بسم اللّه الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و همیشه همراهم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی حل‌های فضای متقارن کروی در گرانش تصحیح یافته

از:

مریم احمدی

استاد راهنما:

دکتر رضا صفاری

بهمن ۱۳۹۰

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک (گرایش نظری)

بررسی حل‌های فضای متقارن کروی در گرانش تصحیح یافته

از:

مریم احمدی

استاد راهنما:

دکتر رضا صفاری

بهمن ۱۳۹۰

The University of Guilan

Faculty of sciences

Department of Physics

Reviwing of Spherically symmetric solutions in Modified gravity

By:

Maryam Ahmadi

Supervisor:

Dr. Reza Saffari

February, 2012

تشکر و قدردانی

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر رضا صفاری که در طول انجام این پایان‌نامه مرا از راهنمایی‌های خود بهره‌مند ساختند، تشکر و قدردانی می نمایم چرا که بدون راهنمایی‌های ایشان تهیه این پایان نامه میسر نمی‌بود.

از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر حسین پناهی و جناب آقای دکتر عطا الله سجاسی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، سپاسگزاری می‌نمایم.

از نماینده تحصیلات تکمیلی و مدیر گروه محترم جناب آقای دکتر سعید مهدوی‌فر، که افتخار شاگردی ایشان را داشتم، کمال سپاس را دارم.

از پدر و مادر عزیزم که همواره در طول زندگی و دوران تحصیل همراه و پشتیبان من بودند، بی‌نهایت سپاسگزارم.

در پایان از دوستان خوبم و از همه کسانی که مرا یاری کردند و همراه من بودند متشکرم و از خداوند منان برای تمامی این عزیزان توفیق روزافزون را خواهانم.

چکیده

بررسی حل‌های فضای متقارن کروی در گرانش تصحیح یافته

مریم احمدی

عدم توانایی مدل استاندارد کیهان شناسی در توجیه بعضی داده های رصدی در سال های اخیر، از قبیل انبساط شتابدار کیهان تبدیل به یکی از اساسی ترین مشکلات پیش روی کیهان شناسان و فیزیک دانان شده است و اعتبار این مدل را زیر سؤال برده است .در حال حاضر، طیف وسیعی از کیهان شناسان به بررسی روش های مختلف برای توضیح این مسائل می‌پردازند.

در این پایان نامه ، ابتدا مروری بر چند رهیافت مهم در میان روش های موجود می کنیم: وارد کردن ثابت کیهان‌شناسی در معادلات اینشتین، فرض وجود میدان نرده‌ای کوئینتسنس به عنوان مولد انرژی تاریک وگرانش تصحیح یافته. هدف این پایان نامه، مطالعه تفصیلی شیوه آخر است که با نام گرانش تصحیح یافته‌ی $f(R)$ شناخته می شود و به شیوه ای بنیادین قصد تغییر گرانش اینشتینی و جایگزینی آن با نظریه ای کلی تر را دارد. نظریه‌ی گرانش $f(R)$ در رویکرد متریکی و پالاتینی بررسی می‌شود. سپس فضای متقارن کروی در گرانش تعمیم‌یافته و چند روش متداول برای بدست آوردن جواب‌های این فضا را معرفی و به طور مفصل بررسی می‌کنیم. همچنین به بررسی سازگاری جواب‌های فضای متقارن کروی در گرانش تصحیح یافته‌ی $f(R)$ می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: نسبیت عام، مدل استاندارد کیهان‌شناسی، انرژی تاریک، گرانش تعمیم یافته، فضای متقارن کروی

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست جدول ها ..... ج

فهرست شکل ها ..... چ

چکیده فارسی ..... ح

چکیده انگلیسی ..... خ

مقدمه ۱

۱. مدل استاندارد کیهان‌شناسی و مشکلات آن..... ۳

۱-۱ مقدمه ۳

۱-۲ نسبیت عام ۵

۱-۳ معادلات میدان گرانشی آینشتاین ۵

۱-۴ مدل استاندارد کیهان‌شناسی ۶

۱-۵ رهیافت‌های انرژی تاریک ۹

۱-۶ پیدایش نظریه‌های جایگزین ۱۴

۲. نظریه گرانش تعمیم یافته‌ی $f(R)$ ۱۶

۲-۱ گرانش تعمیم‌یافته و روابط بنیادی آن ۱۷

۲-۲ رویکرد متریک ۱۸

۲-۳ رویکرد پالاتینی ۲۰

۲-۴ حد نیوتنی نظریه‌های گرانش تعمیم یافته ۲۲

۳. جوابهای فضای متقارن کروی در گرانش $f(R)$ ۲۴

۳-۱ فضای متقارن کروی در نسبیت عام و گرانش $f(R)$ ۲۵

۳-۱-۱ تقارن کروی ۲۵

۳-۱-۲ اسکالر ریچی در تقارن کروی ۲۶

۳-۱-۳ تقارن کروی در گرانش $f(R)$ ۲۸

۳-۱-۴ جواب‌های با اسکالر ریچی ثابت ۲۹

۳-۲ حل معادلات میدان در تقارن کروی با پیشنهاد تابع $F(r)$ ۳۳

۳-۳ حل با مدل پیشنهادی $F(r)=(1+r/d)^{-\alpha}$ ۳۴

۳-۳-۱ مقیاس منظومه شمسی ۳۵

۳-۳-۲ مقیاس کهکشانی ۳۷

۳-۴ حل با پیشنهاد یک دسته جواب به صورت توابعی برای $F(r), X(r), B(r)$ ۴۲

۳-۴-۱ کاربرد در توجیه منحنی تخت سرعت مداری ستارگان ۴۳

۳-۴-۲ هم ارزی با $MOND$ ۴۴

۳-۵ روش اختلالی ۴۵

۳-۶ بررسی سازگاری جواب‌ها ۴۹

۳-۷ جمع‌بندی و پیشنهاد برای ادامه کار..... ۵۳

مراجع ۵۵

فهرست جدول‌ها

جدول ۳-۱: مثال‌هایی از مدل $f(R)$ به ازای اسکالر ریچیِ صفر یا ثابت ۳۲

جدول ۳-۲: دسته‌ای از جواب‌ها که برای چند $f(R)$ به روش اختلالی بدست آمده است ۴۸

فهرست شکل‌ها

شکل۳-۱: سرعت در مکانیک نیوتنی و مدل پیشنهادی در گرانش تصحیح یافته ۴۰

شکل ۳-۲: منحنی سرعت مشاهده شده برای کهکشان *NGC2403* ۴۱

مقدمه

از تولد نسبیت عام نزدیک به یک قرن می‌گذرد و در طول این مدت، این نظریه و نیز کیهان‌شناسی استاندارد ـ که بر مبنای آن بنا شده است ـ به خوبی از عهده‌ی بسیاری از آزمون‌ها برآمده است. امّا در سال‌های اخیر، مشاهدات مربوط به ابرنواخترهای نوع Ia در انتقال به سرخ‌های متفاوت و تابش پس‌زمینه‌ی ریزموج کیهانی، به خوبی زمینه‌ی ایجاد تردید در خوش‌باوری نسبت به درک و شناخت کامل کیهان را به وجود آورده است. آنچه از این داده‌ها بر می‌آید، این است که کیهان در زمان حال، در یک فاز انبساط تندشونده قرار دارد و چگالیِ کل انرژی آن به چگالی بحرانی بسیار نزدیک است. پذیرفتن این فرض نقطه آغاز پرسش مهمی است و آن این است که، عامل ایجاد انبساط تندشونده چیست؟ آنچه بر اهمیت موضوع می‌افزاید این است که این عامل هرچه هست حدود ۷۰ درصد چگالی کل عالم را تشکیل می‌دهد.

از سوی دیگر کیهان شناسان از مدت‌ها پیش می‌دانستند برای اینکه کهکشان‌ها و خوشه‌های کهکشانی پراکنده نشوند، به نیروی گرانشیِ بسیار بیشتر از آن‌چه ماده‌ی مرئی ایجاد می‌کند احتیاج است و این تناقض با گذشت زمان آشکارتر گشت. در سال ۱۹۳۳ زویکی، منجم امریکایی پرده از رازی برداشت که اکنون نیز منجمان در پی چند و چون آن هستند. وی با بررسی حرکت کهکشان ها در خوشه‌ی کما به این نتیجه رسید که جرم درخشان خوشه بسیار کمتر از جرم ویریال قابل محاسبه در آن است[۲،۱]. این تفاوت در بعضی از خوشه‌ها به مقدار شگفت‌آوری در حدود چند صد برابر می‌رسد. پیشنهاد وی وجود نوعی ماده‌ی گمشده در خوشه بود.

در کهکشان‌های مارپیچی هم تغییرات سرعت حرکت دایره‌ای ستارگان داخل کهکشان نسبت به فاصله از مرکزِ آن در تعارض با مکانیک نیوتنی و رابطه‌ی سرعت کپلری است. در سال ۱۹۷۰ روبین با بررسی منحنی سرعت چرخش ستارگان به دور مرکز کهکشان مارپیچی به این نتیجه رسید که جرم درخشان کهکشان بسیار کمتر از جرم موثر در دینامیک ستارگان است. مطابق نظریه‌ی گرانشِ موجود، ثابت ماندن اندازه‌ی این سرعت باید به دلیل وجود جرم عظیمی باشد که گاهی مقدار آن به ده برابر جرم قابل مشاهده‌ی کهکشان نیز می‌رسد[۳-۵].

همچنین یک مورد ناسازگاری در سامانه خورشیدی نیز مشاهده شده است. داده‌هایی که از اکثر کاوش‌گرهای فرستاده شده به خارج از سامانه خورشیدی، به ویژه کاوش‌گرهای پایونیر ۱۰ و ۱۱ دریافت شده‌اند، وجود یک شتاب ثابت خورشیدگرا را گزارش می‌کنند که به آن شتاب ناهنجار پایونیر نیز می‌گویند [۶]. کوشش‌های فراوانی انجام شده تا توجیهی طبیعی در رد وجود این شتاب ارائه کنند، که همگی با شکست مواجه شده است. همین موارد ذکر شده دلیل کافی برای محکم‌تر شدن این ایده را فراهم نمود که جرم قابل مشاهده‌ی عالم تنها چیزی کمتر از ده درصد جرم کل عالم است.

برای توجیه این مسائل کیهان‌شناسان رهیافت‌های متفاوتی را پیشنهاد کردند. ابتدایی‌ترینِ آنها وارد کردن دوباره‌ی ثابت کیهان‌شناسی به معادلات آینشتاین بود، امّا این روش بیشتر از مسائلی که به آن‌ها پاسخ می‌داد، پرسش‌ها و ابهامات جدیدی برمی‌انگیخت.

از این‌رو راه‌حل‌های دیگری مطرح شد. یکی از آن‌ها فرضِ وجود صورت جدیدی از انرژی با ویژگی‌هایی نامتعارف نظیر

فشارِ منفی است که انرژی تاریک نامیده می‌شود و میدان نرده‌ایِ مولد این انرژی را میدان کوئینتسنس[1] [۷] می‌نامند. این رهیافت موفقیت‌های خوبی داشته، گرچه هنوز بعضی پرسش‌های اساسی مربوط به آن بی‌جواب مانده است که مهم‌ترین آن‌ها مربوط به منشأ میدان نرده‌ای است که انرژی آن نقش انرژی تاریک را ایفا می‌کند.

همچنین برای حل مشکل اختلاف بین جرم محاسبه شده و جرم قابل مشاهده، آنچه را که به نظر وجود دارد امّا تاکنون مشاهده نشده است، مادّه‌ی تاریک نامیدند. با به میان آمدن این نوع نامتعارف از مادّه پرسش مشابهی مطرح شد و آن این بود که منشأ مادّه‌ی تاریک چیست؟ پاسخ‌های زیادی در این رابطه مطرح شده امّا برای رسیدن به جواب قطعی هنوز راه درازی در پیش است.

روش دیگری که عدّه‌ای از کیهان‌شناسان انتخاب می‌کنند، ایجاد اصلاحاتی در نسبیت عام است. آنها فرض می‌کنند که نظریه نسبیت عام که آزمایش‌هایی در مقیاس سامانه خورشیدی را با موفقیت پشت‌سر گذاشته، حالتی حدی از یک نظریه گرانشی کلی‌تر است که در مقیاس‌های کیهانی انحرافاتی از نسبیت عام در آن مشاهده می‌شود. نظریه حاصل تحت نام کلی گرانش تعمیم‌یافته شناخته می‌شود، که موضوع اصلی این پایان‌نامه نیز می‌باشد. در این رهیافت آن‌چه مرسوم است، تغییر بخش هندسیِ کنش می‌باشد. این کار به گونه‌ای انجام می‌شود که جواب معادلات میدان در گرانش تصحیح یافته با نتایج مشاهداتی سازگار باشد.

در فصل اول به طور اجمالی پیدایش نسبیت عام و مدل کیهان‌شناسی متدوال در آن (مدل استاندارد کیهان‌شناسی) را معرفی می‌کنیم، سپس به بیان مسائلی می‌پردازیم که عدم موفقیت این مدل در توجیه آن‌ها و یافتن راه‌حل مناسب برای این مشکل تبدیل به یکی از بزرگترین چالش‌های پیش‌روی کیهان‌شناسان در سال‌های اخیر گشته است. در بخش دیگر مربوط به این فصل سه رهیافت معمول برای حل مسئله انرژی تاریک معرفی می‌شود: وارد کردن ثابت کیهان‌شناسی در معادلات آینشتاین، فرض وجود میدان نرده‌ای کوئینتسنس به عنوان مولد انرژی تاریک و تعمیم گرانش. دو مورد اول با تفصیل نسبی بررسی می‌شود و به مورد آخر در فصل‌های بعدی می‌پردازیم. در فصل دوم به ویژگی‌های کلی نظریه‌های گرانش تعمیم‌یافته و مسائل مهم مطرح در آن‌ها می‌پردازیم و توصیفی ریاضی از آن ارائه می‌دهیم. در فصل سوم فضای متقارن کروی در گرانش تعمیم‌یافته را معرفی می‌کنیم و چند روش متدوال برای بدست آوردن جواب‌های این فضا را معرفی و به طور مفصل بررسی می‌کنیم. همچنین به بررسی سازگاری جواب‌های فضای متقارن کروی در گرانش تعمیم یافته $f(R)$ می‌پردازیم.

---

۱. Quintessence.

فصل اول

مدل استاندارد کیهان‌شناسی و مشکلات آن

۱-۱ مقدمه

شاید بتوان گفت که گرانش مهم‌ترین برهمکنشی است که در طبیعت وجود دارد. این برهمکنش اولین برهمکنشی است که مورد توجه بشر قرار گرفت و او را به تفکر وا داشت. اولین کسی که گرانش را به صورت علمی مورد مطالعه قرار داد، گالیله بود. او با ساختن ساده‌ترین ابزار آزمایشی از قبیل آونگ و سطوح شیب‌دار، اندرکنش گرانشی را در معرض تحقیقات تجربی قرار داد. بعد از او نیوتن با معرفی قوانین حرکت و قانون جاذبه عمومی توانست گام اصلی را در پیشرفت گرانش بردارد. او ثابت کرد که نیروی کشش میان اجسام، طبق قانون عکس مجذوری عمل می‌کند وهمچنین مقدار نیروی گرانش میان اجرام آسمانی هم متناسب با عکس مجذور فاصله میان آن‌ها می‌باشد. او با تحلیل ریاضی نشان داد که قانون عکس مجذوری به ناگزیر مسیر حرکت سیاره‌ها را بیضی می‌سازد. به موجب قانون گرانش عمومی، نیوتن توانست گرانش زمینی و سماوی را با یک نظریه واحد به هم پیوند دهد. نظریه نیوتن پیش‌بینی‌های دقیقی برای پدیده‌های گوناگون در مقیاس‌های مختلف داشت که شامل آزمایش‌های زمینی و حرکت‌های مداری می‌شد.

توجه بیشتر به مبانی مفهومی نظریه‌ی گرانشی نیوتن، دو ایده‌ی اساسی را آشکار می‌کند: ۱) ایده‌ی فضای مطلق، با این تصویر که فضا پهنه‌ای صلب با ساختار تأثیرناپذیر است، و پدیده‌های فیزیکی در آن اتفاق می‌افتند. ۲) ایده‌ای که بعدها اصل هم‌ارزی ضعیف نامیده شد و به زبان نظریه‌ی نیوتنی یعنی جرم لختی و جرم گرانشی باهم برابرند.

بعد از نیوتن دانشمندان زیادی از قوانینی که او وضع کرده بود برای توصیف و توضیح پدیده‌های طبیعی، از جمله حرکت سیّارات استفاده کردند و تقریبا تا نیمه قرن نوزدهم این‌طور به نظر می‌رسید که قوانین حرکت نیوتن تمام مشاهدات ما را از جهان پیرامون بدون هیچ مشکلی توضیح می‌دهند.

اما در سال ۱۸۵۵ لِوریه[۱] یک افزایش حرکت تقدیمی در حد ۳۵ ثانیه قوسی را برای مدار عطارد مشاهده کرد و پس از آن یعنی در سال ۱۸۸۲، نیوکام[۲] این پیش‌روی را دقیق‌تر و برابر با ۴۳ ثانیه قوسی در هر قرن اندازه گرفت. این پدیده به وسیله نظریه نیوتن پیش‌بینی نشده بود. عده‌ای برای توجیه این مسئله به جرم‌های فرضی متوسل شدند که جاذبه‌ی آنها ظاهراً حرکت حضیض عطارد را پدید می‌آورده است، ولی این جرم‌های فرضی هیچ‌گاه پیدا نشدند.

در سال ۱۹۰۵ نسبیت خاص آینشتاین معرفی شد و گرانش نیوتنی با یک چالش جدی روبرو کرد. نظریه‌ی جدید آینشتاین که یک سری از پدیده‌های مرتبط با فیزیک ناگرانشی را توصیف می‌کرد، نشان داد که با گرانش نیوتنی ناسازگار است. حرکت نسبی و همه‌ی مفاهیم پیوندیافته با آن به ماورای ایده‌های گالیله و نیوتن رفت. در سال ۱۹۰۷، آینشتاین هم‌ارزی بین گرانش و لختی را معرفی کرد، به این صورت که هیچ ناظری نمی تواند فقط با آزمایش موضعی بین شتاب و میدان گرانشی تفاوت قائل شود. اصل هم‌ارزی در گرانش نیوتنی هم به نوعی بیان شده است[۸].

تا اینکه در نهایت آلبرت آینشتاین در سال ۱۹۱۵ نظریه نسبیت عام خود را معرفی کرد. نظریه‌ی نسبیت عام آینشتاین از نظریات نیرومند گرانش است که توانسته طرز فکر دانشمندان به گرانش را به کلی دگرگون کند. البته این نظریه، نه تنها قانون نیوتن را رد نکرده، بلکه آن‌را گسترش داده است. در بیشتر موارد، نتیجه‌هایی که از نظریه‌ی نسبیت حاصل میشده، اندکی با نتیجه‌ی بدست آمده از قانون نیوتن متفاوت بوده است. آینشتاین از نظریه‌ی خود برای اندازه‌گیری پیشروی مداری سیاره‌ی عطارد استفاده کرد و نتیجه‌ی بدست آمده درست برابر با مشاهدات بود. این نخستین آزمون برای تأیید نظریه‌ی نسبیت عام به حساب آمد. از زمانی‌که محاسبه‌ی پیشروی مداری عطارد، نظریه‌ی نسبیت را تأیید نمود، مشاهدات زیادی برای بررسی پیش‌بینی‌های دیگر نظریه‌ی نسبیت انجام گرفت. برخی از نمونه‌ها مانند انحراف پرتوهای نور، امواج گرانشی و سیاهچاله‌ها نسبیت عام را به عنوان یکی از قدرتمندترین نظریه‌ها در توصیف بسیاری از مشاهدات و داده‌های تجربی و همچنین پیش‌بینی پدیده‌های کیهانی شناساندند.

در این فصل ابتدا مروری اجمالی بر نسبیت عام و معادلاتش خواهیم داشت و کیهان شناسی متداول در نسبیت عام آینشتاین را بررسی می کنیم، سپس معادلات فریدمن در کیهان شناسی را به عنوان معادلاتی که دینامیک کیهان را بدست می دهند، معرفی

---

[۱] Le verrier
[۲] Newcomb

می کنیم. در ادامه مسئله شتاب تند شونده عالم را به عنوان یکی از مسائل مهم کیهان شناسی در قرن بیست و یکم بررسی و دلایل رصدی موجود بر آن را ارائه و سپس رهیافت‌های پیش‌رو برای توجیه آن را بررسی می‌کنیم.

۱-۲ نسبیت عام

نظریه‌ی نسبیت عام در سال ۱۹۱۵ توسط آینشتاین مطرح گشت. این نظریه تعمیمی بر نظریه‌ی نسبیت خاص است که درمورد تمامی ناظرها اعم از لخت و غیرلخت صحبت می‌کند و گرانش را به عنوان یک عامل هندسی و نه یک نیرو بررسی می‌کند. این نظریه بر چند اصل استوار است:

اصل ماخ [۳] از اصول اساسی نسبیت عام است که ماهیت آن از فهم دقیقتر قوانین نیوتن نشأت می‌گیرد. قویترین صورت این اصل که نسبیت عام با آن سازگار است عبارت است از: «لختی هر سیستم تحت تأثیر برهمکنش آن سیستم با محیط پیرامونش تعریف می‌شود» این اصل، اولین حمله‌ی سازنده به ایده‌ی فضای مطلق نیوتن بود.

اصل هم‌وردایی عام بیان می‌کند تمامی ناظرین اعم از لخت و غیرلخت هم‌ارزند و هر تبدیل از چارچوب لخت به چارچوب-های دیگر که با سرعت v در حال حرکت است، خصوصیات فیزیکی را ثابت نگه می‌دارد. بر اساس اصل هم‌خوانی نظریه‌ی نسبیت عام در حالت‌های حدی به گرانش نیوتنی و نسبیت خاص تبدیل شود. سرانجام اصل هم‌ارزی آینشتاین به این صورت است که هیچ ناظری نمی تواند فقط با آزمایش موضعی بین شتاب و میدان گرانشی تفاوت قائل شود. اصل هم‌ارزی در گرانش نیوتنی هم به نوعی بیان شده است. نیوتن در کتاب پرینسیپیا [۴] اشاره می‌کند که «جرم» یک جسم به معنی کمیتی در پاسخ به نیروی وارد بر آن، و «وزن» یک جسم به معنی کمیتی در پاسخ گرانش باید برابر باشند. آینشتاین با آزمایش‌هایی از قبیل آسانسورِ در حال سقوط آزاد، درک کرد که ناظرِ در حالِ سقوط آزاد آثار گرانشی را احساس نمی‌کند و در یک بازنویسی از اصل هم‌ارزی، نسبیت خاص را به صورت عام نوشت و یک نظریه برای توصیف چارچوب‌های نالخت و گرانش بنا کرد.

۱-۳ معادلات میدان گرانشی آینشتاین

فضا ـ زمان به وسیله‌ی تانسور متریک خمیده‌ی عام $g_{\mu\nu}$ تعریف می‌شود که تابعی از مختصات فضا ـ زمان است. $g_{\mu\nu}$ همانند پتانسیل گرانشی است. تغییرات نقطه به نقطه‌ی آنها در فضا زمان، مشخص کننده‌ی خمیدگی محلی فضاست. اگر از دیدگاهی هندسی به موضوع بنگریم، باید به هم‌ارزی مایه‌ای ریاضی هم بیفزاییم، یعنی باید در فضای ریمانی، تبدیل‌هایی را ترتیب دهیم که بتواند مقادیر $g_{\mu\nu}$ در نقاط گوناگون فضا ـ زمان را به هم مرتبط کند. از دیدگاه دینامیکی نیز باید بتوان $g_{\mu\nu}$ را به توزیع ماده در عالم ارتباط داد. آینشتاین، معادله‌ی تانسوری زیر را به عنوان قانون گرانش به صورت زیر معرفی کرد:

---

[۳] Mach
[۴] Principia

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\ g_{\mu\nu}, \qquad (۱.۱)$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\ T_{\mu\nu}. \qquad (۲.۱)$$

که در آن $G_{\mu\nu}$ تانسور آینشتاین است و $R_{\mu\nu}$ و R تانسور ریچی و اسکالر ریچی مربوط به متریک هستند. G ثابت گرانش و $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی ـ تکانه است.

معادله‌ی میدان آینشتاین دارای ویژگی‌های زیر است:

۱ـ هر دو طرف معادله تانسورهای متقارن مرتبه‌ی دوم هستند که تحت تبدیلات عام مختصات هموردا می‌باشند.

۲ـ واگرایی‌های هموردای هر دو طرف صفر می‌باشند.

۳ـ معادلات میدان برای مؤلفه‌های متریک $g_{\mu\nu}$ به معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم منجر خواهند شد.

۴ـ در یک فضازمان تخت $T_{\mu\nu}$ صفر می‌شود اما عکس این موضوع الزاماً درست نیست.

۵ـ در یک میدان گرانشی ضعیف، معادله‌ی آینشتاین، معادله‌ی پواسون را نتیجه می‌دهد

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G\, \rho. \qquad (۳.۱)$$

۱-۴ مدل استاندارد کیهان‌شناسی

کیهان‌شناسی متداول در نسبیت عام، مدل استاندار کیهان‌شناسی می‌باشد که با تکیه بر یک سری فرض‌های اولیه توانسته است تصویر کاملی از کیهان ارائه دهد. مدل استاندارد کیهان‌شناسی که بر پایه‌ی فضای همگن و همسان‌گرد فریدمن ـ رابرتسون ـ واکر ساخته شده، یک مدل بسیار کارا و موفق است که به توصیف تحول عالم در مقیاس‌های بسیار بزرگ می‌پردازد. ساده ترین متریکی که با اصول کیهان شناسی همخوانی دارد، متریکی است که دارای انحنای ثابت باشد، المان فضا ـ زمان با عبارت زیر به دست می آید:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\ dx^{\alpha} dx^{\beta} \qquad \alpha, \beta = 0,1,2,3 \qquad (۴.۱)$$

با تعیین $g_{\alpha\beta}$ شکل متریک مشخص می‌شود. شکل استاندارد متریک[۵] FRW با در نظر گرفتن $g_{00} = 1$ و $g_{0i} = 0$ برای یک متریک ایستا و با تعیین شکل g_{ij} که نشان دهنده قسمت فضایی متریک است، مشخص می شود. در حالت کلی قسمت فضایی متریک می تواند وابسته به زمان باشد.

[۵] Friedman-Robertson-Walker

$$g_{ij} = a(t)\, h_{ij}, \qquad (۵.۱)$$

که h_{ij} مستقل از زمان است. اگر فرض همگنی و همسانگردی متریک را هم در نظر بگیریم داریم:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta)\, d\varphi^2 \right), \qquad (۶.۱)$$

k ثابت انحنای فضا و برای $k<0$ عالم باز، برای $k=0$ یک عالم تخت و برای $k>0$ عالم بسته خواهیم داشت.

تانسور انرژی ـ تکانه برای یک شاره کامل، با توجه به معادلات آینشتاین به صورت زیر می باشد:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\, u_\mu u_\nu + P\, g_{\mu\nu}, \qquad (۷.۱)$$

ρ و P به ترتیب چگالی انرژی و فشار شاره است. $u_\mu^0 = \delta_\mu^0$ نیز چهار بردار سرعت در مختصات همراه است. با توجه به همگنی و همسانگردی داریم $u^0 = 1$ و $u^i = 0$. اکنون می توان معادلات میدان را با توجه به معادلات آینشتاین به صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \qquad (۸.۱)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \qquad (۹.۱)$$

از معادله ی اول برای زمان حال داریم:

$$\Omega + \Omega_k = 1, \qquad (۱۰.۱)$$

که Ω و Ω_k را به صورت زیر تعریف کرده ایم:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho \quad , \quad \Omega_k = -\frac{k}{H_0^2} \qquad (۱۱.۱)$$

و H_0 مقدار پارامتر هابل $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$ درلحظه حال است. اگر از معادله‌ی اول مشتق بگیریم و با معادله‌ی دوم ترکیب کنیم، می توانیم معادله بقای انرژی را بدست آوریم:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \qquad (۱۲.۱)$$

این معادله نشان می دهد که تحول عامل مقیاس چگونه در تحول چگالی عناصر سازنده عالم اثر می‌گذارد و بالعکس. اگر فرض کنیم که تحول مواد تشکیل دهنده عالم به صورت مستقل صورت می‌گیرد و سیال های تشکیل دهنده ی عالم مانند

تابش، ماده و انرژی تاریک به هم تبدیل نمی شوند، می توانیم معادله‌ی بقای انرژی را بر هر دسته از مواد به صورت جداگانه بنویسیم یعنی:

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_m + P_m) = 0, \tag{۱۳.۱}$$

$$\dot{\rho}_r + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_r + P_r) = 0, \tag{۱۴.۱}$$

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\Lambda + P_\Lambda) = 0, \tag{۱۵.۱}$$

که به ترتیب معادله پیوستگی برای چگالی ماده تاریک چگالی تابش و چگالی انرژی تاریک می باشد. اگر در این معادلات معادله ی حالت هر یک از شاره ها را قرار دهیم:

$$P_m = 0, \tag{۱۶.۱}$$

$$P_r = \frac{1}{3}\rho_r, \tag{۱۷.۱}$$

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda, \tag{۱۸.۱}$$

می توانیم این معادلات را حل کنیم و بدست آوریم:

$$\rho_m \propto a^{-3}, \tag{۱۹.۱}$$

$$\rho_r \propto a^{-4}, \tag{۲۰.۱}$$

$$\rho_\Lambda = constant. \tag{۲۱.۱}$$

در این مدل جهان از یک انفجار بزرگ اولیه درست شده است که در آن همه چیز در حال دور شدن از یکدیگر است و بنابراین هرچه در زمان به عقب برمی‌گردیم عالم کوچکتر و داغ‌تر می‌شود. این مدل چارچوبی برای توجیه بسیاری مشاهدات رصدی را فراهم می‌سازد، مانند: قانون هابل درباره دور شدن کهکشان‌ها از یکدیگر که بر اساس انبساط عالم تعبیر می‌شود، فراوانی عناصر سبک که با پیش‌بینی‌های سنتز اولیه سازگاری عالی دارد، طیف گرمایی و نیز همسان‌گردی تابش زمینه‌ی کیهانی.

فرض همگنی و همسان‌گردی فضا بیانی از پایه‌ای‌ترین اصل کیهان‌شناسی است که می‌گوید: جهان در هر زمانی، از هر نقطه، به استثنای بی‌نظمی‌های موضعی، یکسان به نظر می‌رسد (این اصل را می‌توان تعمیمی از اصل کوپرنیک دانست که می‌گفت: زمین مرکز سامانه خورشیدی نیست). همگن بودن یعنی اگر برش‌های زمان ثابتِ فضا - زمان را در نظر بگیریم، در هر برش نقطه مرجّحی وجود ندارد و همسان‌گردی حول یک نقطه یعنی جهت مرجّحی حول آن نقطه وجود نداشته است. مهم‌ترین

شاهدی که برای همسان‌گردی کیهان وجود دارد، کشف تابش زمینه در سال ۱۹۶۵ توسط پنزیاس[۶] و ویلسون[۷] است. آزمایش‌های آنها نشان دادند که عالم را تابشی گرمایی با دمای ۲/۷K فراگرفته و این تابش همسان‌گرد است $\frac{\Delta T}{T}=10^{-5}$.

امروزه آزمایش‌های فراوانی با دقت زیاد به بررسی این موضوع پرداخته‌اند. ماکزیما[۸]، بومرنگ[۹]، دبلیومپ و کوبی[۱۰]. توجیه معمول و پذیرفته‌شده این است که این تابش باقی‌مانده‌ای از انفجار بزرگ است. فرض همگنی فضا را نیز شمارش تعداد کهکشان‌ها و نیز خطی بودن قانون هابل تأیید می‌کند.

بنابراین با این تفاصیل، نظریه انفجار بزرگ و پیش‌بینی‌های آن در تولید عناصر سبک، طیف توانی حاصل از تابش پس‌زمینه‌ی ریزموج کیهانی و مدل‌های تشکیل ساختار و به تبع آن مدل استاندارد کیهان‌شناسی تا مدت‌ها مورد توجه کیهان‌شناسان قرار داشته است.

۱-۵ رهیافت‌های انرژی تاریک

نتایج بدست آمده از مشاهدات کیهانی در ده سال گذشته واقعیاتی را آشکار نمود که موجب خدشه دار شدن مدل استاندارد کیهان‌شناسی شد. این مشاهدات همان داده‌های مربوط به ابرنواخترهای نوع Ia در انتقال به سرخ‌های متفاوت است. این ابرنواخترها کم سوتر از آن‌چه باید دیده شوند، مشاهده می‌شوند. برای توجیه این پدیده یا باید فرض کنیم که کیهان باز است یا این‌که انبساط کیهان شتابدار است. از طرفی مشاهدات دقیق مربوط به تابش پس‌زمینه‌ی کیهانی نشان می‌دهد که هندسه کیهان تخت است. در این‌صورت احتمالاً انبساط کیهان شتابدار است. توجیه این مسئله از بزرگترین چالش‌های پیش‌روی کیهان‌شناسان است و آن‌ها معمولاً یکی از شیوه‌های زیر را در پیش می‌گیرند:

عده‌ای وجود نوعی انرژی تاریک را فرض می‌کنند که به‌صورت توده‌ای در تمامی مقیاس‌ها وجود دارد و امروزه تقریباً ۷۰٪ کل جرم ـ انرژی کیهان را تشکیل می‌دهد. گرچه ماهیت این انرژی ناشناخته است، این‌قدر می‌دانیم که برای اینکه بتواند در فرمول‌بندی نسبیت‌عام شتاب تندشونده را ایجاد کند، باید $\omega=\frac{p}{\rho}<-\frac{1}{3}$ باشد. از داده‌های اخترفیزیکی برمی‌آید که ω در نوار باریکی حول $\omega=-1$ است. ساده‌ترین و نیز معمول‌ترین منشأیی که برای انرژی تاریک در نظر می‌گیرند، انرژی خلأ است که با محاسبه تانسور انرژی ـ تکانه مربوط به آن به راحتی دیده می‌شود که دارای $\omega=-1$. یعنی چگالی انرژی خلأ به صورت یک ثابت در معادلات گرانش وارد می‌شود.

---

[۶] Penzias
[۷] Wilson
[۸] MAXIMA
[۹] BOOMERANG
[۱۰] WMAP & COBE