بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته آمار گرایش آمار ریاضی

بحثی در اندازه‌های قابلیت اعتماد توزیع‌های طول عمر آمیخته

استاد راهنما :

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

زهرا شریف النسبی

شهریور ماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمار ریاضی

خانم زهرا شریف النسبی

تحت عنوان

بحثی در اندازه های قابلیت اعتماد توزیع های طول عمر آمیخته

در تاریخ **۸۹/۶/۳۱** توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۲- استاد داور داخل گروه پایان‌نامه دکتر محمد بهرامی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر محمد حسین پورسعید با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

امضای مدیر گروه

تقدیر و تشکر

با سپاس و تقدیر فراوان از استاد فرزانه جناب آقای دکتر مجید اسدی صمیمانه و دلسوزانه از ابتدا تا انتها مدایتگر من

در راه انجام این پژوهش بوده اند. و از دوستان عزیزم که همراهم بودند.

تقدیم به

شانه‌های استوار **پدرم** که برفرازم برد

چشمان نگران **مادرم** که سقوط نکردم

چکیده

در قابلیت اعتماد ممکن است با جوامعی روبرو شویم که از چندین زیر جامعه تشکیل شده اند. این گونه جوامع را می‌توان توسط توزیع‌های آمیخته مدل بندی کرد. هدف اصلی این رساله مدل بندی اندازه‌های قابلیت اعتماد برای جوامع ناهمگن می‌باشد و بررسی این مطلب که رفتار اندازه‌های قابلیت اعتماد از جمله نرخ شکست، نرخ شکست معکوس، میانگین باقیمانده عمر زیر جوامع چه تأثیری روی رفتار اندازه‌های قابلیت اعتماد توزیع آمیخته خواهد داشت. از اهداف دیگر این رساله بررسی این موضوع است که آیا رفتار زیر جوامع تحت عملگر آمیخته حفظ می‌شود یا خیر، یا این که تحت چه شرایطی ویژگی زیر جوامع به توزیع آمیخته منتقل می‌شود. علاوه بر آن شرایطی که منجر به ترتیب در نرخ شکست، ترتیب در نرخ شکست معکوس و ترتیب در میانگین باقیمانده عمر توزیع‌های آمیخته می‌شوند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از طرفی اندازه‌های قابلیت اعتماد خود می‌توانند متغیر تصادفی باشند. عامل اصلی تصادفی بودن این اندازه‌ها محیط تصادفی است. در بخشی از این رساله نیز به بررسی اندازه‌های تصادفی و ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. ویژگی‌های حدی این اندازه‌ها برای توزیع‌های آمیخته از اهمیت زیادی برخوردار است. لذا رفتار مجانبی نرخ شکست و میانگین باقیمانده عمر آمیخته را نیز مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم تحت شرایطی رفتار حدی این اندازه‌ها مشابه رفتار حدی قوی‌ترین توزیع در آمیخته می‌باشد.

کلید واژه‌ها: توزیع آمیخته، نرخ شکست، نرخ شکست معکوس، میانگین باقیمانده عمر، رفتار حدی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: تعاریف ومفاهیم پایه

عنوان صفحه

فصل اول

تعاریف و مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه

اگر چه اکثر مطالعات روی اندازه‌های قابلیت اعتماد در حالت همگن صورت گرفته است با این وجود در دنیای واقعی به ندرت می‌توان جوامع همگن را یافت. نادیده گرفتن ناهمگنی موجود می‌تواند منجر به خطاهای اساسی در تحلیل‌های مربوط به قابلیت اعتماد شود. توزیع‌های آمیخته معمولاً یک ابزار مؤثر برای مدل بندی ناهمگنی موجود در جوامع به شمار می‌روند. هدف اصلی این رساله مدل بندی اندازه‌های قابلیت اعتماد برای جوامع ناهمگن می‌باشد و بررسی این مطلب که رفتار اندازه‌های قابلیت اعتماد از جمله نرخ شکست، نرخ شکست معکوس، میانگین باقیمانده عمر زیر جوامع چه تأثیری روی رفتار اندازه‌های قابلیت اعتماد آمیخته دارد.

در فصل اول به ارائه مفاهیم و تعاریفی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد آن‌ها را مورد استفاده قرار خواهیم داد. در بخش ۱-۲، ابتدا برخی از مفاهیم مهم در قابلیت اعتماد را ارائه می‌دهیم. در بخش ۱-۳ مفاهیمی‌از قبیل تغییر پذیری به طور منظم، خانواده لهمن، مثبت کامل از مرتبه n و مثبت کامل چند متغیره از مرتبه ۲ را معرفی می‌نماییم. سپس در بخش ۱-۴ به معرفی توزیع‌های آمیخته می‌پردازیم.

در فصل دوم به بررسی ویژگی‌های نرخ شکست آمیخته می‌پردازیم. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر چه آمیخته توزیع‌هایی با نرخ شکست نزولی، همیشه نرخ شکست نزولی دارد اما کلاس توزیع‌هایی با نرخ شکست صعودی

تحت عملگر آمیخته بسته نیست و نرخ شکست آمیخته می‌تواند در بعضی فواصل نزولی باشد. به این معنی که عملگر آمیخته می‌تواند الگوی رفتاری نرخ شکست را از صعودی به نزولی تغییر دهد. با این حال بررسی رفتار نرخ شکست حتی برای ساده‌ترین توزیع‌های آمیخته به راحتی امکان پذیر نیست. لذا به منظور سادگی، آمیخته دو توزیع که نرخ شکست آن‌ها به طور خطی صعود می‌کنند را در نظر می‌گیریم و رفتار نرخ شکست آمیخته را در دو حالت غیر متقاطع بودن نرخ‌های شکست و متقاطع بودن نرخ‌های شکست مورد مطالعه قرار خواهیم داد. باید توجه داشت که نرخ شکست خود می‌تواند یک متغیر تصادفی باشد. عامل اصلی تصادفی بودن نرخ شکست محیط تصادفی است. دو مدلی که اثر محیط را بر روی نرخ شکست نشان می‌دهند عبارتند از نرخ خطرهای جمعی و نرخ خطرهای متناسب. رفتار نرخ شکست آمیخته را تحت این دو مدل مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که مشخصه‌های شرطی نقش مهمی‌در تعیین رفتار تابع نرخ شکست آمیخته دارند. سپس به بررسی رابطه ترتیبی نرخ شکست توزیع‌های آمیخته می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که ترتیب نسبت درستنمایی بین زیر توزیع‌های مبنا منجر به رابطه ترتیبی بین نرخ‌های شکست توزیع‌های آمیخته می‌شود. همچنین نشان می‌دهیم که در مدل شکست‌های متناسب اگر این زیر توزیع‌ها دارای میانگین‌های برابر باشند رابطه ترتیبی بین واریانس‌ها در یک فاصله زمانی حول صفر نیز منجر به ترتیب نرخ شکست‌های توزیع‌های آمیخته می‌شود. در ادامه آمیخته دو توزیع نرمال را در نظر می‌گیریم و بررسی می‌کنیم که آیا می‌توانیم رابطه ای بین مد پذیری و رفتار نرخ شکست توزیع‌های آمیخته بیابیم یا خیر. بدین منظور مسأله را یکبار تحت فرض برابری واریانس‌ها و یکبار تحت عدم تساوی واریانس‌ها انجام می‌دهیم و نشان می‌دهیم که تحت فرض برابری واریانس‌ها توزیع آمیخته می‌تواند نرخ شکست صعودی یا وانی شکل تعدیل یافته داشته باشد و تحت فرض عدم تساوی واریانس‌ها، در صورتی که توزیع آمیخته دو مدی باشد آنگاه نرخ شکست آمیخته می‌تواند صعودی، وانی شکل تعدیل یافته و ابر دومدی باشد.

همان طور که اشاره کردیم مطالعات زیادی در مورد رفتار تابع نرخ شکست آمیخته صورت گرفته است. اما رفتار حدی تابع نرخ شکست آمیخته نیز از اهمیت زیادی برخوردار است. بدین منظور فصل سوم را به بررسی ویژگی‌های مجانبی نرخ شکست آمیخته اختصاص داده ایم. ابتدا شرایطی را ارائه می‌دهیم که نرخ شکست آمیخته به نرخ شکست قوی‌ترین توزیع در آمیخته نزول می‌یابد. سپس کلاسی از توزیع‌ها را معرفی می‌کنیم که نرخ شکست آمیخته توزیع‌هایی از این کلاس به طور مجانبی رفتار مشابه با رفتار نرخ شکست قوی‌ترین توزیع در آمیخته را خواهد داشت. در نهایت نشان می‌دهیم که اگر زیر جوامع به طور مجانبی نرخ شکست ثابت داشته باشند، نرخ شکست آمیخته هم به طور مجانبی ثابت خواهد بود.

نرخ شکست معکوس به دلیل نقش مهمی که در قابلیت اعتماد، علوم پزشکی، تحلیل بقا و زمینه‌های دیگر کاربرد احتمال دارد مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. به همین منظور در فصل چهارم ویژگی‌های نرخ شکست معکوس آمیخته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا به مطالعه ویژگی‌های یکنوایی و ترتیبی نرخ شکست معکوس آمیخته می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که نرخ شکست معکوس توزیع آمیخته تنها تحت نزولی بودن نرخ شکست معکوس زیر جوامع نزولی نخواهد بود و به شرط دیگری نیز نیاز دارد. و در ادامه ویژگی‌های نرخ شکست معکوس متناسب توزیع آمیخته یک متغیره و چند متغیره را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در کنار تابع نرخ شکست و نرخ شکست معکوس، میانگین باقیمانده عمر نقش مهمی‌در نظریه قابلیت اعتماد و تحلیل بقا ایفا می‌کند. بعضی مواقع تحلیل ویژگی‌های سالخوردگی توزیع‌های طول عمر از طریق میانگین باقیمانده عمر معقول تر به نظر می‌رسد. لذا در فصل آخر به مطالعه ویژگی‌های میانگین باقیمانده عمر آمیخته می‌پردازیم. ابتدا ویژگی‌های یکنوایی و ترتیبی میانگین باقیمانده عمر آمیخته را مورد بررسی قرار می‌دهیم و رفتار آن را با استفاده از ارتباطی که با نرخ شکست دارد تعیین می‌کنیم. از طرفی همان گونه که بیان شد ویژگی‌های حدی توزیع‌های طول عمر از اهمیت زیادی برخوردار است که علاوه بر نرخ شکست، میانگین باقیمانده عمر نیز در تعیین این ویژگی‌ها به ما کمک می‌کند. جالب این است که با بررسی رفتار حدی میانگین باقیمانده عمر آمیخته به نتایج مشابه با نرخ شکست خواهیم رسید. یعنی تحت شرایطی رفتار میانگین باقیمانده عمر آمیخته مجانباً مشابه با رفتار میانگین باقیمانده عمر قوی‌ترین توزیع در آمیخته می‌باشد.

۱-۲ مفاهیم اساسی در قابلیت اعتماد

در قابلیت اعتماد معمولاً با یک متغیر تصادفی نامنفی T سروکار داریم که می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد. در ادامه فرض می‌کنیم T پیوسته با تابع چگالی $f(t)$، تابع توزیع $F(t)$ و تابع بقای $\bar{F}(t)=1-F(t)$ است.

تعریف ۱-۱ تابع نرخ شکست متغیر تصادفی T که آن را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$h(t)=\lim_{\delta\to 0}\frac{P(t\le T<t+\delta)}{\delta P(T\ge t)}=\lim_{\delta\to 0}\frac{F(t+\delta)-F(t)}{\delta\bar{F}(t)}=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}. \qquad (۱-۱)$$

این کمیت نرخ از کار افتادگی موجود زنده را در زمان t نشان می‌دهد.

نکته ۱-۱ کمیت $\int_0^t h(u)du$ را که با $H(t)$ نمایش می‌دهیم به تابع نرخ شکست تجمعی معروف است و به راحتی نشان داده می‌شود که $\bar{F}(t)$ برحسب $h(t)$ (یا $H(t)$) به صورت زیر قابل نمایش است

$$\bar{F}(t)=exp\left\{-\int_0^t h(x)dx\right\},\ \ t>0. \qquad (۲-۱)$$

متغیرهای تصادفی را براساس رفتار نرخ شکست آنها به کلاس‌های مختلف دسته بندی می‌کنند. بعضی از این کلاس‌ها عبارتند از کلاس توزیع‌ها با نرخ شکست صعودی، کلاس توزیع‌ها با نرخ شکست نزولی، کلاس توزیع‌ها با نرخ شکست وانی شکل، کلاس توزیع‌ها با نرخ شکست وانی شکل وارون و کلاس توزیع‌ها با نرخ شکست وانی شکل تعدیل یافته. در ادامه به معرفی هر یک از این کلاس‌ها می‌پر دازیم.

تعریف ۱-۲ فرض کنید F تابع توزیع متغیر طول عمر T باشد. F را متعلق به کلاس توزیع‌های با نرخ شکست صعودی (نزولی) گوییم هر گاه $h(t)$، تابع نرخ شکست T، تابعی صعودی (نزولی) از t باشد. معمولاً از علامت اختصاری IFR[1] (DFR)[2] برای نشان دادن آن که F دارای نرخ شکست صعودی (نزولی) است استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱-۳ گوییم متغیر تصادفی T با تابع نرخ شکست $h(t)$، نرخ شکست وانی شکل (BT)[3] دارد اگر t^* و t^{**} وجود داشته باشند به طوری که برای $0 \leq t \leq t^{**}$، $h(t)$ نزولی و برای $t \geq t^*$، $h(t)$ صعودی باشد،که در آن $0 \leq t^{**} \leq t^* \leq \infty$ و

$$t^* = \inf\left\{t \geq 0, \quad \text{روی } [t,\infty] \text{ صعودی است } h(u)\right\},$$
$$t^{**} = \sup\left\{t \geq 0, \quad \text{روی } [0,t] \text{ نزولی است } h(u)\right\}.$$

و گوییم متغیر تصادفی T با تابع نرخ شکست $h(t)$، نرخ شکست وانی شکل وارون دارد اگر $-h(t)$ وانی شکل باشد.

تعریف ۱-۴ گوییم متغیر تصادفی T با تابع نرخ شکست $h(t)$ نرخ شکست وانی شکل تعدیل یافته MBT[4] دارد اگر وجود داشته باشد $0 \leq t^0 < \infty$ به طوری که برای $0 \leq t \leq t^0$، $h(t)$ صعودی و برای $t \geq t^0$، $h(t)$ وانی شکل باشد.

در مباحث قابلیت اعتماد یکی دیگر از مفاهیم سالخوردگی براساس میانگین باقیمانده عمر تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۵ اگر T متغیر تصادفی با تابع بقای $\bar{F}$ و میانگین متناهی μ باشد در این صورت میانگین باقیمانده عمر متغیر تصادفی T در نقطه t به صورت زیر تعریف می‌شود

$$m(t) = \begin{cases} E(T-t|T>t), & t < t_0, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۳-۱}$$

[1] Increasing Failure Rate
[2] Decreasing Failure Rate
[3] Bathtub Shaped
[4] Modified Bathtub Shaped

که در آن $t_0 = \sup\{t,\ \bar{F}(t) > 0\}$ و نشان داده می‌شود که

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)}.$$

این تابع به عنوان تابعی پویا در هر لحظه از زمان، میانگین باقیمانده عمر متغیر تصادفی T را نشان می‌دهد و واضح است که $m(0) = E(T)$.

همانند کلاس بندی‌های نرخ شکست، می‌توان متغیرهای تصادفی را براساس رفتار میانگین باقیمانده عمر نیز کلاس بندی کرد:

تعریف ۱-۶ فرض کنید متغیر تصادفی طول عمر T دارای توزیع F باشد. گوییم F دارای میانگین باقیمانده عمر نزولی(صعودی) است و به صورت مختصر با DMR [1] $(IMRL)$ [2] نمایش می‌دهیم هرگاه تابع میانگین باقیمانده عمر $m(t)$ تابعی نزولی (صعودی) بر حسب t باشد.

نکته ۱-۲ متغیر تصادفی T با تابع بقای $\bar{F}(t)$ و میانگین باقیمانده عمر $m(t)$ را در نظر بگیرید، آنگاه تابع بقای $\bar{F}(t)$ بر حسب $m(t)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\bar{F}(t) = \frac{m(0)}{m(t)} exp\{-\int_0^t \frac{1}{m(x)} dx\}. \qquad (۴-۱)$$

اثبات: طبق تعریف ۱-۵ داریم

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)}.$$

لذا

$$\frac{1}{m(t)} = \frac{\bar{F}(t)}{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}.$$

با انتگرال گیری از طرفین تساوی اخیر در فاصله $(0, t)$ بدست می‌آوریم

$$\int_0^t \frac{1}{m(x)} dx = \int_0^t \frac{\bar{F}(x)}{\int_x^\infty \bar{F}(u)du} dx = -\ln \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{m(0)}$$

بنابراین

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{m(0)} = e^{-\int_0^t \frac{1}{m(x)}dx}$$

با مشتق گیری از طرفین بر حسب t، (۱-۴) بدست می‌آید. □

[1] Decreasing Mean Residual Lifetime
[2] Increasing Mean Residual Lifetime

نکته ۱-۳ میانگین باقیمانده عمر $m(t)$ و تابع نرخ شکست $h(t)$ به صورت زیر در ارتباط هستند

$$h(t) = \frac{m'(t)+1}{m(t)}. \tag{۱-۵}$$

اثبات: با مشتق گیری از $m(t)$ خواهیم داشت

$$m'(t) = \frac{-\left(\bar{F}(t)\right)^2 + f(t)\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\left(\bar{F}(t)\right)^2}$$

و در نتیجه (۱-۵) به راحتی بدست می‌آید. □

یکی دیگر از ابزارهای مهم در قابلیت اعتماد نرخ شکست معکوس است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۷ اگر T یک متغیر تصادفی با تابع توزیع $F(t)$ باشد. آنگاه تابع نرخ شکست معکوس متغیر تصادفی T را که با $r(t)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r(t) = lim_{\delta\to 0}\ \frac{P(t-\delta<T<t|T<t)}{\delta} = \frac{f(t)}{F(t)}. \tag{۱-۶}$$

کلاس بندی‌های مشابه نرخ شکست برای نرخ شکست معکوس وجود دارد که در ادامه به دو مورد از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

تعریف ۱-۸ فرض کنید متغیر تصادفی طول عمر T دارای توزیع F باشد. گوییم F دارای نرخ شکست معکوس نزولی (صعودی) است و به صورت مختصر با $DRHR$[1] ($IRHR$)[2] نمایش می‌دهیم هرگاه تابع نرخ شکست معکوس $r(t)$ تابعی نزولی (صعودی) بر حسب t باشد.

در ادامه بعضی از ترتیب بندی‌های مهم در قابلیت اعتماد و شاخه‌های دیگر آمار را به صورت خلاصه مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱-۹ فرض می‌کنیم T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی باشند

الف) گوییم T_1 در ترتیب تصادفی معمولی کوچکتر از T_2 است و به صورت $T_1 \leq_{st} T_2$ نمایش می‌دهیم اگر برای هر t، $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t)$.

ب) گوییم T_1 در ترتیب نرخ شکست کوچکتر از T_2 است و به صورت $T_1 \leq_{hr} T_2$ نمایش می‌دهیم اگر برای هر t، $h_1(t) \geq h_2(t)$ یا معادل آن $\bar{F}_2(t)/\bar{F}_1(t)$ نسبت به t صعودی باشد.

ج) گوییم T_1 در ترتیب میانگین باقیمانده عمر کوچکتر از T_2 است و با $T_1 \leq_{mrl} T_2$ نمایش می‌دهیم

[1] Decreasing Reversed Hazard Rate
[2] Increasing Reversed Hazard Rate

اگر برای هر t، $m_1(t) \le m_2(t)$.

د) گوییم T_1 در ترتیب نرخ شکست معکوس کوچکتر از T_2 است و به صورت $T_1 \le_{rh} T_2$ نمایش می‌دهیم اگر برای هر t، $r_1(t) \le r_2(t)$ یا معادل آن $F_2(t)/F_1(t)$ تابعی صعودی نسبت به t باشد.

ه) گوییم T_1 در ترتیب نسبت درستنمایی کوچکتر از T_2 است و به صورت $T_1 \le_{lr} T_2$ نمایش می‌دهیم اگر $f_2(t)/f_1(t)$ نسبت به t صعودی باشد.

۱-۳ برخی مفاهیم فرعی

در ادامه برخی مفاهیم فرعی که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱-۱۰ تغییر پذیری به طور آهسته فرض کنید که $\ell > 0$ تابعی اندازه پذیر باشد که روی همسایگی $[x, \infty)$ تعریف شده است. ℓ را تابعی با تغییرات آهسته گوییم، هرگاه برای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$\frac{\ell(\lambda x)}{\ell(x)} \to 1, \quad x \to \infty.$$

تعریف ۱-۱۱ تغییر پذیری به طور منظم گوییم تابع اندازه پذیر $f > 0$ به طور منظم با نمای $\rho \in \mathbb{R}$ تغییر می‌کند، هر گاه برای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \to \lambda^{\rho}, \quad x \to \infty.$$

از نماد $f \in R_\rho$ استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که f به طور منظم با نمای ρ تغییر می‌کند.

تعریف ۱-۱۲ گوییم تابع $u(x)$ سرانجام یکنواست اگر $u(x)$ برای x به اندازه کافی بزرگ یکنوا باشد.

تعریف ۱-۱۳ گوییم تابع $u(x)$ دارای مشتق سرانجام یکنواست اگر $u(x) = \int_0^x u'(y)dy$، که $u'(y)$ برای هر $y \ge 0$ وجود دارد و برای yهای به اندازه کافی بزرگ صعودی یا نزولی باشد.

تعریف ۱-۱۴ قضیه چگالی یکنوا (MDT)[1]

براساس بینگهام و همکاران[2] (۱۹۸۷) اگر $U(x) = \int_0^x u(y)dy$ و هنگامی که $x \to \infty$ داشته باشیم

$$U(x) \sim c x^{\rho} \ell(x),$$

که در آن $c \in \mathbb{R}$، $\rho \in \mathbb{R}$ و $\ell \in R_0$. اگر u سرانجام یکنوا باشد، آنگاه

$$u(x) \sim c\rho x^{\rho-1} \ell(x).$$

تعریف ۱-۱۵ تابع نرخ شکست $h(t)$ را گوییم

[1] Monotone Density Theorem
[2] Bingham

الف) در نرخ چند جمله ای به یک ثابت نزدیک می‌شود اگر حد متناهی غیر صفر، r_∞، داشته باشد و $r_0(t) = |r(t) - r_\infty|$ به طور منظم با نمای $-\tau$ $(\tau > 0)$ تغییر کند.

ب) در نرخ چند جمله ای به ∞ نزدیک می‌شود اگر به طور منظم با نمای $\tau > 0$ تغییر کند.

تعریف ۱-۱۶ خانواده توابع بقای $\{\bar{F}_\lambda(t),\ \lambda > 0\}$ را خانواده لهمن گوییم، اگر برای هر $\lambda > 0$ و $t > 0$، $\bar{F}_\lambda(t) = (\bar{F}(t))^\lambda$ و خانواده $\{\bar{F}_\lambda(t),\ \lambda > 0\}$ را خانواده لهمن IFR یا خانواده نرخ شکست‌های متناسب IFR گوییم هرگاه $h(t)$، تابع نرخ شکست $\bar{F}(t)$، تابعی صعودی باشد.

تعریف ۱-۱۷ تابع $g(t)$ را کران دار موضعی گوییم هرگاه روی هر فاصله متناهی کران دار باشد.

تعریف۱-۱۸ فرض کنید که $g(t)$ تابع کران دار موضعی روی (a,b) باشد که $-\infty \le a < b \le \infty$. گوییم g تابع وانی شکل تعمیم یافته است اگر یک مجموعه متناهی $F \subset \mathbb{R}$ و افراز $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r < t_{r+1} = b$ که $r \ge 0$ وجود داشته باشند به طوری که $(-1)^j g(t)$ روی $(t_j, t_{j+1}) \cap F^c$ برای $j = 0,1,\dots,r$ نزولی باشد. g را تابع وانی شکل وارون تعمیم یافته گوییم اگر $g-$ تابع وانی شکل تعمیم یافته باشد.

تذکر ۱-۱ اگر تعریف کنیم

$$g_+(t) = g(t^+) = \lim_{x \downarrow t} g(x)$$

در این صورت اگر g وانی شکل تعمیم یافته (وانی شکل وارون تعمیم یافته) باشد، g_+ نیز وانی شکل تعمیم یافته (وانی شکل وارون تعمیم یافته است. بعلاوه اگر g تابع وانی شکل تعمیم یافته (وانی شکل وارون تعمیم یافته) باشد آنگاه توابع $(-1)^j g_+$ در فاصله (t_j, t_{j+1}) نزولی (صعودی) است.

تعریف ۱-۱۹ فرض کنید g یک تابع وانی شکل تعمیم یافته روی (a,b) باشد. برای $k \ge 0$، گوییم $g \in B_k(a,b)$ یا $g \in B_k$ اگر یک افراز $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_k < c_{k+1} = b$ وجود داشته باشد به طوری که برای $j = 0,1,\dots,k$

$$c_{j+1} = \sup\left\{c_j < t < b:\ \text{نزولی باشد}\ (c_j, t)\ \text{روی}\ (-1)^j g_+(.)\right\}$$

برای $k \ge 0$ گوییم که تابع وانی شکل وارونه تعمیم یافته g متعلق به کلاس UB_k است اگر $g-$ متعلق به کلاس B_k باشد.

تعریف ۱-۲۰ زمانی که چگالی $f(t)$ دو مدی باشد و نرخ شکست آن چهار تغییر در یکنوایی خود داشته

تعریف ۱-۲۰ زمانی که چگالی $f(t)$ دو مدی باشد و نرخ شکست آن چهار تغییر در یکنوایی خود داشته باشد گوییم یک حالت ابر دو مدی (SB)[1] وجود دارد.

تعریف ۱-۲۱ فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی باشند. تابع $K(x,y)$ روی $A \times B$ را مثبت کامل از مرتبه $n(TP_n)$ گوییم اگر

$$\begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & \dots & K(x_1,y_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_r,y_1) & \dots & k(x_r,y_r) \end{vmatrix} \geq 0,$$

برای هر $x_1 < \dots < x_r$ در A و $y_1 < \dots < y_r$ در B که در آن $r = 1,2,\dots n$.

تعریف ۱-۲۲ تابع $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ را مثبت کامل چند متغیره از مرتبه ۲ (MTP_2) گوییم اگر

$$\psi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y}) \leq \psi(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y})$$

برای هر $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ که در آن

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = (min\{x_1,y_1\}, \dots, min\{x_n,y_n\}),$$
$$\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = (max\{x_1,y_1\}, \dots, max\{x_n,y_n\}).$$

و بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ را MTP_2 گوییم اگر تابع چگالی آن MTP_2 باشد.

در بسیاری از حالات عملی، محصولات با توجه به شرایط متفاوت تولید ممکن است از زیر جامعه‌های ضعیف و زیر جامعه‌های قوی تشکیل شوند. در این مواقع آب بندی $(Burn-In)$ یک روش پر کاربرد برای کنار گذاشتن واحدهای ضعیف یا معیوب است، قبل از آن که این محصولات برای مشتریان فرستاده شود یا در محیط کار قرار گیرند.

تعریف ۱-۲۳ $\boldsymbol{Burn-In}$ روشی است برای بالا بردن قابلیت اعتماد محصولات قبل از آن که محصولات را به مشتری ارائه کنند. به عبارت دیگر قبل از این که محصولات را به مشتری تحویل دهند آن‌ها را تحت شرایط ویژه محیط کار (یا محیط الکترونیکی یا حرارتی) به مدت زمان معین $(Burn-In)$ آزمایش می‌کنند، تا چگونگی کارایی آن‌ها را در محیط کارشان تقریب زنند. آن دسته از محصولاتی که در طول فرآیند $Burn-In$ از کار می‌افتند (یا شکست می‌خورند) کنار گذاشته یا تعمیر خواهند شد و تنها محصولاتی که در طول این آزمایشات سالم می‌مانند (یا از کار نمی‌افتند) به عنوان محصولات با کیفیت خوب شناخته می‌شوند.

[1] Super Bimodal

۱-۴ توزیع‌های آمیخته

در بسیاری از زمینه‌های مربوط به طول عمر، جوامع تحت بررسی همگن نیستند. یعنی همه واحدهای جامعه توزیع دقیقاً یکسانی ندارند و معمولاً در صدی از طول عمر واحدهای جامعه متفاوت از بقیه هستند. به عنوان مثال در مورد محصولات صنعتی یک زیر جامعه شامل کالاهای معیوب با طول عمر کوتاه تر و یک زیر جامعه شامل کالاهای استاندارد با طول عمر بلند تر وجود دارند. این امر می‌تواند به دلایل زیادی از جمله شیفت کاری، مواد اولیه و دو خط تولید ایجاد شود. بنابراین این جوامع می‌توانند توسط مفهوم آمیخته مدل بندی شوند.

تعریف ۱-۲۴ فرض کنید $\{F(t,z),\ -\infty < z < \infty\}$ خانواده ای از توابع توزیع با تابع بقای $\bar{F}(t,z) = 1 - F(t,z)$ و تابع چگالی $f(t,z)$ باشد. بعلاوه فرض کنید $\Pi(z)$ تابع توزیع روی $(-\infty,\infty)$ باشد. در این صورت توزیع آمیخته به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t,z)\Pi(dz). \qquad (۱-۷)$$

در صورتی که $\Pi(z)$ دارای چگالی $\pi(z)$ باشد، آنگاه توزیع آمیخته عبارت است از

$$F_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t,z)\pi(z)dz. \qquad (۱-۸)$$

اگر $\Pi(z)$ گسسته با تابع جرم احتمال $p_i = p(z_i)$ در نقاط $z = z_1, \dots, z_n$ و $n = 1,2,3,\dots$ باشد، آنگاه توزیع آمیخته عبارت است از

$$F_m(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_i(t). \qquad (۱-۹)$$

تعریف ۱-۲۵ تابع بقای $\bar{F}_m(t)$ را آمیخته تعمیم یافته از توابع بقای $\bar{F}_1(t)$،...، $\bar{F}_n(t)$ گوییم، هرگاه برای هر t،

$$\bar{F}_m(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \bar{F}_i(t). \qquad (۱-۱۰)$$

که p_1،...، p_n اعداد حقیقی هستند و $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

اگر p_1،...، p_n اعداد حقیقی مثبت باشند، $\bar{F}_m(t)$ را آمیخته متناهی مثبت و اگر برای بعضی $i \in \{1,2,\dots,n\}$، $p_i < 0$، $\bar{F}_m(t)$ را آمیخته منفی می‌نامیم.

بعلاوه هر آمیخته منفی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\bar{F}_m(t) = p\bar{F}_+(t) + (1-p)\bar{F}_-(t), \qquad (۱-۱۱)$$

که در آن

$$p = \sum_{p_i > 0} p_i > 0,$$

$$\bar{F}_+(t) = \frac{\sum_{p_i > 0} p_i \bar{F}_i(t)}{\sum_{p_i > 0} p_i}, \qquad (۱۲-۱)$$

$$\bar{F}_-(t) = \frac{\sum_{p_i < 0} p_i \bar{F}_i(t)}{\sum_{p_i < 0} p_i}. \qquad (۱۳-۱)$$

تذکر ۱-۲ در سراسر این پایان نامه عبارت صعودی به معنای غیر نزولی و عبارت نزولی به معنای غیر صعودی می‌باشد.