بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش اتمی مولکولی

حل دقیق معادله‌ی شرودینگر با هامیلتونی اسپین- بوزون

استاد راهنما

دکتر فردین خیراندیش

نگارش

فرزانه مومنی

مرداد ماه ۱۳۹۱

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش اتمی مولکولی خانم فرزانه مومنی تحت عنوان

حل دقیق معادله شرودینگر با هامیلتونی اسپین– بوزون

در تاریخ ۱۳۹۱/۰۵/۰۹ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر فردین خیراندیش با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضا

۲- استاد داور داخل گروه دکتر مرتضی سلطانی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضا

۲- استاد داور خارج از گروه دکتر شهریار سلیمی با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضا

امضای مدیر گروه

گروه فیزیک

University of Isfahan

Department of Physics

خداوندا!

ای که حمد و ثنا تو را و تنها تو را سزاست، سال هاست که بی هیچ توقعی بر من منت نهاده ای و نعمت حیات بخشیده ای، در هر قدم همراهم بوده و قلبم را به بودنت آرام ساخته ای. من نیز سال هاست که پر توقع و بیگانه از خویشتن خویش و ذات پاک تو، تو را خوانده ام، اگر دعایم را اجابت کرده ای بر خویش مغرور گشته ام و اگر خواسته ام را برآورده نساخته ای جاهلانه بر تو عصیان کرده ام. اما این همه عصیان من مانع احسان تو بر من نشده زیرا که تو در اوج قدرت بسیار رحیمی. تو را هزاران سپاس که بار دیگر مرا مهلت داده ای تا تو را بخوانم.

و تو ای خداوندگار من سال هاست که حلیمانه و عاشقانه خطایم را پوشانده، از بلایم رهانده و بر مسند عزّتم نشانده ای. مرا زیر سایبان محکمی چون خانواده پرورانده و در جمع دوستان عزیز و محترم داشته ای. ای نیک عهد و نیک روش! این همه لطف تو مرا بر درخواست های مکرّر از تو حریص می گرداند.

پس اکنون ای مهربان کردگار من!

بر تواضع من بیفزای، همچنان که بر علم و دانش من می افزایی تا همواره در پیشگاه کبریایی تو سر تسلیم به زیر افکنده دارم همچون شاخه های پربار درخت انار خانه ی پدری ام در فصل هزار رنگ پاییز.

و خدایا!...

علم با عمل همراه است. پس هر کس دانست عمل کرد.

علم، عمل را فرا می‌خواند، پس اگر آن را پاسخ گوید

می‌ماند وگرنه کوچ می‌کند و می‌رود.

حضرت علی (ع)

پدر و مادر عزیزم!

هرچه می‌اندیشم تحفه‌ای با ارزش نمی‌یابم

که پیشکش حضورتان کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه مسئله‌ی جفت‌شدگی یک سیستم کوانتومی دوترازی به محیط نوسانگری مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مطالعه سه رویکرد مختلف به مدل اسپین– بوزون، یعنی نظریه‌ی اختلال مرتبه‌ی دوم در چارچوب پولارون و رویکرد وردشی که از روش‌های تقریبی برای بررسی دینامیک مدل هستند و محاسبه‌ی عملگر تحول زمانی که یکی از روش‌های دقیق حل معادله‌ی شرودینگر است، معرفی می‌گردند. البته در مورد مدل موردنظر، که هامیلتونی آن مستقل از زمان فرض می‌شود، تنها در دو حالت حدی تونل‌زنی خالص و بایاس خالص می‌توان این حل دقیق را به‌دست آورد. برای حالت حدی بایاس خالص عملگر تحول زمانی در تصویر برهم‌کنش قابل محاسبه است. در این پایان‌نامه مسئله‌ی حل دقیق معادله‌ی شرودینگر در مورد حدی تونل‌زنی خالص به معادله‌ی عملگری ریکاتی مربوط می‌شود. نشان داده می‌شود که فراهم‌آوردن دینامیک کاهش‌یافته‌ی اسپین به‌سختی حل حداقل یک معادله‌ی ریکاتی است. به این منظور، برخلاف روش‌های استاندارد موجود در نظریه‌ی سیستم‌های کوانتومی باز، از رویکردی مبتنی بر نظریه‌ی ماتریس‌های عملگر بلوکی استفاده می‌کنیم. سپس به حل معادله‌ی ریکاتی منسوب به هامیلتونی مدل مورد نظر می‌پردازیم. باید تأکید کنیم که گرچه روش ریکاتی را برای مدل خاصی در نظر گرفته‌ایم اما این روش بسیار کلی است. با این‌وجود سودمندی این روش به توانایی حل معادله‌ی ریکاتی بستگی دارد. در حال حاضر حل این معادله حتی برای سیستم‌های ساده بسیار مشکل است.

واژگان کلیدی: *محیط اسپینی، محیط نوسانگری، مدل اسپین– بوزون، هامیلتونی اسپین– بوزون، معادله‌ی ریکاتی، قطری‌سازی هامیلتونی.*

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

پیشگفتار

یکی از مسائل مهم موجود در عرصه‌های فیزیکی مختلف، برهم‌کنش یک سیستم کوانتومی کوچک با محیطی نسبتاً بزرگ است. برای بررسی دینامیک سیستم کوانتومی مذکور باید شناخت فیزیکی کاملی از سیستم و محیط در اختیار باشد، به‌عبارت دیگر باید به‌توان بهترین مدل توصیف‌کننده‌ی سیستم و محیط را ارائه داد. معروف‌ترین مدل‌هایی که در حال حاضر برای توصیف محیط به‌کار می‌روند مدل‌های **محیط نوسانگری** و **محیط اسپینی** می‌باشند. همچنین در اغلب مسائلی که در حوزه‌ی سیستم‌های کوانتومی باز مطرح می‌شوند، می‌توان سیستم کوانتومی را به یک اسپین $\frac{1}{2}$ یا یک ذره‌ی متحرک یک بعدی نگاشت.

نوشتار حاضر مشتمل بر سه فصل است. در فصل اول علاوه بر توضیح مختصری پیرامون مدل‌سازی فیزیکی برهم‌کنش سیستم- محیط، فرمول‌بندی معادله‌ی اصلی در تقریب بورن- مارکوف برای حرکت براونی کوانتومی و حل دقیقی از یک مدل اسپین- اسپین ساده ارائه می‌گردد.

فصل دوم و سوم به طور کامل به مدل مشهور اسپین- بوزون اختصاص می‌یابد. در فصل دوم، دو روش تقریبی نظریه‌ی اختلال در چارچوب پولارون و روش وردشی برای حل مدل مذکور معرفی می‌شوند. در رویکرد اختلالی به مدل اسپین- بوزون در چارچوب پولارون، عملگر چگالی تعادلی اسپین تا مرتبه‌ی دوم تصحیح محاسبه شده سپس به کمک آن قطبیدگی اسپینی تعیین می‌گردد. در رویکرد وردشی نیز با معرفی یک تابع آزمون برای حالت پایه‌ی مجموعه‌ی سیستم و محیط، حد بالایی انرژی زمینه‌ای مجموعه‌ی مذکور به‌دست می‌آید.

در فصل سوم نیز مدل اسپین- بوزون در دو مورد خاص تونل‌زنی خالص (بایاس صفر) و بایاس خالص (تونل‌زنی صفر) به‌طور دقیق حل می‌گردد. در روند حل مدل اسپین- بوزون بدون تونل‌زنی عملگر تحول زمانی یکانی در تصویر برهم‌کنش محاسبه می‌شود. علاوه‌براین، برای هامیلتونی مدل اسپین- بوزون بدون بایاس به کمک روشی مبتنی بر نظریه‌ی ماتریس‌های عملگر بلوکی، عملگر تحول زمانی یکانی محاسبه می‌گردد. لازم به ذکر است که در این نوشتار ثابت پلانک برابر با واحد فرض می‌شود.

فصل ۱

برهم‌کنش سیستم- محیط

۱-۱ مقدمه

یکی از مسئله‌های رایج در بسیاری از عرصه‌های فیزیک کوانتومی، از اپتیک کوانتومی گرفته تا فیزیک ماده چگال، برهم‌کنش یک سیستم کوانتومی (که به اختصار سیستم گفته می‌شود) با یک اتلاف‌گر بزرگ (که اغلب حمام یا محیط نامیده می‌شود) است. سیستم توسط عامل اختلال خارجی از وضعیت تعادل خارج می‌گردد و جفت‌شدگی با محیط سبب می‌شود که به سمت وضعیت تعادل جدید **واهلش**[۱] کند. سیستم مورد نظر می‌تواند یک اتم، درجه‌ی آزادی اسپینی یک الکترون یا یک هسته، یک ذره‌ی متحرک در میدان پتانسیلی معلوم یا حتی یک سیستم بس‌ذره‌ای باشد. محیط نیز می‌تواند یک میدان الکترومغناطیسی باشد که اتم انرژی خود را در آن گسیل می‌کند یا یک شبکه‌ی کریستالی باشد که با حرکت الکترون درون آن بی‌نظم شود. زمانی‌که سیستم کوانتومی، برای مثال یک محاسبه‌گر کوانتومی، با محیط نوعی پیرامون خود وارد برهم‌کنش می‌شود دو اثر اصلی را در تحول خود درک می‌کند. اولین اثر، اتلاف انرژی سیستم به‌واسطه‌ی واهلش است. دومین اثر ناشی از فرایندی است که یکانی بودن تحول سیستم را از بین می‌برد. این فرایند به **واهمدوسی**[۲] مشهور است. طی فرایند واهمدوسی بین سیستم و محیط هم‌بستگی‌هایی ایجاد می‌شود که سبب نابودی همدوسی کوانتومی بین حالت‌های

---

[۱] Relaxation

[۲] Decoherence

دسترس‌پذیر سیستم می‌گردد. به این دلیل فرایند مذکور مجموعه‌ای تفکیک‌پذیر از حالت‌های خالص را برای سیستم انتخاب می‌نماید، به‌عبارت دیگر درست برخلاف اصل برهم‌نهی در فضای هیلبرت سیستم عمل می‌کند. در واقع محیط سبب می‌شود که فضای هیلبرت سیستم به زیرفضاهایی تفکیک شود که با یکدیگر تداخلی ندارند. این پدیده در مقیاس زمانی τ_{decoh} روی می‌دهد. این مقیاس، معرف زمانی است که یکانی بودن تحول نقض شده و همدوسی کوانتومی از مقدار ۱ (همدوسی کامل) منحرف می‌گردد. معمولاً بازه‌ی زمانی وقوع واهمدوسی بسیار کوتاه‌تر از زمان فروافت (واهلش) است بنابراین ابزاری مانند محاسبه‌گر کوانتومی نسبت به واهمدوسی حساسیت زیادی نشان می‌دهد.

وقوع واهمدوسی اغلب با اتلاف (از دست‌دادن انرژی) همراه است اما در بازه‌ی زمانی مناسب می‌توان از اتلاف انرژی در مقابل اتلاف فازی (واهمدوسی) صرف‌نظر کرد. این وضعیت به واهمدوسی خالص یا **وافازی**[۱] مشهور است و در دو مورد زیر مصداق می‌یابد:

۱. زمانی که هامیلتونی سیستم با هامیلتونی برهم‌کنشی جابه‌جا شود.

۲. برای آن دسته از حالت‌های آغازی سیستم که تحت تأثیر هامیلتونی سیستم بسیار آهسته (در مقایسه با زمان واهمدوسی) تحول می‌یابند.

واهمدوسی و تئوری کوانتومی به‌طور غیر قابل اجتنابی به یکدیگر مربوط هستند. پدیده‌ی واهمدوسی به مرز بین رفتار کوانتومی سیستم‌های میکروسکوپیک و ظهور رفتار کلاسیک مشاهده شده در اشیاء ماکروسکوپیک منسوب می‌شود [۱]. با این توضیحات زمان واهمدوسی τ_{decoh} گستره‌ی انرژی و طولی را مشخص می‌کند که رفتار کوانتومی قابل مشاهده است. این زمان به فاکتورهای گوناگونی از جمله دما، بعد، افت‌وخیزهای خلأ و بی‌نظمی بستگی دارد. بازه‌ی زمانی واهمدوسی بسته به نوع جفت‌شدگی بین سیستم مورد نظر و محیط در گستره‌ی پیکوثانیه (برای سیستم‌های اکسیتونی [۲]) تا دقیقه (در سیستم‌های اسپین هسته‌ای [۳]) قرار می‌گیرد.

در دهه‌ی گذشته و در حوزه‌ی فیزیک، مسئله‌ی واهمدوسی توجه خاصی به خود جلب کرده است [۴–۷]. دلیل این امر پیشرفت روش‌های تجربی است که امکان مشاهده‌ی واهمدوسی را در جالب‌ترین حوزه، یعنی مرز بین دنیای کلاسیک و جهان کوانتومی، فراهم می‌کند [۸]. از دیگر سو واهمدوسی فرایندی مخرب در روند اطلاع‌رسانی کوانتومی به حساب می‌رود [۹]. به‌عبارت دیگر، واهمدوسی فرایندی برگشت‌ناپذیر، غیر قابل کنترل و مصر بر ایجاد هم‌بستگی‌های کوانتومی بین سیستم و محیط است. بنابراین درک کامل این فرایند ضروری به‌نظر می‌رسد.

اکنون این سئوال مطرح می‌شود که چگونه می‌توان اتلاف (انرژی و فاز) را مدل‌سازی کرد و چگونه این اتلاف

---

[۱] Dephasing

سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهد؟ پاسخ اینست که سیستم اتلافی انرژی و فاز خود را به محیط منتقل می‌کند بنابراین جهان فیزیکی در واقع مجموعه‌ی بسته‌ی سیستم و محیط است. این توصیف، مدل "سیستم به‌علاوه‌ی محیط" گفته می‌شود و موفق‌ترین روش برای توصیف اتلاف می‌باشد. برای استفاده از این مدل باید نمایش مناسبی برای سیستم و محیط ارائه داد. در حال حاضر می‌دانیم که بسیاری از (اما نه همه‌ی) سیستم‌های فیزیکی را در انرژی‌های پایین می‌توان به کمک تعداد محدودی "مدل کانونیک" توصیف کرد. در این مدل‌ها یک "سیستم مرکزی" ساده (برای مثال یک نوسانگر یا یک سیستم دوترازی) با محیطی جفت می‌شود. در بسیاری از کارهای علمی **محیط** با مجموعه‌ای از نوسانگرها یا اسپین‌ها توصیف می‌گردد. در مدل‌های محیط نوسانگری، محیط با مجموعه‌ای از نوسانگرهای جفت‌نشده مدل‌سازی می‌شود. مدل اسپین- بوزون و مدل Caldeira- Legget مثال‌هایی از این نوع هستند. تفاوت دو مدل اخیر در اینست که مدل Caldeira- Legget به بررسی جفت‌شدگی یک **ذره‌ی در حال تونل‌زنی** به محیط نوسانگری می‌پردازد [۱۰] در حالی که مدل اسپین- بوزون جفت‌شدگی یک **سیستم دوترازی** به محیط نوسانگری را مورد بحث قرار می‌دهد. اما هر دو مدل مذکور از رویکردی استخراج می‌شوند که توسط فاینمن و ورنون برای توصیف دینامیک یک سیستم مرکزی که به‌طور ضعیف به محیطی با $\mathbf{N}$ مد جفت می‌شود، ارائه شد. مدل‌های نوسانگری برای توصیف محیطی با N مد واجایگزیده مناسب هستند. در این مدل‌ها جفت‌شدگی به هر مد محیطی با ضریب $\frac{1}{\sqrt{N}}$ متناسب می‌باشد که به‌ازای N بزرگ، به صفر میل می‌کند.
در مورد محیط‌های اسپینی باید گفت که فضای هیلبرت متناهی هر اسپین محیطی سبب می‌شود این نوع مدل‌سازی برای دینامیک کم- انرژی مجموعه‌ای از مدهای محیطی جایگزیده مناسب باشد.

در بیش‌تر کارهای علمی، با این فرض ضمنی که مدهای محیطی واجایگزیده بر فیزیک مسئله غلبه دارند، نمایش محیط نوسانگری برای محیط انتخاب می‌شود. اما آزمایش‌های انجام شده روی سیستم‌های نانومغناطیسی کوانتومی و رساناهای مزوسکوپیک و همچنین مناظرات تئوری در مورد سازوکار واهمدوسی در طبیعت نشان می‌دهند که چنین نگرشی به مسئله جامعیت ندارد. برای مثال در دماهای پایین، آنتروپی و ظرفیت گرمایی (تقریباً) همه‌ی سیستم‌های فیزیکی به مدهای موضعی (نظیر اسپین‌های هسته‌ای) مربوط می‌شود. این مدهای موضعی در برهم‌کنش با هر مد واجایگزیده و حتی در برهم‌کنش با یکدیگر فضای فاز کوچکی در دسترس دارند و بنابراین در گستره‌ی دماهای پایین بسیار آهسته واهلش می‌کنند. با این‌وجود این مدها به هر مختصه‌ی جمعی ماکروسکوپیک یا مزوسکوپیک قویاً جفت شده و بنابراین به‌راحتی مختل می‌گردند. در برخی موارد بستگی‌هایی نظیر $\frac{1}{N}$ برای جفت‌شدگی در مدل‌های اسپینی در نظر گرفته می‌شود اما این جفت‌شدگی مستقل از N است. در حقیقت دیده می‌شود که مدل‌های نوسانگری و اسپینی رفتار بسیار متفاوتی دارند [۱۱]. طبق رویکرد کلی فاینمن- ورنون در حد جفت‌شدگی‌های ضعیف می‌توان محیط اسپینی را به محیط نوسانگری نگاشت اما مسئله این‌جاست که نوعی از برهم‌کنش سیستم و محیط اسپینی مورد توجه است که در رده‌ی جفت‌شدگی‌های قوی قرار می‌گیرد، درست

جایی که نگاشت به محیط نوسانگری اعتبار خود را از دست می‌دهد. از دلایل علاقه‌مندی فیزیکدانان به مدل‌های محیط اسپینی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. پیشرفت‌های سریع در زمینه فرایندهای کوانتومی نظیر ساخت کامپیوتر کوانتومی به کمک نیمرساناها، ابررساناها و مگنت‌های نانویی مستلزم حل معضل واهمدوسی است. واهمدوسی در چنین سیستم‌هایی در اصل به دلیل جفت‌شدگی به اسپین‌های الکترونی و هسته‌ای رخ می‌دهد.

۲. درک سازوکار واهمدوسی و اتلاف کوانتومی در طبیعت به منظور درک گذار از فیزیک کوانتومی به فیزیک کلاسیک با **افزایش** عواملی چون دما، اندازه، میدان‌های خارجی و جفت‌شدگی به محیط بسیار مورد توجه است.

۳. مدل‌های محیط اسپینی و همچنین محیط نوسانگری در رژیم خاصی از پارامترها به مدل‌های مهم موجود در نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی نگاشته می‌شوند. به‌عنوان نمونه مدل اسپین- بوزون در شرایط پارامتری مناسب به مدل‌های Kondo، Thirring و یا sine- Gordon تبدیل می‌شود.

۱-۲ مدل‌های کانونیک

در جهان فیزیکی هیچ سیستم بسته‌ای وجود ندارد به این معنا که هر سیستمی با محیط خود وارد برهم‌کنش می‌شود. از این‌رو مطالعه‌ی دینامیک یک سیستم دلخواه مشکل به نظر می‌رسد. با این‌وجود در بسیاری از موقعیت‌های فیزیکی بررسی دینامیک کم- انرژی یک سیستم جفت‌شده به محیط مورد نظر است. ساده‌سازی مناسب در این نوع مسائل می‌تواند در درک دینامیک سیستم مورد نظر مفید واقع شود. یکی از این ساده‌سازی‌ها، محدود نمودن بررسی به گستره‌ی انرژی دسترس‌پذیر سیستم یا **کوچک‌سازی فضای هیلبرت** است. آنچه در این محدود سازی رخ می‌دهد کنار گذاشتن دسته‌ای از درجات آزادی سیستم است که در گستره‌ی انرژی مورد نظر در فیزیک مسئله سهم مستقیمی ندارند، به این ترتیب هامیلتونی انرژی- بالای سیستم به یک هامیلتونی مؤثر تبدیل می‌شود.

برای هر سیستم کوانتومی یک هامیلتونی خالص و منطقی وجود دارد که برای انرژی‌های بسیار کمتر از آستانه‌ی فرابنفش، E_C، نیز معتبر بوده و شکل زیر را می‌پذیرد:

$$H_{eff}(E_C) = H_S(\tilde{P},\tilde{X}) + H_{int}(\tilde{P},\tilde{X};\tilde{p},\tilde{x}) + H_{env}(\tilde{p},\tilde{x}), \qquad E \ll E_C \qquad (۱-۱)$$

در رابطه‌ی بالا $\tilde{X}$ یک مختصه‌ی $\tilde{m}$ بعدی و $\tilde{P}$ تکانه‌ی هم‌یوغ آن است که سیستم یا درجه‌ی آزادی مورد نظر را توصیف می‌کنند. $(\tilde{p},\tilde{x})$ نیز مختصات $\tilde{n}$ بعدی توصیف‌کننده‌ی محیط می‌باشند و ممکن است با $(\tilde{P},\tilde{X})$ جفت شوند.

نکته‌ی قابل توجه اینست که اثر اجتناب‌ناپذیر این محدودسازی ، ظهور جفت‌شدگی‌های جدید بین مدهای کم- انرژی است. بنابراین به نظر می‌رسد که استفاده از این ساده‌سازی اقدام مناسبی نباشد اما علی‌رغم ظهور جفت‌شدگی‌های جدید در گستره‌ی انرژی‌های پایین، به دلیل تعداد کم متغیرهای موجود در هامیلتونی مؤثر، بررسی این هامیلتونی از بررسی هامیلتونی انرژی- بالا ساده‌تر است. در ادامه مدل‌های موجود برای توصیف سیستم و محیط در حد انرژی‌های پایین معرفی می‌گردند.

۱-۲-۱ مدل‌سازی سیستم

در بسیاری از موارد حتی اگر ساختار میکروسکوپیک دینامیک سیستم اصلی بسیار پیچیده باشد، دینامیک مورد نظر را می‌توان به کمک یک یا دو مختصه توصیف نمود. این مختصات می‌توانند **گسسته** یا **پیوسته** باشند. هرگاه سیستم مانند یک نقطه‌ی جرمی به جرم M که با مختصات فضای فاز $\hat{X}$ (مکان) و $\hat{P}$ (تکانه) در پتانسیل $V(\hat{X})$ قرار گرفته رفتار کند، برای توصیف رفتار آن از مختصات پیوسته استفاده می‌شود. هامیلتونی چنین سیستمی از رابطه‌ی

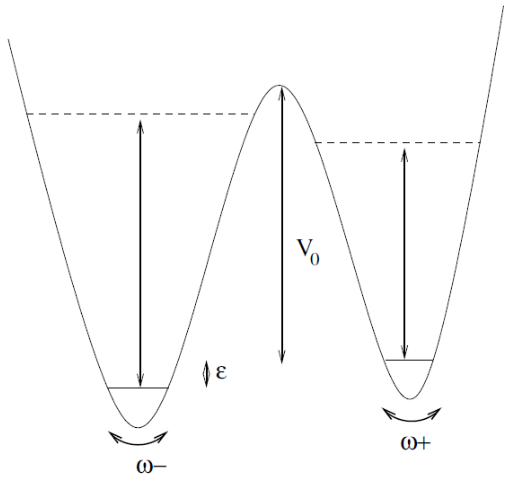
$$H_S(P, X) = \frac{P^۲}{۲M} + V(X) \qquad (۲-۱)$$

تبعیت می‌کند.

زمانی‌که سیستم اصلی شبیه به یک سیستم دوترازی رفتار کند، مختصات مناسب برای توصیف آن، مختصات گسسته می‌باشد. سیستم دوترازی مذکور می‌تواند یک سیستم دوترازی ذاتی نظیر قطبش یک فوتون باشد. علاوه‌براین سیستمی که یک درجه‌ی آزادی پیوسته دارد و در پتانسیلی قرار می‌گیرد که دارای دو کمینه است، اگر ارتفاع سد ($V_\circ$) در مقایسه با انرژی کمینه‌ها (ω_+ و ω_-) بسیار بزرگ باشد، در عمل یک سیستم دوترازی است (شکل(۱-۱)). دینامیک چنین سیستمی شبیه به دینامیک ذره‌ای است که به یک چاه پتانسیل دوگانه محدود شده باشد. در بسیاری از موارد فیزیکی، غیر از حالت پایه تنها یک یا دو حالت برانگیخته در هر چاه قرار می‌گیرد اما در عمل این حالت‌های برانگیخته جمعیتی نمی‌پذیرند. از این‌رو سیستم اصلی به‌طور مؤثر دوترازی است و فضای هیلبرت آن با حالت‌های مربوط به جایگزیدگی در **چاه چپ** و **چاه راست** پوشانده می‌شود. این دو حالت را می‌توان به‌ترتیب به دو حالت کوانتومی $\langle\circ|$ و $\langle۱|$ مربوط به ذره‌ای با اسپین $\frac{۱}{۲}$ نگاشت.

دینامیک ذاتی سیستم دوترازی به‌واسطه‌ی پدیده‌ی **تونل‌زنی** بین چاه‌های چپ و راست، منجر به گذار بین دو حالت کوانتومی $\langle\circ|$ و $\langle۱|$ می‌گردد. اگر این دو حالت کوانتومی ویژه‌حالت‌های عملگر $\hat{\sigma}_z$ پاؤلی باشند، تونل‌زنی با جمله‌ای شبیه به

$$H_S^{tunnel} = \frac{۱}{۲}\Delta_\circ(|\circ\rangle\langle ۱| + |۱\rangle\langle\circ|) = \frac{۱}{۲}\Delta_\circ\hat{\sigma}_x \qquad (۳-۱)$$



شکل ۱-۱: چاه پتانسیل دوگانه

در هامیلتونی کل ظاهر می‌شود که در آن $\Delta_\circ$ عنصر ماتریسی تونل‌زنی است.

تفاوت بین انرژی حالت‌های پایه در دو چاه چپ و راست که انرژی عدم تقارن[۱] (یا بایاس) نامیده می‌شود، اغلب در مقایسه با تفاوت انرژی بین دو حالت دسترس‌پذیر در هر یک از دو چاه کوچک است. از این‌رو حالت‌های کم-انرژی در دو چاه تقریباً هم‌خط در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین ذره‌ای که در یکی از چاه‌ها جایگزیده است و با تونل‌زنی به چاه دیگر گذار می‌کند، در عمل نمی‌تواند در حالت‌های برانگیخته‌ی چاه مقصد ظاهر گردد.

در حالت کلی، در دماهای به‌قدر کافی پایین (یا انرژی‌های به‌قدر کافی کم) هامیلتونی یک سیستم دوترازی از رابطه‌ی

$$H_S = \frac{1}{2}\Delta_\circ \hat{\sigma}_x + \frac{1}{2}\epsilon\hat{\sigma}_z \tag{۱-۴}$$

تبعیت می‌کند. ویژه‌حالت‌ها ($|\psi_\pm\rangle$) و ویژه‌مقادیر ($E_\pm$) هامیلتونی فوق عبارتند از:

$$|\psi_\pm\rangle = \left[\frac{1}{(E_\pm + \epsilon)^2 + \Delta_\circ^2}\right]^{\frac{1}{2}} \left[(E_\pm + \epsilon)|1\rangle - \Delta_\circ|0\rangle\right] \tag{۱-۵}$$

و

$$E_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_\circ^2 + \epsilon^2} \tag{۱-۶}$$

به کمک رابطه‌ی (۱-۵) می‌توان معادله‌ی شرودینگر یک سیستم دوترازی منزوی، $\partial_t|\Psi_S\rangle = -iH_S|\Psi_S\rangle$، را حل و عملگر چگالی آن را فراهم نمود. عملگر چگالی حاوی اطلاعات آماری مفیدی است. درایه‌های قطری این عملگر احتمال حضور سیستم در هر یک از چاه‌ها و جملات غیر قطری آن تداخل بین احتمال حضور در چاه‌های چپ و راست را نشان می‌دهند.

---

[۱] Asymmetry energy

۱-۲-۲ مدل‌سازی محیط

محیط نوسانگری

محیط نوسانگری معادل با شبه‌پیوستاری از مدهای **واجایگزیده‌ی** [۱] میدان بوزونی است که همدوسی و انرژی سیستم اصلی به‌طور تصادفی و برگشت‌ناپذیر بین آن‌ها توزیع می‌گردد. منظور از واجایگزیدگی مدها اینست که تابع موج هر نوسانگر هماهنگ (یعنی هر مد میدان بوزونی) در ناحیه‌ی فضایی نسبتاً بزرگی پهن می‌شود. این واجایگزیدگی، ویژگی ذاتی محیط‌های نوسانگری است و سبب برهم پوشانی قوی مدهای میدان با یکدیگر می‌گردد. از این‌رو سیستم اصلی با رفتار جمعی محیط روبه‌رو است و انتظار می‌رود تعداد مدهای میدان در ضرایب جفت‌شدگی سیستم اصلی و محیط ظاهر شود. در مدل‌های محیط نوسانگری جفت‌شدگی به هر مد محیطی با ضریب $\frac{1}{\sqrt{N}}$ متناسب فرض می‌شود. با این تناسب جفت‌شدگی سیستم- محیط در حد ترمودینامیکی خوش‌تعریف خواهد بود. اگرچه سیستم اصلی به‌شدت تحت تأثیر **اثر جمعی** [۲] نوسانگرهای محیط است، با این‌وجود هر نوسانگر محیط اثر قابل اغماضی از جفت‌شدگی با سیستم درک می‌کند و هر اثری که از سیستم اصلی به محیط می‌رسد معمولاً به‌سرعت نابود می‌گردد.

هامیلتونی مؤثر برای مدل‌های نوسانگری به شکل کلی

$$H_{eff} = H_S(\tilde{P},\tilde{X}) + \sum_{j=1}^{N}\left[F_j(\tilde{P},\tilde{X})\hat{x}_j + G_j(\tilde{P},\tilde{X})\hat{p}_j\right] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\hat{p}_j^2}{m_j} + m_j\omega_j^2\hat{x}_j^2\right] \quad (۱-۷)$$

در نظر گرفته می‌شود. توابع جفت‌شدگی F_j و G_j مضربی از $\frac{1}{\sqrt{N}}$ هستند طوری‌که در حد ترمودینامیکی به سمت صفر میل می‌کنند. لازم به ذکر است که جفت‌شدگی‌های مرتبه‌ی بالاتر در هامیلتونی سیستم- محیط را می‌توان به جفت‌شدگی خطی فوق نگاشت مشروط بر این‌که ضرایب جفت‌شدگی تابعیت دمایی بپذیرند [۱۲].

یک مورد خاص از هامیلتونی(۱-۷)، فرم جفت‌شدگی دو خطی فاینمن- ورنون است:

$$H_{eff} = H_S(\tilde{P},\tilde{X}) + \tilde{X}\otimes\sum_{j=1}^{N}c_j\hat{x}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\hat{p}_j^2}{m_j} + m_j\omega_j^2\hat{x}_j^2\right] \quad (۱-۸)$$

که در رابطه‌ی بالا $c_j \sim O(N^{-\frac{1}{2}})$. محاسبات نشان می‌دهند که برهم‌کنش‌هایی از نوع $\tilde{X}\otimes\sum_{j=1}^{N}c_j\hat{x}_j$ سبب بازبهنجارش [۳] پتانسیل سیستم اصلی می‌شوند. برای آن‌که اطمینان حاصل شود تحول یکانی سیستم اصلی فقط ناشی از هامیلتونی خود سیستم است و این مطلب در فرمول‌بندی نیز ظاهر شود، جمله‌ی شمارشی [۴] $H_c = \sum_{j=1}^{N}\frac{\tilde{X}^2c_j^2}{2m_j\omega_j^2}$

---

[۱] Delocalized

[۲] Collective influence

[۳] Renormalization

[۴] Counter term

را به هامیلتونی کل (۱-۸) می‌افزایند. در معادلات بالا هامیلتونی H_S مشخص‌کننده‌ی سیستم اصلی است. این هامیلتونی می‌تواند یک ذره‌ی در حال تونل‌زنی [۱۰، ۱۳]، یک ذره‌ی آزاد [۱۴، ۱۵] یا مقید [۱۳، ۱۶] و یا حتی یک نوسانگر هماهنگ [۱۳، ۱۷] را توصیف کند. در بخش (۱-۳-۱) به بررسی یک نمونه از مدل‌های محیط نوسانگری می‌پردازیم و بررسی مدل معروف اسپین- بوزون را به فصل‌های بعد موکول می‌کنیم.

محیط اسپینی

محیط اسپینی برخلاف محیط نوسانگری مجموعه‌ای از مدهای جایگزیده[۱] است. منظور از جایگزیدگی مدها اینست که تابع موج منسوب به هر یک از این مدها به ناحیه‌ی فضایی بسیار کوچکی محدود می‌شود. به‌عبارت دیگر، هر مد جایگزیده توسط یک فضای هیلبرت متناهی‌الابعاد و انرژی قطع متناهی توصیف می‌گردد. بنابراین این مدها را می‌توان به مجموعه‌ای از حالت‌های گسسته نگاشت. در اغلب موارد فقط دو حالت دسترس‌پذیر برای هر مد وجود دارد. از این‌رو مجموعه‌ی مدهای جایگزیده را می‌توان به محیطی از ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$ مدل‌سازی نمود. جایگزیدگی مدها سبب می‌شود که توابع موج مدها هم‌پوشانی بسیار کوچکی داشته باشند و بنابراین انتظار نمی‌رود تعداد مدهای محیطی در ثابت جفت‌شدگی سیستم- محیط ظاهر گردد.

تجربه نشان داده است زمانی‌که دمای مجموعه‌ی سیستم اصلی و محیط کاهش یابد افت‌وخیزهای[۲] ذاتی در محیط (نظیر دینامیک القاء شده توسط هامیلتونی محیط و همچنین برهم‌کنش‌های بین اسپینی) تقریباً از بین می‌روند. با این‌وجود محیط اسپینی حتی در دماهای نزدیک به صفر مطلق اثرات واهمدوسی چشمگیری بر سیستم اصلی وارد می‌کند درحالی‌که در چنین دماهایی اثرات واهمدوس‌کنندگی محیط نوسانگری قابل اغماض است.

در اغلب موارد فیزیکی، مقیاس انرژی منسوب به شدت جفت‌شدگی هر مد اسپینی به مختصات سیستم اصلی بر دیگر مقیاس‌های انرژی (منسوب به دیگر جملات موجود در هامیلتونی کل) غلبه دارد بدین جهت این نوع محیط به شدت تحت تأثیر سیستم اصلی خواهد بود. به‌عبارت روشن‌تر جفت‌شدگی سیستم اصلی و محیط اسپینی در رده‌ی جفت‌شدگی‌های قوی قرار می‌گیرد. یکی از مسائلی که در این حیطه مطرح می‌گردد، مسئله‌ی یک اسپین (به‌عنوان سیستم مرکزی) است که به‌طور خطی به مجموعه‌ای از اسپین‌ها جفت می‌شود. این مسئله به مدل اسپین- اسپین یا **اسپین مرکزی** مشهور است. یکی از موقعیت‌های فیزیکی که در آن مدل اسپین- اسپین اهمیت می‌یابد زمانی است که یک سیستم دوترازی (مانند یک کیوبیت ابررسانندگی) قویاً به محیطی با دمای پایین جفت می‌شود. مسئله‌ی دیگر، برهم‌کنش یک نوسانگر هماهنگ با یک محیط اسپینی است که اخیراً در مباحث مربوط به واهمدوسی و اتلاف در سیستم‌های کوانتوم- الکترومکانیکی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این بخش یک

[۱] Localized Modes

[۲] Fluctuations