بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش آزاد

برهم کنش نور غیرکلاسیک با اتم دو ترازی: آشکارسازی نور غیرکلاسیک

استادان راهنما:

دکتر رسول رکنی زاده

دکتر محمد حسین نادری

پژوهشگر:

حسین توکلی دینانی

مهر ماه ۱۳۸۵

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش آزاد

آقای حسین توکلی دینانی تحت عنوان

برهم کنش نور غیرکلاسیک با اتم دو ترازی: آشکارسازی نور غیرکلاسیک

در تاریخ ۸۵/۷/۲۶ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب رسید.

دکتر رسول رکنی زاده با مرتبه ی علمی دانشیار امضاء

۱-استادان راهنمای پایان نامه

دکتر محمدحسین نادری با مرتبه ی علمی استادیار امضاء

۲-استاد داور داخل گروه دکتر محمود سلطان الکتابی با مرتبه ی علمی استاد امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر محمد رضا مطلوب با مرتبه ی علمی استاد امضاء

امضای مدیر گروه

سپاسگذاری

از دکتر رسول رکنی زاده و دکتر محمد حسین نادری که مرا در تهیه این پایان نامه یاری دادند و پاسخگوی سوالات من بودند تشکر می کنم. همچنین لازم می دانم که از دکتر محمد حسین نادری که با دقت فراوان متن پایان نامه را اصلاح کردند تشکر کنم .

چکیده:

موضوع اندازه گیری حالت یک سیستم کوانتومی در همان اوایل فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی توسط پـائولی مطـرح شد، با وجود این در دهه ی اخیر موضوع مزبور به ویژه برای مشخص کردن حالت میدان تابشی کوانتیده بطور گسترده مورد توجه قرار گرفته است. در سالهای اخیر تولید حالت‌های غیرکلاسیک مثل حالت‌های فوک و گربـه‌ی شـرودینگر این مسئله را مطرح کرده است که در طرحواره های فیزیکی مربوط به تحقق حالتهای کوانتـومی چگونـه مـی تـوان از تولید حالت موردنظر اطمینان حاصل کرد.

در این پایان نامه روشهایی برای بازسازی و کسب اطلاعات از میدان تابـشی کوانتیـده ی درون کـاواک ارائـه می‌دهیم. برای این منظور، از الگوی جینز- امینگز که توصیف کننده برهم کنش اتم دو ترازی با تک مد میـدان درون کاواک است استفاده می‌کنیم. خواهیم دید به دلیل درهم تنیدگی حالت اتم- میدان بعـد از بـرهم‌کـنش بـا اسـتفاده از اطلاعاتی که از اندازه‌گیری روی اتم بعد از خروج از کاواک بدست می‌آوریم مـی‌تـوانیم نمـایش‌هـای مختلـف (توابـع فضای فاز یا عناصر ماتریس چگالی) حالت میدان درون کاواک را بدست می‌آوریم. نشان می‌دهـیم کـه بـا اسـتفاده از وارونی جمعیت اتم بعد از خروج از کاواک، طیف گسیل خودبه‌خود اتم، طیف فلوئورسانی اتم و توزیع تکانه‌ی باریکه‌ای اتمی بلافاصله بعد از خروج از کاواک، می توان میدان درون کاواک را بازسازی کرد. علاوه بر این، به موضوع بازسازی میدان درون کاواک در حضور اتلاف کوانتومی نیز خواهیم پرداخت.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

از زمان تحقق عملی بازسازی حالت کوانتومی با استفاده از روش توموگرافی توسط اسمیتی[1] و همکاران [۵۱] بازسازی حالتهای کوانتومی رونق خاصی گرفت و روشهای زیادی در این زمینه ارائه شد. روشهایی که برای بازسازی میدان کوانتیده رونده ارائه شده مبتنی بر اندازه‌گیری مستقیم میدان عمدتاً با استفاده از روش هموداین[2] متوازن و غیر متوازن است [۲۳، ۵۸]. برای بدست آوردن اطلاعات راجع به میدان کاواک بدلیل عدم دسترسی به میدان باید از روشهای غیرمستقیم استفاده کرد. روشهای غیرمستقیم ارائه شده در این زمینه با استفاده از برهم‌کنش اتم گمانه با میدان درون کاواک و بدست آوردن اطلاعات راجع به میدان درون کاواک با اندازه‌گیری روی اتم بعد از خروج آن از کاواک است. اطلاعات حاصل از این طریق شامل توابع توزیع فضای فاز میدان، ضرایب بسط میدان برحسب حالتهای عددی، تابع توزیع شمارش فوتونی، چلاندگی مؤلفه‌های کوادراتوری میدان و ویژگی‌های فازی میدان درون کاواک است. از جمله روشهای ارائه شده در این زمینه می‌توان از بازسازی تابع ویگنر با استفاده از اندازه‌گیری روی ترازهای داخلی اتم [۳۰، ۲۰]، بازسازی میدان ایستاده درون کاواک با استفاده از پراکندگی باریکه اتمی [۴۶، ۱۲]، بازسازی با استفاده از بازآوایی فلوئورسانی [۶۵] و بیناب نمایی آتلر—تونز [۳۲] نام برد. روشهایی نیز برای بازسازی میدان درون کاواک در حضور اتلاف کوانتومی ارائه شده که عمدتاً با استفاده از ابر عملگرهاست [۳۹، ۱۸]. اخیراً سولانو[3] برای فایق آمدن بر اتلاف ناشی از زمان برهم‌کنش طولانی در برهم‌کنش پاشنده، اندازه‌گیری‌های لحظه‌ای [۱۰] را با استفاده از برهم‌کنش انتخابی [۱۱] مطرح کرده است.

عنوان این پایان‌نامه آشکارسازی نور غیرکلاسیک با استفاده از برهم‌کنش آن با اتم است. از آنجا که به دنبال راههایی با استفاده از برهم‌کنش با اتم هستیم میدان کوانتیده را داخل کاواک درنظر می‌گیریم و با عبور دادن اتم‌های گمانه از درون کاواک و با استفاده از اندازه‌گیری‌هایی که روی اتم بعد از خروج از کاواک انجام می‌دهیم اطلاعاتی راجع به میدان درون کاواک بدست آورده و میدان درون کاواک را بازسازی می‌کنیم. با استفاده از همین اطلاعات و معیارهایی که برای غیرکلاسیک بودن یک حالت داریم می‌توانیم غیرکلاسیک بودن حالت میدان را نیز تشخیص دهیم. به عنوان مثال اگر تابع ویگنر بازسازی شده مقادیر منفی داشته باشد یا تابع توزیع فوتونی بازسازی شده نوسانی باشد حالت میدان درون کاواک غیرکلاسیک است. لازم به ذکر است که معیارهای متنوعی برای غیرکلاسیک بودن یک حالت ارائه شده و ما در اینجا به معیارهایی می‌پردازیم که به داده‌های حاصل از

---

[1] Smithy
[2] Homodyne
[3] Solano

بازسازی مرتبط باشد. بنابراین فصل‌بندی این پایان نامه بدین شکل است. در فصل اول نمایش‌های مختلف یک حالت کوانتومی را معرفی می‌کنیم. در فصلهای بعد که به بازسازی میدان درون کاواک می‌پردازیم یکی از این نمایش‌ها نتیجه‌ی بازسازی میدان است . با استفاده از روابطی که در فصل اول بین نمایشهای مختلف یک حالت کوانتومی ارائه می‌دهیم می‌توانیم با استفاده از داده‌های حاصل از اندازه‌گیری نمایشهای مختلف میدان را بدست آوریم. در ادامه‌ی فصل اول معیارهایی برای غیرکلاسیک بودن یک حالت ارائه می‌دهیم و فقط به معیارهایی می‌پردازیم که با استفاده از نتایج حاصل از بازسازی از قبیل تابع ویگنر، تابع مشخصه‌ی تابع ویگنر و یا چلاندگی مؤلفه‌های کوادراتوری میدان، بتوانیم آن معیارها را تحقیق کنیم.

در فصل دوم با معرفی الگوی جینز—کامینگز، که توصیف کننده‌ی برهم‌کنش اتم دو ترازی با تک مد میدان درون کاواکی با ضریب کیفیت بزرگ است، ابزارهای لازم برای بازسازی میدان کاواک را در دست خواهیم داشت. در توصیف الگوی جینز—کامینگز خواهیم دید که شکل نوسانات رابی وارونی جمعیت اتم دو ترازی برهم‌کنش کننده با میدان درون کاواک نمایانندهٔ‌ی میدان است. در ادامه‌ی فصل دوم نشان می‌دهیم که با استفاده از اندازه‌گیری روی ترازهای داخلی اتم دو ترازی برهم‌کنش کننده با میدان درون کاواک می‌توانیم تابع ویگنر میدان و تابع مشخصه‌ی متناظر با آن را بازسازی کنیم.

در فصل سوم چند روش دیگر برای بازسازی میدان درون کاواک بررسی می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که توزیع مکانی اتم‌های پراکنده شده، دور از محل برهم‌کنش با توزیع تکانه‌ی اتم‌ها درست بعد از خروج از کاواک مرتبط بوده و این توزیع تکانه نیز به نوبه‌ی خود با تابع ویگنر میدان ایستاده‌ی درون کاواک بطور مستقیم در ارتباط است. سپس نشان می‌دهیم که با استفاده از طیف فلوئورسانی اتم دو ترازی برهم‌کنش کننده با میدان کوانتیده می‌توانیم تابع توزیع فوتونی میدان درون کاواک را بدست آوریم. در بخش انتهایی این فصل نشان می‌دهیم که طیف گسیل خودبه‌خود اتم سه ترازی برهم کنش کننده با میدان کوانتیده در رژیم‌های جفت‌شدگی متفاوت تابع ویگنر میدان درون کاواک را بدست می‌دهد.

در فصل چهارم بازسازی میدان درون کاواک را در حضور اتلاف کوانتومی بررسی می‌کنیم. روش ارائه شده در این فصل روش ابرعملگری است. در این فصل خواهیم دید که بازسازی تابع ویگنر در حضور اتلاف با استفاده از برهم‌کنش پاشنده‌ی اتم—میدان امکان‌پذیر نیست در حالی که می‌توان توابع دیگر فضای فاز از جمله تابع توزیع Q ی میدان درون کاواک را بدست آورد. در نهایت جمع‌بندی نهایی و مراجع آورده شده‌است.

فصل اول

نمایش حالتهای کوانتومی

اطلاعات مربوط به حالت یک سیستم کوانتومی را می توان به روشهای مختلف، بسته به شرایط مسئله‌ی مورد نظر، بررسی کرد. از مکانیک کوانتومی می‌دانیم که برای حالت‌های کوانتومی خالص این اطلاعات در بردار حالت $\langle\psi|$ که فضای هیلبرت سیستم مورد مطالعه را می‌پیماید موجود است. اما برای حالت‌های کوانتومی آمیخته این اطلاعات توسط عملگری موسوم به عملگر چگالی بدست می‌آید. توصیف به وسیله عملگر چگالی کلی‌ترین صورت توصیف کوانتومی یک سیستم است، در حالی که توصیف بر حسب تابع موج حالت خاصی از این صورت کلی است. نمایش های معادل حالت کوانتومی را می‌توانیم با استفاده از روشهای فضای فاز نیز بدست آوریم. یک حالت را می‌توانیم با استفاده از توابع توزیع در فضای فاز مثل تابع توزیع ویگنر (تابع W)، تابع توزیع هوشیمی—کانو [1] (تابع Q) و تابع توزیع گلاوبر—سودارشان[2] (تابع P) نمایش دهیم. این توابع، توزیع‌های متناظر با ترتیب‌های مختلف (نرمال، پادنرمال و متقارن) عملگرهای خلق و نابودی‌اند [۱۶]. در فضای فاز تابع مشخصه‌ی یک حالت کوانتومی نیز تعریف می‌شود [۴۳] که توسط یک تبدیل فوریه با توابع توزیع شبه احتمال در ارتباط است و خود نمایش کاملی از یک حالت کوانتومی را ارائه می‌دهد. در این فصل نمایش‌های مختلف از یک حالت کوانتومی را بررسی می‌کنیم. در فصل‌های بعد این نمایش‌ها را برای بازسازی و اندازه‌گیری حالت‌های کوانتومی میدان درون کاواک به کار خواهیم بست.

Hushimi-Kano[1]
Glauber-Sudarshan[2]

۱−۱ عملگر چگالی

در مکانیک کوانتومی توصیف فیزیکی یک سیستم کوانتومی توسط بردار حالت داده می‌شود [٦]. بردار حالت، یک بردار در فضای هیلبرت سیستم موردنظر است که در نمادگذاری دیراک آن را با $|\psi\rangle$ نشان می‌دهند. دینامیک یک حالت کوانتومی توسط معادله‌ی شرودینگر بیان می‌شود،

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\hat{\mathcal{H}}\,|\psi(t)\rangle . \qquad (۱−۱)$$

که در آن $\hat{\mathcal{H}}$ عملگر هامیلتونی سیستم کوانتومی است. با حل معادله‌ی شرودینگر برای سیستمی که در حالت اولیه‌ی $|\psi(0)\rangle$ است می‌توان مقدار چشمداشتی $O(t)$ مربوط به مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها که در زمان t روی مشاهده‌پذیر $\hat{O}$ سیستم انجام می‌شود را بدست آورد. این مقدار میانگین با استفاده از رابطه‌ی

$$O(t) = \left\langle \psi(t)\left|\hat{O}\right|\psi(t)\right\rangle \qquad (۲−۱)$$

محاسبه می‌شود که در آن $\hat{O}$ عملگری است که توصیف کننده‌ی فرآیند اندازه‌گیری است و روی فضای هیلبرت سیستم عمل می‌کند. اندازه‌گیری‌ها باید به طور مکرر روی سیستمی که در حالت اولیه‌ی $|\psi(0)\rangle$ است انجام شود، اما در مورد آزمایش‌های واقعی یک اندازه‌گیری روی یک هنگرد از سیستم‌های مستقل مثل فوتون‌ها، مولکولهای یک گاز یا اتم‌ها در یک شبکه انجام می‌شود. در این وضعیت تمام سیستم‌ها باید در یک حالت کوانتومی اولیه فراهم شوند، چنین کاری از نظر عملی بسیار مشکل است و در حالت کلی با یک آمیزه‌ی آماری از حالت‌های کوانتومی سرو کار داریم بطوری که در لحظه‌ی $t = 0$ سیستم کوانتومی موردنظر با احتمال P_a در حالت $|\psi_a(0)\rangle$ است. بدین ترتیب $O(t)$ چنین خواهد شد،

$$O(t) = \sum_a P_a\,(t)\,\langle\psi_a\,(t)|\,\hat{O}\,|\psi_a\,(t)\rangle, \qquad (۳−۱)$$

که در آن، میانگین‌گیری کوانتومی و آماری هر دو انجام شده است. با استفاده از عملگر چگالی $\hat{\rho}(t)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\hat{\rho}(t) = \sum_a P_a(t)\,|\psi_a(t)\rangle\,\langle\psi_a(t)|\,, \qquad (۴−۱)$$

رابطه‌ی (۱−۳) به شکل زیر در می آید،

$$O(t) = Tr(\hat{\rho}(t)\hat{O}). \qquad (۵−۱)$$

که در آن Tr رد ماتریس است. عملگر چگالی تعریف شده در رابطه‌ی (۱ـ۴) شامل بردارهای حالت در زمان t است. آشکار است که توصیف کوانتومی سیستم بر حسب عملگر چگالی عام‌تر از توصیف سیستم توسط بردار حالت است زیرا رهیافت عملگر چگالی دربرگیرنده‌ی هر دو نوع اطلاعات کوانتومی و آماری است. تحول زمانی عملگر چگالی که با استفاده از معادله‌ی شرودینگر (۱ـ۱) و تعریف (۱ـ۴) بدست می‌آید معادله حرکت فون نویمن[3] یا لیوویل[4] نامیده می‌شود،

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}(t)]. \qquad (۱ـ٦)$$

در وضعیت خاصی همه‌ی سیستم‌های یک هنگرد در حالت خالص یکسان به‌سربرند، عملگر چگالی به صورت $\hat{\rho}(t) = |\psi\rangle \langle\psi|$ درمی‌آید. به دلیل بقای احتمال برای عملگر چگالی داریم $Tr(\hat{\rho}(t)) = 1$. علاوه بر این چنین داریم،

$$Tr(\hat{\rho}^2(t)) \leq 1, \qquad (۱ـ۷)$$

که در آن علامت مساوی مربوط به حالت خالص است. عملگر چگالی برای توصیف تحول زمانی سیستم کوانتومی در حضور فرآیندهای اتلافی (سیستم‌های باز) ابزار بسیار مناسبی به شمار می‌آید. در واقع به دلیل جفت شدگی سیستم کوانتومی با محیط اطراف برهم‌نهی کوانتومی حالت‌ها (همدوسی کوانتومی) به آمیزه‌ای آماری از حالت‌ها (واهمدوسی) تبدیل می‌شود که توسط بردار حالت قابل توصیف نیست.

۱ـ۲ پایه‌های کامل برای میدان تابشی

از نظر فیزیکی، عناصر ماتریسی عملگر چگالی اطلاعات مهمی را در مورد سیستم کوانتومی به دست می‌دهند. عناصر مزبور از تصویر کردن عملگر چگالی $\hat{\rho}(t)$ روی یک مجموعه‌ی کامل از بردارهای حالت سیستم مورد مطالعه بدست می‌آید. با درنظر گرفتن مجموعه‌ی کامل $\{|n\rangle\}$ عملگر چگالی $\hat{\rho}(t)$ را می‌توان به شکل زیر بسط داد،

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{n,m} \rho_{nm}(t) |n\rangle \langle m|, \qquad (۱ـ۸)$$

که در آن $\hat{\rho}_{nm}(t) = \langle n| \hat{\rho}(t) |m\rangle$. در ادامه برخی پایه‌های متداول برای نمایش عملگر چگالی میدان تابشی را معرفی می‌کنیم.

---
[3] Von Neumann
[4] Liouville

۱—۲—۱ ویژه حالت های انرژی

یک پایه‌ی کامل ویژه حالت‌های هامیلتونی سیستم است. این ویژه حالت‌ها با حل معادله‌ی ویژه‌ی مقداری زیر بدست می آیند [۵۵]،

$$\hat{\mathcal{H}}\left|n\right\rangle = E_n \left|n\right\rangle \tag{۱—۹}$$

که در آن، E_n، n اُمین ویژه مقدار $\hat{\mathcal{H}}$ و $\left|n\right\rangle$ ویژه بردار متناظر است. ویژه حالت‌های انرژی سیستم متعامدند و یک مجموعه‌ی کامل تشکیل می‌دهند،

$$\left\langle n\middle| m\right\rangle = \delta_{nm}, \tag{۱—۱۰}$$

$$\sum_n \left|n\right\rangle\left\langle n\right| = \hat{I}. \tag{۱—۱۱}$$

حال هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک بعدی را درنظرمی‌گیریم،

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2}). \tag{۱—۱۲}$$

در رابطه‌ی بالا $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ عملگر عددی و $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق بوزونی‌اند که از رابطه‌ی جابجایی $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ پیروی می‌کنند. ویژه حالت‌های عملگر $\hat{n}$ که ویژه حالت‌های هامیلتونی (۱—۱۲) نیز هستند، حالت‌های فوک نامیده می‌شوند و یک مجموعه‌ی کامل و متعامد را تشکیل می‌دهند. اثر عملگرهای نابودی و خلق روی حالت‌های فوک چنین است،

$$\hat{a}\left|0\right\rangle = 0, \tag{۱—۱۳}$$

و برای $n > 0$ داریم $\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$،

$$a^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle. \tag{۱—۱۴}$$

با استفاده از روابط بالا چنین بدست می آوریم،

$$\left|n\right\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle \tag{۱—۱۵}$$

۱—۲—۲ حالت‌های همدوس

یک پایه‌ی متداول دیگر، ویژه بردارهای عملگر نابودی $\hat{a}$ است که حالت‌های همدوس کانونیک نامیده می‌شوند [۱۵، ۱۴]،

$$\hat{a}\left|\alpha\right\rangle = \alpha\left|\alpha\right\rangle, \tag{۱—۱۶}$$

که در آن α یک عدد مختلط است. برخی از ویژگی‌های حالت‌های همدوس را می‌توان با استفاده از عملگر جابجایی یکانی $\hat{D}(\alpha)$،

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^{\dagger} - \alpha^{\star}\hat{a}), \tag{۱—۱۷}$$

استخراج کرد. با اعمال تبدیل یکانی $\hat{D}(\alpha)$ روی $\hat{a}$ بدست می‌آوریم $\hat{D}(\alpha)\hat{a}\hat{D}^{-1}(\alpha) = \hat{a} - \alpha$. حال عملگر بوزونی حاصل را روی حالت خلاء جابه‌جا شده اثر می‌دهیم،

$$(\hat{a} - \alpha)\hat{D}(\alpha)\left|0\right\rangle = 0, \tag{۱—۱۸}$$

و بدین ترتیب به تعریف دیگری از حالت همدوس $\left|\alpha\right\rangle$ دست می‌یابیم،

$$\left|\alpha\right\rangle = \hat{D}(\alpha)\left|0\right\rangle. \tag{۱—۱۹}$$

برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های حالتهای همدوس عبارتند از:

۱— حالت‌های همدوس تشکیل یک مجموعه اَبَرکامل می دهند که رابطه‌ی تفکیک واحد زیر را برآورده می‌کنند،

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| = \hat{I}. \tag{۱—۲۰}$$

۲— به طور کلی حالت‌های همدوس متعامد نیستند؛ اگر دو حالت همدوس $\left|\alpha\right\rangle$ و $\left|\beta\right\rangle$ را در نظر بگیریم بدست آنگاه برای ضرب داخلی آن دو چنین داریم،

$$\left\langle\beta \mid \alpha\right\rangle = \exp(-\frac{1}{2}\left|\alpha-\beta\right|^2)\exp\left[\frac{1}{2}\left(\alpha\beta^{\star} - \alpha^{\star}\beta\right)\right]. \tag{۱—۲۱}$$

۳— حالت‌های همدوس پیوسته هستند،

$$\left|\alpha-\beta\right|^2 \to 0 \Rightarrow \|\left|\alpha\right\rangle - \left|\beta\right\rangle\|^2 \to 0. \tag{۱—۲۲}$$

۴— بسط حالت‌های همدوس بر حسب حالت‌های فوک عبارت است از،

$$\left|\alpha\right\rangle = e^{-\left|\alpha\right|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle, \tag{۱—۲۳}$$

بنابراین

$$\left\langle n \mid \alpha\right\rangle = e^{-\left|\alpha\right|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \tag{۱—۲۴}$$

مربع این دامنه‌ی احتمال، تابع توزیع احتمال عددی حالت‌های همدوس n را بدست می‌دهد که یک توزیع پواسونی است.

۱—۲—۳ حالت‌های همدوس چلانده

حالت‌های چلانده مثال خاصی از حالت‌های همدوس به شمار می‌آیند. برای تعریف حالت‌های چلانده عملگر یکانی زیر را تعریف می‌کنیم [۵۵]،

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi\hat{a}^{\dagger 2} - \xi^{*}\hat{a}^{2})\right], \qquad (۲۵—۱)$$

که در آن، ξ یک پارامتر مختلط (پارامتر چلاندگی) است. کنش عملگر چلاندگی $\hat{S}(\xi)$ روی $\hat{a}$ و $\hat{a}^{\dagger}$ چنین نتیجه می‌دهد،

$$\begin{aligned} \hat{a}' &= \hat{S}(\xi)\hat{a}S^{\dagger}(\xi) = \hat{a}cosh\left(|\xi|\right) + \hat{a}^{\dagger}e^{i\varphi_{\xi}}sinh\left(|\xi|\right) \\ &= \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^{\dagger}, \end{aligned} \qquad (۲٦—۱)$$

آشکار است که چون عملگرهای $\hat{a}'$ و $\hat{a}'^{\dagger}$ با تبدیل یکانی عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^{\dagger}$، بدست می‌آیند باید چنین داشته باشیم $\left[\hat{a}', \hat{a}'^{\dagger}\right] = 1$. به عبارت دیگر چنانکه انتظار داریم پارامترهای μ و ν از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کنند،

$$\mu^{2} - |\nu|^{2} = 1. \qquad (۲۷—۱)$$

حالت همدوس چلانده $|\alpha, \xi\rangle$ که به صورت زیر تعریف می‌شود [٦۲]،

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi)\,|\alpha\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)\,|0\rangle\,, \qquad (۲۸—۱)$$

ویژه حالت عملگر $\hat{a}'$ است،

$$\hat{a}'\,|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^{\dagger}(\xi)\,|\alpha, \xi\rangle = \alpha\,|\alpha, \xi\rangle\,. \qquad (۲۹—۱)$$

همانند حالت‌های همدوس، حالت‌های همدوس چلانده نیز ابرکامل و غیر متعامدند. به دلیل یکانی بودن عملگر چلاندگی $\hat{S}(\xi)$ آشکار است که ضرب داخلی دو حالت همدوس چلانده با پارامتر چلاندگی یکسان توسط همان رابطه‌ی (۱—۲۱) داده می‌شود.
حالت‌های همدوس چلانده را می‌توان بر حسب حالت‌های عددی و حالت‌های همدوس بسط داد. ضرایب بسط از روابط زیر بدست می‌آیند [۵۵]،

$$\langle\alpha \mid \beta, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^{2} + |\beta|^{2}}{2} - \frac{\nu\alpha^{*2} - \nu^{*}\beta^{2} - 2\alpha^{*}\beta}{2\mu}\right), \qquad (۳۰—۱)$$

$$\langle n \mid \beta, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\mu}}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{|\beta|^{2}}{2} + \frac{\nu^{\pi}\beta^{2}}{2\mu}\right)H_{n}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right), \qquad (۳۱—۱)$$

که در آن، H_n چند جمله‌ای‌های هرمیت است.

۱—۳ توابع توزیع در فضای فاز

مقدار میانگین تابع $F(\alpha)$ در مکانیک آماری کلاسیک توسط رابطه‌ی زیر داده‌می‌شود،

$$\langle F\rangle = \int d^2\alpha F(\alpha)P_{cl}(\alpha), \qquad (۱—۳۲)$$

که در آن $P_{cl}(\alpha)$ یک تابع توزیع احتمال کلاسیک است و عنصر انتگرال‌گیری $d^2\alpha$ نمایانگر عنصر سطح $d\,(Re\alpha)\,d\,(Im\alpha)$ است و انتگرال‌گیری بر روی تمام صفحه مختلط انجام می‌شود. به طور مشابه می‌توانیم در مکانیک کوانتومی توابع توزیع را تعریف کنیم به طوری که به وسیله‌ی آن بتوانیم مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{F}$ را به شکل رابطه‌ی (۱—۳۲) محاسبه کنیم [۱۶]. تعریف تابع توزیع وابسته به ترتیب عملگرهاست اما از آنجا که این توابع توزیع می‌توانند مقادیر منفی بگیرند به آنها توابع توزیع شبه‌احتمال می‌گویند. برای تعریف توزیع‌های شبه‌احتمال، یک سیستم کوانتومی هماهنگ یک بعدی را درنظرمی‌گیریم. برای این سیستم عملگر جابه‌جایی تعمیم یافته $\hat{D}(\alpha,s)$ را چنین تعریف می‌کنیم،

$$\hat{D}(\alpha,s) = \hat{D}(\alpha)e^{s|\alpha|^2/2}. \qquad (۱—۳۳)$$

s پارامتری است که بسته به ترتیب عملگرهای خلق و نابودی مقادیر مختلف می‌گیرد، برای ترتیب نرمال $s=1$، برای ترتیب پادنرمال $s=-1$ وبرای ترتیب متقارن $s=0$. حال توابع زیر را تعریف می‌کنیم [۵]،

$$\Phi(\alpha,s) = Tr\left(\hat{\rho}\hat{D}(\alpha,s)\right), \qquad (۱—۳۴)$$

که توابع مشخصه‌ی تعمیم‌یافته نامیده می‌شوند. دو تابع مشخصه $\Phi(\alpha,s)$ و $\Phi(\alpha,s')$ با دو مقدار مختلف s و s' توسط رابطه‌ی زیر به هم مربوط می‌شوند،

$$\Phi(\alpha,s) = \exp\left[\frac{1}{2}(s-s')\,|\alpha|^2\right]\Phi\left(\alpha,s'\right). \qquad (۱—۳۵)$$

برای ترتیب متقارن، $(s=0)$، عملگر چگالی با استفاده از تابع مشخصه‌ی متناظر چنین بدست می آید [۵، ۵۹]،

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\Phi(\alpha,0)\hat{D}(\alpha,0). \qquad (۱—۳۶)$$

همچنین با تعریف عملگر $\hat{T}(\alpha,s)$ به شکل زیر

$$\hat{T}(\alpha,s) = \frac{1}{\pi}\int d^2\beta\hat{D}(\beta,s)\exp(\alpha\beta^\star - \alpha^\star\beta), \qquad (۱—۳۷)$$

عملگر چگالی چنین نوشته می‌شود،

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha R(\alpha, s)\hat{T}(\alpha, -s), \qquad (۱—۳۸)$$

که در آن،

$$R(\alpha, s) = \frac{1}{\pi}Tr(\hat{\rho}\hat{T}(\alpha, s)), \qquad (۱—۳۹)$$

تابع توزیع شبه احتمال است. بدین ترتیب، مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{F}$، $\left\langle \hat{F} \right\rangle = Tr\left(\hat{\rho}\hat{F}\right)$، با استفاده از رابطه‌ی (۱—۳۸) چنین نوشته می‌شود،

$$\left\langle \hat{F} \right\rangle = \int d^2\alpha R(\alpha, s)F(\alpha, s), \qquad (۱—۴۰)$$

که در آن،

$$F(\alpha, s) = Tr\left(\hat{F}\hat{T}(\alpha, -s)\right). \qquad (۱—۴۱)$$

دو تابع توزیع شبه‌احتمال متناظر با دو مقدار مختلف s توسط رابطه‌ی زیر به هم مربوط می‌شوند (برای $s < s'$)،

$$R(\alpha, s) = \frac{2}{\pi(s' - s)} \int d^2\gamma \exp\left(\frac{-2\left|\alpha - \gamma\right|^2}{s' - s}\right)R(\gamma, s'). \qquad (۱—۴۲)$$

یک تابع توزیع توسط یک تبدیل فوریه به تابع مشخصه متناظرش مربوط می‌شود. با استفاده از روابط (۱—۳۷) و (۱—۳۹) بدست می‌آوریم،

$$R(\alpha, s) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \Phi(\beta, s) \exp(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta). \qquad (۱—۴۳)$$

با استفاده از این رابطه و رابطه‌ی (۱—۳۶) درمی‌یابیم که $\Phi(\alpha, s)$ همه‌ی اطلاعات مربوط به حالت کوانتومی را دربردارد و نمایشی برای یک بردار حالت است.

تابع توزیع $R(\alpha, s)$ برای ترتیب پادنرمال $(s = -1)$ تابع توزیع Q (هوشیمی-کانو) نامیده می‌شود [۱۷]. این تابع را می‌توانیم با استفاده از عملگر

$$\hat{T}(\alpha, -1) = \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right|, \qquad (۱—۴۴)$$

و قرار دادن آن در رابطه‌ی (۱—۳۹) بدست آوریم که چنین است،

$$Q(\alpha) = R(\alpha, -1) = \frac{1}{\pi} \left\langle\alpha\right| \hat{\rho} \left|\alpha\right\rangle. \qquad (۱—۴۵)$$

بنابراین تابع Q عناصر قطری عملگر چگالی در پایه‌ی حالت های همدوس است و یک تابع توزیع مثبت معین است.

برای $s=0$ (ترتیب متقارن) تابع توزیع متناظر، تابع ویگنر نامیده می‌شود [۶۱] . با استفاده از رابطه‌ی زیر برای عملگر $\hat{T}(\alpha,s)$ [۵]،

$$\hat{T}(\alpha,s)=\frac{2}{(1-s)}\hat{D}(\alpha)\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}\hat{D}^{\dagger}(\alpha), \qquad (۱—۴۶)$$

و قرار دادن آن در رابطه‌ی (۱—۳۹) (برای $s=0$) و محاسبه‌ی رد ماتریس در پایه‌ی حالت‌های عددی، تابع ویگنر چنین بدست می آید،

$$W(\alpha)=\frac{2}{\pi}\sum_{n}(-1)^{n}\langle n|\,\hat{\rho}(\alpha)\,|n\rangle\,, \qquad (۱—۴۷)$$

که در آن،

$$\hat{\rho}(\alpha)=\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{\rho}\hat{D}(\alpha). \qquad (۱—۴۸)$$

از رابطه‌ی (۱—۴۷) واضح است که اگر متناظر با مفهوم جابه‌جایی حالت کوانتومی در فضای فاز شیوه‌ای تجربی وجود داشته باشد و اگر آمار عددی متناظر نیز قابل اندازه‌گیری باشد، آنگاه تابع ویگنر را می‌توان اندازه‌گیری کرد. در فصل سوم به روش‌های بازسازی تابع ویگنر می‌پردازیم. لازم به ذکر است که تابع ویگنر می‌تواند مقادیر منفی نیز به خود بگیرد و از آنجا که در صورت منفی شدن دیگر نمی‌تواند به عنوان تابع توزیع احتمال کلاسیک تعبیر شود از این رو حالتی را که تابع ویگنر مربوط به آن مقادیر منفی داشته باشد حالت غیرکلاسیک نامیده می‌شود.

سرانجام برای مقدار $s=1$ تابع توزیع مربوط، تابع توزیع P نامیده می‌شود، $P(\alpha)=R(\alpha,1)$. این تابع برای بعضی از حالتهای کوانتومی رفتاری بسیار تکینه‌تر از تابع دلتا دارد بنابراین برای این حالتها غیر قابل اندازه‌گیری است. تابع توزیع P نیز معیار دیگری برای تشخیص غیر کلاسیک بودن یک حالت بدست می‌دهد. معیارهای متعددی برای تشخیص غیرکلاسیک بودن یک حالت ارائه شده‌است، در بخش بعدی به تفصیل به معرفی معیارهایی می‌پردازیم که از آن‌ها در فصل‌های بعدی استفاده خواهیم کرد.

۱—۴ معیارهای تشخیص حالت‌های غیرکلاسیک

مفهوم تابش غیرکلاسیک ارتباط نزدیکی با نمایش میدان الکترومغناطیسی در فضای فاز دارد. این سؤال که چگونه حالت‌های کلاسیک و غیرکلاسیک نوسانگر هماهنگ را از هم تشخیص دهیم موضوع