در این صورت

(۱) $[H,K]=[K,H]$.

(۲) اگر $H \trianglelefteq G$ آن‌گاه $[H,G] \trianglelefteq H$.

(۳) اگر $H,K \trianglelefteq G$ ، آن‌گاه $[H,K] \trianglelefteq G$.

(۴) اگر $K \trianglelefteq G$ و $K \leq H$ ، آن‌گاه $H/K \leq Z(G/K)$ اگر وتنها اگر $[H,G] \leq K$.

(۵) اگر $H,K,L \trianglelefteq G$ ، آن‌گاه

$$[HK,L]=[H,L][K,L] \quad , \quad [H,KL]=[H,K][H,L].$$

(۶) اگر $H_۱$ و $K_۱$ زیرگروه‌هایی از G باشند، به طوری که $H_۱ \subseteq H$ و $K_۱ \subseteq K$ آن‌گاه

$$[H_۱,K_۱] \subseteq [H,K].$$

(۷) $[H,K]=۱$ اگر و تنها اگر H عنصروار با K جابه‌جا شود.

اثبات. به سادگی از تعریف (۳۲.۱) و قضیه‌ی (۳۳.۱) نتیجه می‌شود. □

قضیه ۳۵.۱. فرض کنید N زیرگروهی نرمال از گروه دلخواه G باشد. قرار می‌دهیم $\overline{G}=G/N$. در این صورت برای زیرگروه‌های H و K از G داریم

$$[\overline{H},\overline{K}]=[H,K]N/N.$$

اثبات. به صفحه‌ی ۳ از [۱۷] مراجعه شود. □

قضیه ۳۶.۱. هرگاه G گروه باشد، آن‌گاه G' زیرگروه نرمالی از G است و G/G' آبلی می‌باشد. هرگاه N زیرگروه نرمالی از G باشد. آن‌گاه G/N آبلی است اگر و فقط اگر N شامل G' باشد.

اثبات. به صفحه‌ی ۱۰۲ از [۸] رجوع شود. □