بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

توزیع فرم‌های درجه دوم تحت شرایط چوله-نرمال

سخنران: عدنان ولی زاده

زمان: چهارشنبه ۲۳/ ۱۲/ ۹۱ ساعت ۱۱ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱- دکتر سروش علیمرادی

۲- دکتر سعید پولادساز

۳- دکتر صفیه محمودی

۴- دکتر محمد حسین علامت ساز

۵- دکتر افشین پرورده

چکیده

علاقه‌ی فزاینده‌ای در ادبیات آماری به خانواده‌های پارامتری از توزیع‌ها وجود دارد که از توزیع نرمال انحراف داشته باشند، ولی تا آنجا که امکان دارد با تنظیم یک پارامتر مناسب به این توزیع نزدیک شوند. انگیزه‌ی این تلاش‌ها این است که تا آنجا که ممکن است خانواده‌های قابل انعطاف‌تری از توزیع‌ها را معرفی کنند به طوری که این خانواده از توزیع‌ها تا آنجا که ممکن است خود را با داده‌های واقعی وفق دهند و برازش مناسبی برای آن‌ها باشند. یکی از این توزیع‌ها که اخیراً معرفی شده و مورد توجه قرار گرفته است و خواصی مشابه با توزیع نرمال دارد به توزیع چوله-نرمال معروف شده است. در این پایان نامه بر اساس مقاله وانگ و همکاران کلاسی از توزیع‌های چوله-نرمال که تحت تبدیلات خطی بسته هستند، معرفی می‌شود. سپس بر اساس شرایط چوله-نرمال چند متغیره زمانی که $\mu \neq \mathbf{0}$ توزیع چوله کای-دوی نامرکزی را معرفی کرده و خواصی از فرم‌های درجه دوم را نیز بررسی خواهیم کرد.

رده بندی موضوع: ۶۲H۱۰, ۶۲E۱۷

واژگان کلیدی: چوله-نرمال، توزیع چوله-نرمال چندمتغیره، توزیع چوله‌ی کای-دوی نامرکزی، فرم‌های درجه دوم، توزیع چوله‌ی کای-دوی نامرکزی تعمیم یافته

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

توزیع فرم‌های درجه دوم تحت شرایط چوله-نرمال

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

عدنان ولی زاده

اساتید راهنما

دکتر سروش علیمرادی

دکتر سعید پولادساز

دکتر صفیه محمودی

اسفند ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی آقای عدنان ولی زاده
تحت عنوان

توزیع فرم‌های درجه دوم تحت شرایط چوله-نرمال

در تاریخ ۲۳ /۱۲ /۹۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– اساتید راهنما	دکتر سروش علیمرادی
۲– اساتید راهنما	دکتر سعید پولادساز
۳– اساتید راهنما	دکتر صفیه محمودی
۴– استاد داور۱	دکتر محمد حسین علامت ساز
۵– استاد داور۲	دکتر افشین پرورده

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر حمید رضا ظهوری زنگنه

اهدا ییه

باسپاس از سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

سپاس گزاری

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گذاردن نتوانند. و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است، ونفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین. برحسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّو جل":

از پدر و مادر عزیزم.... این دو معلم بزرگوارم.... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی چشمداشت برای من بوده‌اند.

از اساتید با کمالات و شایسته، جناب آقایان دکتر سروش علیمرادی و دکتر سعید پولادساز و سرکار خانم دکتر صفیه محمودی که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند.

از اساتید فرزانه و دلسوز، جناب آقایان دکتر محمد حسین علامت‌ساز و دکتر افشین پرورده که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

امیدوارم بتوانم از عهده ادای حق این عزیزان برآیم.

اسفند ۱۳۹۱

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

چکیده

علاقه‌ی فزاینده‌ای در ادبیات آماری به خانواده‌های پارامتری از توزیع‌ها وجود دارد که از توزیع نرمال انحراف داشته باشند، ولی تا آنجا که امکان دارد با تنظیم یک پارامتر مناسب به این توزیع نزدیک شوند. انگیزه‌ی این تلاش‌ها این است که تا آنجا که ممکن است خانواده‌های قابل انعطاف‌تری از توزیع‌ها را معرفی کنند به طوری که این خانواده از توزیع‌ها تا آنجا که ممکن است خود را با داده‌های واقعی وفق دهند و برازش مناسبی برای آن‌ها باشند. یکی از این توزیع‌ها که اخیراً معرفی شده و مورد توجه قرار گرفته است و خواصی مشابه با توزیع نرمال دارد به توزیع چوله-نرمال معروف شده است. در این پایان نامه بر اساس مقاله وانگ و همکاران کلاسی از توزیع‌های چوله-نرمال که تحت تبدیلات خطی بسته هستند، معرفی می‌شود. سپس بر اساس شرایط چوله-نرمال چند متغیره زمانی که $\mu \neq \mathbf{0}$ توزیع چوله کای-دوی نامرکزی را معرفی کرده و خواصی از فرم‌های درجه دوم را نیز بررسی خواهیم کرد.

رده بندی موضوع: $62E17, 62H10$

واژگان کلیدی: چوله-نرمال، توزیع چوله-نرمال چندمتغیره، توزیع چوله‌ی کای-دوی نامرکزی، فرم‌های درجه دوم، توزیع چوله‌ی کای-دوی نامرکزی تعمیم یافته

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ مقدمه

معمولاً تحلیل‌های آماری با فرض نرمال بودن داده‌ها صورت می‌گیرد، در حالی که در عمل در بسیاری از موارد توزیع داده‌ها نامتقارن بوده و دیگر نمی‌توان از توزیع نرمال برای تحلیل آن‌ها استفاده کرد. در چند دهه اخیر معرفی و ساخت توزیع‌های چوله جدید یکی از کارهای مورد علاقه آماردانان شده است. اصطلاح توزیع چوله-نرمال (SN) به کلاس پارامتری از توزیع‌های احتمال اطلاق می‌شود که توزیع نرمال را با استفاده از یک پارامتر اضافی(پارامتر شکل) که چولگی را تنظیم می‌کند توسعه می‌دهد. دو دلیل عمده منجر به مطالعه تابع چگالی چوله-نرمال شد. اول شرایط مطلوبی از کلاس پارامتری توزیع‌هایی بود که رابطه پیوسته‌ای مابین حالات نرمال و غیر نرمال ایجاد می‌کردند و دلیل دوم تحقیقات انجام شده توسط هیل و دیکسون [۲۱] در سال ۱۹۸۲ بود که ثابت کردند که توزیع داده‌های واقعی در کاربرد اغلب چوله هستند، اما در بسیاری از مواقع این چولگی را نادیده گرفته و عملاً توزیع را نرمال می‌گیریم.

از دیدگاه کاربردی، توزیع چوله-نرمال برای تجزیه و تحلیل داده‌هایی که نمایش دهنده‌ی توزیع‌های تجربی با مقداری چولگی هستند مناسب است و از دیدگاه نظری دارای تعداد زیادی از خواص جالب است که برخی از آنها مشابه با خواص توزیع نرمال است و به گونه‌ای عنوان چوله-نرمال را توجیه می‌کنند.

اولین بار کلاس توزیع‌های چوله-نرمال توسط آزالینی [۵] در سال ۱۹۸۵ مطرح شد. او تابع چگالی احتمال جدیدی را معرفی کرد که از حاصلضرب توابع چگالی و توزیع متغیرهای تصادفی متقارن به دست می‌آید. انگیزه‌ی اصلی او برای معرفی این خانواده از توزیع‌ها یافتن کلاس جدیدی از توزیع‌ها بود که

۱) شامل توزیع نرمال باشد.

۲) فرم تابع چگالی آن ساده باشد.

۳) دامنه وسیعی از چولگی و کشیدگی را داشته باشد.

یک سال بعد او به معرفی کلاس پارامتری از چگالی‌ها پرداخت که فهرست بیشتری از چگالی‌ها از جمله چوله-نرمال را در بر می‌گرفت و پس از آن او در سال ۱۹۹۶ به کمک دالا واله [۹] چگالی چوله-نرمال را از یک متغیره به چندمتغیره تعمیم داد. در عین حال آزالینی و کاپیتانیو [۷] در سال ۱۹۹۹ خاصیت احتمالی بیشتری از این توزیع را مورد بررسی قرار دادند و همچنین به بررسی مناسب‌ترین جنبه‌های آماری آن پرداختند.

در زمینه اقتصاد سنجی آیگنر و اسمیت [۳] در سال ۱۹۷۷ جزو اولین کسانی بودند که ارتباط قوی بین کلاس توزیع‌های چوله-نرمال و مدل مرز تصادفی برای تحلیلی از کارایی شرکت‌ها را نشان دادند. هنز [۲۰] در سال ۱۹۸۶ فرم بسته‌ای را برای گشتاورهای توزیع چوله-نرمال در حالت یک پارامتری به دست آورد. آرنولد، بیاور ، گرونویلد و میکر [۴] در سال ۱۹۹۳ کاربردی از توزیع چوله-نرمال را برای داده‌های روانسنجی به کار بردند. برخی کاربردهای دیگر از کلاس توزیع‌های چوله-نرمال شامل مقاله‌هایی از لویس و بلن من [۲۳] در سال ۱۹۹۹ ، کایودیل [۱۱] در سال ۱۹۹۳ و پولاچک و روبست [۲۶] در سال ۱۹۹۸ به ترتیب درباره تحلیلی از بازارهای مالی، بازار املاک و بازار کار بود. بال و مانکیو [۱۰] در سال ۱۹۹۵ توزیع چوله-نرمال را به عنوان یک انتخاب طبیعی برای توزیعی از تغییرات نسبی قیمت که نرخ تورم را تحت تأثیر قرار می‌دهد بدست آوردند. کوپاس و لی [۱۲] در سال ۱۹۹۷ ارتباط این توزیع را با مسأله انتخاب نمونه نشان دادند. ادکاک و شیوتس [۲] در سال ۲۰۰۱ یک بیان نظری از یک مدل براساس چوله-نرمال چندمتغیره برای انتخاب پرتفولیو ارائه کردند. گاپتا و چن [۱۸] در سال ۲۰۰۱ آزمون نیکویی برازش را برای توزیع چوله-نرمال یک پارامتری مطرح کردند. جنتون و لوپرفیدو [۱۵] در سال ۲۰۰۲ توزیع‌های چوله-بیضی تعمیم یافته را تعریف کردند. آزالینی و کاپیتانیو [۸] در سال ۲۰۰۳ یک تعمیم برای توزیع‌های t چوله پیشنهاد دادند. ساتوری [۲۷] در سال ۲۰۰۶ درباره‌ی برآورد پارامتر شکل توزیع چوله-نرمال و مشکلات مربوط به برآورد این پارامتر به بحث پرداخت. همچنین جنتون و همکاران [۱۷] توزیع‌های چوله-متقارن را بررسی کردند. در این پایان‌نامه بر اساس مقاله وانگ و همکاران [۳۰] کلاسی از توزیع‌های چوله-نرمال را که تحت تبدیلات خطی بسته هستند، معرفی می‌کنیم. سپس بر اساس شرایط چوله-نرمال چند متغیره زمانی که $\mu \neq \mathbf{0}$ توزیع چوله-کای دوی نامرکزی را معرفی کرده و خواصی از فرم‌های درجه دوم را نیز بررسی خواهیم کرد. این پایان نامه از ۵ فصل تشکیل شده است، در فصل دوم به مفاهیم و پیش‌نیازها پرداخته می‌شود. در فصل سوم توزیع چوله-نرمال و خواص آن و همچنین فرم‌های درجه دوم از این تابع چگالی و توزیع چوله-کای دوی نامرکزی بدست آمده بر اساس آن‌را بیان خواهیم کرد. در فصل چهارم توزیع تابعی از متغیرهای چوله-نرمال معروف به فرم درجه دوم را معرفی خواهیم کرد. و در پایان در فصل پنجم نسخه‌ای جدید از قضیه کاکران را بر اساس شرایط چوله-نرمال بیان خواهیم کرد.

فصل ۲

مفاهیم و پیش نیازها

در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیم به کار رفته در این پایان‌نامه بیان می‌شود.

۱.۲ توزیع‌های چوله-متقارن

توزیع چوله-نرمال را می‌توان به عنوان موردی خاص از یک کلاس گسترده‌تر از توزیع‌ها ملاحظه کرد. این کلاس، کلاسی از توزیع‌های چوله-متقارن می‌باشد که در این بخش به معرفی آن می‌پردازیم. قبل از بیان این توزیع، ابتدا تابع چولگی را معرفی می‌کنیم. [۲۹]

تعریف ۱.۱.۲

تابع $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow [۰,۱]$ را تابع چولگی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\pi(x) + \pi(-x) = ۱$$

▲

با این تعریف هر تابع توزیع متقارن حول صفر، یک تابع چولگی است در حالی که هر تابع چولگی یک تابع توزیع نیست زیرا ممکن است غیر صعودی باشد. برای مثال اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، قرار دهیم $\pi(x) = \frac{۱}{۲}$ ، نتیجه می‌گیریم که $\pi(x) + \pi(-x) = ۱$ در حالی که $\pi(x) = \frac{۱}{۲}$ تابع توزیع نمی‌باشد ولی غیر صعودی است.

حال می‌توان ساختار کلی توزیع‌های چوله-متقارن را تعریف کرد.

تعریف ۲.۱.۲

متغیر تصادفی X دارای توزیع چوله-متقارن است هرگاه تابع چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$h(x) = ۲f(x)\pi(x) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{۱.۲}$$

که در آن π تابع چولگی و f هر تابع چگالی پیوسته‌ی متقارن حول صفر است. ▲

اگر $\pi(x) = \frac{1}{2}$ و $x \in \mathbb{R}$، آنگاه تابع چگالی (۱.۲) به تابع چگالی f که متقارن است تبدیل می‌شود. به بیان دیگر تابع چگالی (۱.۲) تابع چگالی متقارن f را به عنوان عضوی خاص در بر می‌گیرد، اما به ازای هر تابع غیر ثابت π، تابع چگالی (۱.۲) متقارن نیست. [۲۹]

۲.۲ توزیع نرمال چند متغیره

در این بخش به تعریف و خواص توزیع نرمال چند متغیره می‌پردازیم. [۱۳]

۱.۲.۲ چگالی نرمال چند متغیره

چگالی نرمال چند متغیره تعمیمی از چگالی نرمال یک متغیره با بعد $k > 1$ است.

تعریف ۱.۲.۲

اگر بردار تصادفی $X_{k\times 1}$ دارای تابع چگالی

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\mu))$$

باشد، می‌گوییم X دارای توزیع نرمال k متغیره با میانگین μ و واریانس کواریانس Σ است و اصطلاحاً می‌نویسیم $X \sim N_k(\mu, \Sigma)$. ▲

۲.۲.۲ خواص توزیع نرمال چند متغیره

در اینجا برخی از خواص توزیع نرمال چند متغیره ارائه می‌شود. [۱۳]

قضیه ۲.۲.۲

اگر $\mathbf{X} \sim N_k(\mu, \Sigma)$ آنگاه تابع مولد گشتاورهای آن برابر است با:

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(\mathbf{t}'\mu + \frac{1}{2}\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})$$

قضیه ۳.۲.۲

فرض کنید $\mathbf{Y}$ یک بردار تصادفی $k \times 1$ و دارای توزیع $N_k(\mu, \Sigma)$ ، $\mathbf{a}$ یک بردار $k \times 1$ از ثابت‌ها و $\mathbf{A}$ یک ماتریس $p \times k$ با رتبه p ، $p \leq k$ باشد. آنگاه:

(الف) $z = \mathbf{a}'\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{a}'\mu, \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a})$.

ب) $\mathbf{Z} = \mathbf{AY} \sim N_p(\mathbf{A}\mu, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$.

نتیجه ۴.۲.۲

اگر $\mathbf{b}$ برداری $p \times ۱$ از ثابت‌ها باشد، آنگاه:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{AY} + \mathbf{b} \sim N_p(\mathbf{A}\mu + b, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}') \tag{۲.۲}$$

۳.۲ توزیع نیم نرمال

فرض کنید X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه $Y = \pm|X|$ دارای توزیع نیم-نرمال با تابع چگالی زیر است:

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \exp(-\frac{y^۲}{۲})$$

۴.۲ توزیع کای دوی نامرکزی

برای معرفی توزیع کای دوی نامرکزی، فرض کنید $Z_۱, ..., Z_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد $N(۰,۱)$ باشد. چون Z_iها مستقل‌اند و هر Z_i نرمال استاندارد می‌باشد، بنابراین بردار تصادفی $\mathbf{Z} = (Z_۱, Z_۲, ..., Z_n)'$ دارای توزیع $N_n(۰, \mathbf{I})$ می‌باشد. با استفاده از تعریف داریم:

$$U = \Sigma_{i=۱}^n Z_i^۲ = \mathbf{Z}'\mathbf{Z} \sim \chi^۲(n)$$

یعنی مجموع مربعات n متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد دارای توزیع کای-دو(مرکزی) با n درجه آزادی است. در این‌صورت:

$$E(U) = n \qquad , \qquad ,Var(U) = ۲n \qquad , \qquad M_U(t) = \frac{۱}{(۱-۲t)^{\frac{n}{۲}}}, \quad t < \frac{۱}{۲}$$

اکنون فرض کنید که $Y_۱, ..., Y_n$ مستقل و $Y_i \sim N(\mu_i, ۱)$ باشد. در این‌صورت بردار تصادفی $\mathbf{Y} = (Y_۱, ..., Y_n)$ دارای توزیع $N_n(\mu, \mathbf{I})$ است، که در آن $\mu = (\mu_۱, \mu_۲, ..., \mu_n)'$ است.

در این حالت $V = \Sigma_{i=۱}^n Y_i^۲ = \mathbf{Y}'\mathbf{Y}$ دارای توزیع کای-دوی نامرکزی بوده و با نماد $\chi^۲(n, \lambda)$ نشان داده می‌شود. پارامتر نامرکزی λ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = \frac{۱}{۲}\Sigma_{i=۱}^n \mu_i^۲ = \frac{۱}{۲}\mu'\mu$$

مشابه توزیع کای دوی مرکزی شاخص‌های مربوطه عبارتند از:

$$E(V) = n + ۲\lambda \quad , \quad Var(V) = ۴n + ۸\lambda \quad , \quad M_V(t) = \frac{۱}{(۱-۲t)^{\frac{n}{۲}}} \exp(\frac{۲\lambda t}{۱-۲t}), t < \frac{۱}{۲}$$

۵.۲ فرم‌های درجه دوم در متغیرهای نرمال چند متغیره

در این بخش برخی نتایج را در ارتباط با توزیع فرم‌های درجه دوم بیان خواهیم کرد. [۲۸]

فرض کنید $\mathbf{Y} \sim N_k(\mu, \Sigma)$ به طوری که Σ معین مثبت است. علاقه‌مندیم توزیع فرم‌های درجه دوم

$$\mathbf{Y'AY} = \Sigma_{i=۱}^{k} \Sigma_{j=۱}^{k} a_{ij} Y_i Y_j$$

را به دست آوریم، که در آن $\mathbf{A}$ یک ماتریس متقارن است. در این حالت یک ماتریس متعامد $\mathbf{T}$ و یک ماتریس قطری $\mathbf{D}$ وجود دارد به طوری که

$$\mathbf{T'AT} = \mathbf{D} = Diag(\lambda_۱, ..., \lambda_k)$$

که در آن عناصر λ_i مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ هستند.

اگر $\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k)$ باشد، آنگاه $\mathbf{Z} = \mathbf{T'Y}$ نیز دارای توزیع $N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k)$ است. بنابراین:

$$Q = \mathbf{Y'AY} = \mathbf{Y'TDT'Y} = \mathbf{Z'DZ} = \Sigma_{i=۱}^{k} \lambda_i Z_i^۲ \quad (۳.۲)$$

به عبارت دیگر $\mathbf{Y'AY}$ یک ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی $\chi_۱^۲$ مستقل است. اگر r تا از مقادیر ویژه d_i برابر ۱ و بقیه صفر باشند، آنگاه Q دارای توزیع $\chi_r^۲$ است.

قضیه ۱.۵.۲

فرض کنید $\mathbf{A}$ یک ماتریس متقارن باشد آنگاه $\mathbf{A}$ دارای r مقدار ویژه یک و بقیه صفر می‌باشد اگر و تنها اگر $\mathbf{A}^۲ = \mathbf{A}$ و $\mathbf{A}$ دارای رتبه r باشد.

قضیه ۲.۵.۲

فرض کنید $\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k)$ و $\mathbf{A}$ یک ماتریس متقارن باشد، آنگاه $\mathbf{Y'AY} \sim \chi_r^۲$ اگر و تنها اگر $\mathbf{A}$ خودتوان و از رتبه r باشد.

نتایج فوق را به توزیع فرم‌های درجه دوم وقتی که ماتریس واریانس کواریانس Σ، نیمه معین مثبت باشد تعمیم می‌دهیم. اکنون فرض می‌کنیم که $\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma)$ باشد به طوری که Σ دارای رتبه s $(s \leq k)$ است. آنگاه توزیع $\mathbf{Y}$ از تعریف زیر به دست می‌آید.

تعریف ۳.۵.۲

بردار تصادفی $\mathbf{Y} \in M_{k\times1}$ دارای توزیع نرمال چند متغیره، با میانگین μ و ماتریس کواریانس Σ که معین مثبت است، می‌باشد اگر هم توزیع با بردار $\mathbf{RZ} + \mu$ باشد به طوری که $\mathbf{R}$ یک ماتریس $k \times s$ باشد و $\Sigma = \mathbf{RR}'$ و $\mathbf{Z} \sim N_s(\mathbf{0}, \mathbf{I}_s)$ است. ▲

قضیه ۴.۵.۲

فرض کنید که $\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma)$ و $\mathbf{A}$ متقارن باشد. آنگاه $\mathbf{Y}'\mathbf{AY}$ دارای توزیع χ^2_r است اگر و تنها اگر r تا از مقادیر ویژه $\mathbf{A}\Sigma$ یک و بقیه صفر باشند.

هرگاه Σ و (از اینرو $\mathbf{R}$)پر رتبه باشند آنگاه $\mathbf{R}'\mathbf{AR}$ و در نتیجه $\mathbf{A}\Sigma$ ، خودتوان است.

نتیجه ۵.۵.۲

اگر $\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma)$ به طوری که Σ معین مثبت است و فرض می‌کنیم $\mathbf{A}$ یک ماتریس متقارن باشد، آنگاه $\mathbf{Y}'\mathbf{AY}$ دارای توزیع χ^2_r است اگر و تنها اگر $\mathbf{A}\Sigma$ خودتوان و از رتبه r باشد.