بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم– گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش جبر لی)

تحت عنوان:

چنبره های لی – یک مشخصه ساده از جبرهای لی آفین تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر خلیلی

استاد مشاور:

دکتر آزاد

تدوین:

افسانه روستائی

۱۳۸۸

چکیده

در این رساله، ما وجود یک فرم دوخطی مدرج غیرصفر را روی یک چنبره لی نشان می‌دهیم. وجود چنین فرمی به کمک وجود یک فرم مدرج غیرصفر روی چنبره‌های ساختارپذیر اثبات می‌شود. وجود فرم مدرج روی یک چنبره لی، یک مشخصه ساده از هسته یک جبر لی آفین تعمیم یافته است. به عبارت دقیق‌تر، هسته هر جبر لی آفین تعمیم یافته، یک چنبره لی است و نیز هر چنبره لی بدون مرکز به‌عنوان هسته بدون مرکز یک جبر لی آفین تعمیم یافته است. همچنین در این رساله نشان می‌دهیم که یک فرم مدرج روی یک چنبره لی تا حد یک اسکالر از میدان $\mathbb{F}$ یکتاست و اگر چنبره لی بدون مرکز باشد، ناتباهیده نیز است.

پیش گفتار

در سال ۱۹۹۰ دو فیزیکدان به نام هرخ کرون و تورسانی نوعی از جبرهای لی با بعد نامتناهی را به نام جبرهای لی تحویل‌ناپذیر شبه ـ ساده، روی میدان اعداد مختلط بصورت اصول موضوعه معرفی می‌کنند و همچنین به طبقه‌بندی سیستم‌های ریشه آنها می‌پردازند. آنها در طبقه‌بندی سیستم‌های ریشه این نوع از جبرهای لی دچار اشتباه می‌شوند. در سال ۱۹۹۷، آلیسون، اعظم، برمن، گائو و پیانزولا این نوع از جبرهای لی را به طور اصول موضوعه دقیق‌تری تحت عنوان جبرهای لی آفین تعمیم یافته در مقاله [۳] تعریف می‌کنند و طبقه‌بندی کاملی از سیستم‌های ریشه این نوع از جبرهای لی انجام می‌دهند. این جبرهای لی شامل جبرهای لی ساده با بعد متناهی و نیز جبرهای لی کز-مودی هستند. مطالعه هسته جبرهای لی آفین تعمیم یافته نیز به نوبه خود موضوع مهمی در تئوری جبرهای لی است. هسته جبرهای لی آفین تعمیم یافته، شامل جبرهای مشتقی از جبرهای آفین کز-مودی (که خود نیز یک جبر لی آفین کز-مودی است) می‌باشد. در این رساله ما به بررسی هسته یک جبر لی آفین تعمیم یافته می‌پردازیم و یک تعریف مستقیم و ساده از آن بدست می آوریم. در طبقه‌بندی هسته، خواص مشخصی از میدان پایه که جبر لی روی آن تعریف می‌شود، لازم نیست. به‌علاوه در طبقه‌بندی هسته، ارتباط تنگاتنگی بین جبرهای لی آفین تعمیم یافته و جبرهای لی ساده همسانگرد با بعد متناهی تبیین می‌شود. بنابراین لازم است میدان پایه را میدانی در نظر بگیریم که لزوماً بسته جبری نیست. جبرهای لی متناظر با هسته یک جبر لی آفین تعمیم یافته را روی میدانی مانند $\mathbb{F}$ در نظر می‌گیریم که از مشخصه صفر است. چنین جبرهای لی را یک n-چنبره لی یا بطور ساده یک چنبره لی نامگذاری می‌کنیم. به‌علاوه یک n-چنبره لی روی میدان اعداد مختلط ، هسته یک جبر لی آفین تعمیم یافته را مشخص می‌سازد. اکنون ما بطور اختصار به سه اصل موضوعی که در تعریف یک n-چنبره لی به کار می‌روند، می‌پردازیم. ابتدا، اولین اصل بیان می‌کند که جبر لی دارای دو مدرج سازی است. یک نوع توسط یک سیستم ریشه تحویل‌ناپذیر متناهی Δ (که لزوماً کاهشی نیست) مدرج می‌شود و نوع دوم توسط گروه آبلی $\mathbb{Z}^n$، مدرج می‌شود. جبرهای لی آفین کز-مودی نیز دارای

دو مدرج فوق هستند (البته با $n = 1$). اصل موضوع دوم که از خواص مهم و اساسی برای جبرهای لی ساده همسانگرد با بعد متناهی است، موسوم به خاصیت تقسیمی است. این خاصیت معادل با خاصیت وارون‌پذیری جبرهای یکدار مختصاتی در جبر لی است. جبرهای لی که واجد این دو اصل موضوع باشند، به جبرهای لی $(\Delta, \mathbb{Z}^n)$-مدرج تقسیمی نامگذاری می‌شوند. این نوع جبرهای لی قبلاً مورد توجه قرار گرفتند. اما طبقه‌بندی آنها مشکل به نظر می‌رسد. سومین اصل موضوع بیان می‌کند که بعد فضای همگن معینی نسبت به دو مدرج فوق، حداکثر یک است (خاصیت یک بعدی). با افزودن چنین فرضی جبرهای مختصاتی موجود در جبر لی به بیان متعارف بصورت یک جبر چند جمله‌ای‌های لوران با n متغیر در رده‌های متعددی از جبرهای یکدار شرکت پذیر، متناوب، جردن یا ساختارپذیر است. به بیان دیگر این نوع جبرها را n- چنبره یا بطور ساده چنبره می‌نامیم. اگر چنبره شرکت‌پذیر باشد، آنگاه یک گروه جبری پیچشی $\mathbb{F}^t[\mathbb{Z}^n]$ یا یک چنبره کوانتوم $\mathbb{F}_q[t_1^{\pm 1}, ..., t_n^{\pm 1}]$ است. لازم به ذکر است که چنبره‌ها از برخی جنبه‌ها ارتباط با جبری با بعد نامتناهی دارند و به‌علاوه اغلب آنها می‌توانند در یک جبر تقسیمی با بعد متناهی روی میدان معینی نشانده شوند.

چنبره‌های لی، علاوه بر ارتباط با تئوری جبرهای لی آفین تعمیم یافته در مطالعه جبرهای لی $\mathbb{Z}^n$-مدرج نیز مناسب هستند. یک n- چنبره لی بدون مرکز، یک جبر لی $\mathbb{Z}^n$ - مدرج است که ساده مدرج نیز است، یعنی ایده آل $\mathbb{Z}^n$ - مدرج غیربدیهی ندارد (ر.ک. لم ۶.۴ [۲۹]). برای $n = 1$، این نوع از جبرهای لی همان جبرهای لی $\mathbb{Z}$-مدرج می‌باشند که ساده مدرج نیز هستند و در مقاله[۱۸] با شرایط معینی روی بعد فضاهای همگن، طبقه‌بندی شده‌اند. طبقه‌بندی جبرهای لی $\mathbb{Z}^n$-مدرج که ساده مدرج باشند، تا کنون انجام نشده است و به‌عنوان یک سئوال باز مطرح است (برای جبرهای $\mathbb{Z}^2$ - مدرج با محدودیت‌های معینی می توانید به نتایج در مقاله[۲۱] رجوع کنید). برای طبقه‌بندی ۱ - چنبره‌های لی بدون مرکز می‌توانید به جبرهای حلقوی (احتمالاً پیچشی) رجوع کنید.

در مقاله[۸]، هسته یک جبر لی آفین تعمیم یافته مطالعه می‌شود. به‌وضوح این بررسی نشان می‌دهد که آنها همان چنبره‌های لی هستند. اما برای اینکه ثابت شود که هر چنبره لی به‌عنوان

هسته یک جبر لی آفین تعمیم یافته است، ما به وجود و یافتن یک فرم مدرج غیرصفر روی چنبره‌های لی نیازمندیم، زیرا یکی از اصول موضوعه روی یک جبر لی آفین تعمیم یافته وجود یک فرم دوخطی متقارن، پایا و ناتباهیده روی آن است. چنبره‌های لی بدلیل اینکه با بعد نامتناهی هستند، وجود چنین فرمی به راحتی قابل اثبات نیست. برای اثبات چنین فرمی ابتدا در لم ۹.۲.۲ ثابت می کنیم که اگر روی یک چنبره لی چنین فرمی باشد، لازم است در خواص قوی صدق کند. به‌عنوان مثال باید ثابت شود که روی چنیره‌های لی بدون مرکز ناتباهیده باشد. با این خاصیت می‌توانیم چنین فرمی را تعریف کنیم. سپس به کمک این لم در قضیه ۱۰.۲.۲ ثابت می‌کنیم که یک فرم مدرج غیرصفر روی یک چنبره لی تا حد مضربی از یک اسکالر یکتاست.

برای جبر لی Δـمدرج $L = \oplus_{\mu\in\Delta} L_\mu$، ابتدا نشان می‌دهیم که یک فرم دوخطی معینی روی فضای $\oplus_{\mu\in\Delta} L_\mu$ وجود دارد و سپس این فرم را روی L توسیع می‌دهیم. روش اثبات مشابه روشی است که وجود فرم روی جبر لی تیتز—کانتور—کوشر متناظر با یک جبر جردن بطوریکه جبر جردن دارای یک فرم باشد، نشان داده می‌شود. و یا مشابه وجود فرم روی جبر لی کانتور متناظر با یک جبر ساختارپذیری که دارای یک فرم باشد، است. (ر.ک. [۲۲]). همچنین وجود فرم روی L مشابه روش متعارفی است که روی جبر لی کز—مودی تقارن‌پذیر در صفحه ۱۸ [۱۷] بیان شده است. با این روش مسئله وجود فرم منجر به وجود فرم روی چنبره لی از نوع BC_1 می‌شود.

یک چنبره لی از نوع BC_1 توسط یک چنبره ساختارپذیر مشخص می‌شود (ر.ک. لم ۱.۳.۳). ما نشان خواهیم داد که وجود یک فرم مدرج غیرصفر روی یک چنبره لی از نوع BC_1، توسط وجود فرم مدرج غیرصفر روی یک چنبره ساختارپذیر است (ر.ک. لم ۷.۳.۳). قابل ذکر است با بکار بردن نتایج شیفر($[S]$)، این اثبات میسر می‌شود. البته n ـ چنبره‌های ساختارپذیر تاکنون طبقه‌بندی نشده‌اند. اما آلیسون و یوشی در مقاله[۹]، توانستند ۲ـ چنبره‌های ساختارپذیر را طبقه‌بندی نمایند. گرچه از قبل ثابت شده است که چنبره‌های جردن که زیرکلاسی از چنبره‌های ساختارپذیرند، یک فرم مدرج ناتباهیده را می پذیرند (ر.ک. [۲۰]). با بکار بردن این نتایج ثابت می‌شود که هر n ـ چنبره ساختارپذیر نیز یک فرم مدرج غیرصفر ناتباهیده را می‌پذیرد. بدین ترتیب ثابت می‌شود که هر n ـ چنبره لی بدون مرکز روی میدان اعداد مختلط به‌عنوان هسته

یک جبر لی آفین تعمیم یافته است. سرانجام در فصل آخر این رساله، به کمک روشی که در مقاله[۳] بیان می‌شود، با شروع از یک چنبره لی بدون مرکز روی $\mathbb{F}$ (نه لزوماً روی $\mathbb{C}$) و سپس با افزودن فضاهای برداری معینی به آن، می‌توان به یک جبر لی آفین تعمیم یافته روی میدان دلخواه $\mathbb{F}$ دست یافت. همچنین ثابت می‌شود که سیستم ریشه چنین جبرهای لی، یک سیستم ریشه آفین تعمیم یافته است.

فهرست مطالب

⋆ ⋆ ⋆

فصل ۱

مقدماتی بر جبرهای لی

در این فصل مطالبی که در این پایان‌نامه به آن نیاز می‌شود به اختصار معرفی می‌گردد.

۱.۱ جبرهای لی با بعد متناهی و سیستم ریشه متناهی

۱.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم V یک فضای برداری متناهی البعد و F یک میدان باشد. نگاشت $(.,.) : V \times V \to F$ یک فرم روی V می‌باشد. فرم $(.,.)$ را دوخطی نامیم هرگاه نسبت به مولفه اول و دوم خطی باشد. فرم $(.,.)$، متقارن است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in V$،

$$(x,y) = (y,x)$$

۲.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و $(.,.) : V \times V \to R$ ضرب داخلی باشد فرم را معین مثبت گوئیم هرگاه برای هر $\alpha \in V$، $(\alpha,\alpha) \geq ۰$.

۳.۱.۱ گزاره .

فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و P مجموعه‌ای متناهی از عملگرهای خطی روی V باشد به طوری که برای هر $T, S \in P$، $TS = ST$. اگر عناصر P قطری‌شدنی باشند، در این صورت همه آنها همزمان قطری‌شدنی هستند. بنابراین V مجموع مستقیمی از زیر فضاهایی است که عناصر آن بردارهای ویژه برای همه عملگرهای عضو P هستند.

برهان . ر.ک. جبر خطی هافمن .

۴.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. A را یک $\mathbb{F}$ـجبر گوئیم هرگاه نگاشت $(x,y) \mapsto xy$ از $A \times A$ به A وجود داشته باشد بطوریکه

الف) برای هر $x, y, z \in A$، $(x+y)z = xz + yz$ و $x(y+z) = xy + xz$،

ب) برای هر $x, y \in A$ و $c \in \mathbb{F}$، $c(xy) = (cx)y = x(cy)$.

۵.۱.۱ تعریف .

فرض کنید R حلقه باشد و M مجموعه‌ای ناتهی. ۱۸ را، همراه با عمل جمع $+ : M \times M \to M$ و ضرب در اسکالر $. : R \times M \to M$، Rـمدول چپ می‌نامیم اگر

۱) $(M,+)$ گروهی آبلی باشد،

۲) به ازای هر دو عضو از M مثل x و y و هر عضو از R مثل r، $r(x+y) = rx + ry$،

۳) به ازای هر عضو از M مثل x و هر دو عضو از R مثل r و s، $(r+s)x = rx + sx$،

۴) به ازای هر عضو از M مثل x و هر دو عضو از R مثل r و s، $(rs)x = r(sx)$،

۵) به ازای هر عضو از M مثل x، $1x = x$.

۶.۱.۱ تذکر .

مانند تعریف Rـمدول چپ می‌توانیم Rـ مدول راست را نیز تعریف کنیم. به ازای هر حلقه مثل R، مجموعه ناتهی M را همراه با عمل جمع $+ : M \times M \to M$ و ضرب در اسکالر $. : M \times R \to M$، Rـمدول راست می‌نامیم هرگاه $(M,+)$ گروه آبلی باشد و به ازای هر دو عضو از M مثل x و y و هر دو عضو از R مثل r و s،

۱) $(x+y)r = xr + yr$،

۲) $x(r+s) = xr + xs$،

۳) $x(rs) = (xr)s$،

۴) $x\,۱ = x$.

۷.۱.۱ تعریف .

اگر R یک حلقهٔ یکدار باشد و F یک R ـ مدول باشد که یک پایه غیر تهی X داشته باشد، آنگاه به F یک R ـ مدول آزاد روی X گوئیم.

۸.۱.۱ تعریف .

اگر G یک گروه باشد که هر عنصر آن مرتبه متناهی داشته باشد، آنگاه G را یک گروه تابدار[۱] گوئیم. گروه G را گروه بی‌تاب[۲] (تابدار آزاد) گوئیم، هرگاه همه عناصر آن بجز عنصر همانی از مرتبه نامتناهی باشند.

۹.۱.۱ تعریف .

۱) فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F و G یک گروه آبلی باشد. V را مدرج شده بوسیله G یا $G-$ مدرج گوئیم اگر یک خانواده از زیر فضاهای V مانند $\{V^\alpha\}_{\alpha\in G}$ وجود داشته باشد به قسمی که $V = \oplus_{\alpha\in G} V^\alpha$. برای هر $\alpha \in G$، V^α زیرفضایی از درجه α است. اگر $v \in V$

---

[۱] Torsion

[۲] Torsion-free

در نتیجه $v = \Sigma_{\alpha\in\phi} v^\alpha$ که $v^\alpha \in V^\alpha$، در این صورت v^α را مولفه همگن (ازدرجه α) می‌نامیم .

۲) A را یک جبرGـ مدرج گوئیم هرگاه اولا A یک فضای برداری G $-$ مدرج و ثانیا برای هر $\alpha, \beta \in G$، $A^\alpha A^\beta \subset A^{\alpha+\beta}$.

۳) فرض کنیم A یک جبر Gـ مدرج و V یک Aـ مدول باشد. V را یک Aـ مدول Gـ مدرج نامیم اگر برای هر $\alpha, \beta \in G$، $A^\alpha V^\beta \subset V^{\alpha+\beta}$.

۱۰.۱.۱ تذکر .

۱) اگر A یک فضای برداری Gـ مدرج و B یک زیر فضای برداری از A باشد، آنگاه B را یک زیر فضای Gـ مدرج از A گوئیم هرگاه $B = \oplus_{\alpha\in G} B^\alpha$ که در آن برای هر $\alpha \in G$، $B^\alpha = A^\alpha \cap B$ (ر.ک. بخش ۳.۱ [۱۹] صفحه ۱۸).

۲) اگر A یک جبر G ـ مدرج باشد و $S \subseteq A$ شامل عناصر همگن از A باشد، آنگاه هر ایده‌آل و هر زیر جبر از A که توسط S تولید شوند، Gـ مدرج هستند (ر.ک. بخش ۳.۱ [۱۹] صفحه ۱۸).

۱۱.۱.۱ تعریف .

فرض می‌کنیم A یک جبرروی میدان $\mathbb{F}$ باشد. A یک جبر متناوب است هرگاه برای هر $x, y \in A$، روابط زیر برقرار باشد

$$x^۲y = x(xy) \quad \text{و} \quad yx^۲ = (yx)x$$

روابط فوق را به ترتیب قوانین چپ و راست متناوب نامیم.

۱۲.۱.۱ تذکر .

۱) اگر عملگر شرکت‌پذیر را با $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ تعریف کنیم، آنگاه در تعریف جبر متناوب قوانین چپ و راست متناوب به صورت زیر می‌شود

$$(x, x, y) = (y, x, x) = ۰ \qquad ,(x, y \in A)$$

۲) اگر L_x و R_x به ترتیب عملگرهای ضرب در x از چپ و راست باشند، آنگاه در تعریف جبر متناوب قوانین چپ و راست متناوب به صورت زیر می‌باشد

$$L_{x^2} = L_x^2 \qquad \text{و} \qquad R_{x^2} = R_x^2 \quad (x, y \in A).$$

۱۳.۱.۱ لم .

اگر A یک جبر متناوب یکدار باشد و عضو $x \in A$ دارای معکوس x^{-1} باشد، در اینصورت x^{-1} یکتاست و $(x, x^{-1}, y) = 0$.

برهان . فرض کنیم x' معکوس دیگری از x در A باشد. بنابر $(x, y, x) = 0$ برای هر $x, y \in A$،

$$x' = 1\, x' = (x^{-1}x), x' = x^{-1}(x, x') = x^{-1}\, 1 = x^{-1}$$

همچنین بنابر خطی بودن عملگر شرکت‌پذیر برای هر $a, x, y, z \in A$ داریم

$$a(x, y, z) + (a, x, y)z = (ax, y, z)_(a, xy, z) + (a, x, yz).$$

قرار می‌دهیم $a = x^{-1}$، $y = x$ و $z = x^{-1}y$. در اینصورت

$$(x^{-1}, x^2, x^{-1}y) + (x, x^{-1}, x(x^{-1}y)) = 0 \tag{1.1}$$

از طرفی

$$(x^{-1}, x^2, x^{-1}y) = x(x^{-1}y) - x^{-1}(xy) = (xx^{-1})y - (x^{-1}x)y = 0$$

در نتیجه از رابطه (۱.۱)، رابطه زیر حاصل می‌شود

$$(x, x^{-1}, y) = 0$$

۱۴.۱.۱ تعریف .

اگر هر عضو ناصفر در یک جبر متناوب یکدار دارای عضو وارون باشد در این صورت A را یک جبر متناوب تقسیمی نامیم.

۱۵.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. A را یک جبر جردن[3] گوئیم هرگاه یک جبر جابجایی باشد و برای هر $x, y \in A$ در اتحاد جردن زیر صدق کند:

$$(xy)x^{2} = x(yx^{2})$$

۱۶.۱.۱ تذکر .

۱) هر جبر جابجایی و شرکت‌پذیر A، یک جبر جردن است.

۲) با بکاربردن عملگر شرکت‌پذیر، جبر A یک جبرجردن است هرگاه برای هر $x, y \in A$،

$$(x, y, x^{2}) = 0$$

۳) فرض کنیم A یک جبر جردن باشد. در اینصورت بدلیل جابجایی بودن برای هر $x \in A$ ،

$$L_x = R_x$$

۱۷.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم G یک گروه آبلی و F یک میدان با مشخصه مخالف ۲ باشد. همچنین فرض کنیم $A = (A, ^{-})$ یک جبر یکدار همراه با برگشت $^{-}$ روی میدان F باشد. در اینجا یک برگشت عبارت است از یک پادـخودریختی از مرتبه ۲. به ازای هر $x, y \in A$، عملگرهای $T_x, V_{x,y} \in End_F\, A$ را برای هر $z \in A$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_{x,y}(z) := (x\bar{y})z + (z\bar{y})x - (z\bar{x})y$$

$$T_x(z) := V_{x,1}(z) = xz + zx - z\bar{x}$$

دراینصورت $(A, ^{-})$ یک جبر ساختارپذیر است اگر برای هر $x, y, z \in A$،

$$[T_z, V_{x,y}] = V_{T_z x, y} - V_{x, T_{\bar{z}} y}$$

که در آن نماد $[.,.]$، جابجاگر است.

[3] Jordan

۱۸.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم $A = \oplus_{g\in G} A_g$ یک جبر Gـمدرج روی میدان F باشد. گوئیم $(A,^-)$ یک $G-$چنبره است هرگاه در سه شرط زیر صدق کند :

الف) همه عناصر همگن غیر صفر A وارون‌پذیر باشند.

ب) برای هر $g \in G$، داشته باشیم $dim_F A_g \leq ۱$.

پ) G توسط $supp\, A$ تولید شود که در آن $supp\, A = \{g \in G \mid A_g \neq ۰\}$.

بویژه، اگر $G = Z^n$ باشد، آنگاه $(A,^-)$ را یک $n-$چنبره یا بطور ساده یک چنبره نامیم.

۱۹.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم $q = (q_{ij})$ یک ماتریس مختلط $\nu \times \nu$ باشد بطوریکه

$$q_{ii} = ۱ \quad ،۱ \leq i \leq \nu \qquad \text{و} \qquad q_{ij} = q_{ji}^{-۱} \quad ،۱ \leq i \neq j \leq \nu$$

همچنین فرض کنیم $\mathbb{C}_q$ جبرشرکت‌پذیر تولید شده توسط $t_۱^{\pm۱}, ..., t_\nu^{\pm۱}$ و روابط زیر باشد

$$t_i t_i^{-۱} = t_i^{-۱} t_i = ۱ \quad ،۱ \leq i \leq \nu \qquad \text{و} \qquad t_i t_j = q_{ij} t_j t_i \quad ،۱ \leq i \neq j \leq \nu$$

در اینصورت $\mathbb{C}_q = \mathbb{C}_q [t_۱^{\pm۱}, ..., t_\nu^{\pm۱}]$ را چنبره کوانتوم تعیین شده توسط ماتریس q نامیم (ر.ک. [۱۸]).

۲۰.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم A یک $\mathbb{F}$ـ جبر باشد و $\sum = \{A_{\bar{\imath}}\}_{\bar{\imath}\in \mathbb{Z}_m}$ یک $\mathbb{Z}_m-$ مدرج سازی روی جبر A باشد، که $m \in \mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}_m = \{\bar{\imath} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ جائیکه $\bar{i} = i + m\mathbb{Z}$ برای $i \in \mathbb{Z}$. در این صورت

$$L(A, \sum) := A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[t^{\pm۱}] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (A_{\bar{i}} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{Z}^i)$$

که در آن $\mathbb{F}[t^{\pm۱}]$ چند جمله‌ای لوران از یک متغیر t و $t = \mathbb{Z}^m$. $L(A, \sum)$ را یک جبر حلقوی از $\sum$ بر پایه A می‌نامیم.

۲۱.۱.۱ تعریف .

فضای برداری L روی میدان F باعمل ضرب $[.,.] : L \times L \to L$ موسوم به ضرب براکت را یک جبر لی می‌نامیم هرگاه

۱) $[.,.]$ دوخطی باشد.

۲) برای هر $x \in L$، $[x,x] = \circ$.

۳) به ازای هر $x, y, z \in L$، $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = \circ$ (اتحاد ژاکوبی)

درصورتی که $char(F) \neq ۲$ شرط (۲) با شرط پاد–جابجایی هم ارز است . به این معنی که به ازای هر $x, y \in L$، $[x,y] = -[y,x]$(کافی است در رابطه (۲) به جای x، $x + y$ قراردهیم).
اگر L یک فضای برداری متناهی البعد باشد L رایک جبر لی متناهی البعد می‌نامیم.

۲۲.۱.۱ تعریف .

یک زیر فضای H از L را یک زیر جبر لی و یا به اختصار زیرجبر گوئیم هرگاه $[H,H] \subseteq H$.
یک زیرفضای I از L را یک ایده‌آل از L گوئیم هرگاه $[I,L] \subseteq I$.

۲۳.۱.۱ تعریف .

اگر L و L' دو جبرلی باشند آنگاه تبدیل خطی $\varphi : L \longrightarrow L'$ را یک همریختی (بین جبرهای لی) گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in L$، $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$. همریختی φ را یک یکریختی نامیم هرگاه $ker(\varphi) = \{\circ\}$ و $Im(\varphi) = L'$ مجموعه تمام یکریختی های $\varphi : L \to L$ را با $Aut(L)$ نمایش می‌دهیم و هر عضو آن را یک خودریختی می‌نامیم .

۲۴.۱.۱ مثال .

مجموعه تمام تبدیلات خطی از فضای برداری مختلط V، $End(V)$، با عمل براکت $(\varphi, \psi \in End(V))$ $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ یک جبر لی است و آن را با $End(V)^-$ یا $gl(V)$

نشان می‌دهیم. $GL(V)$ را مجموعه تمام تبدیلات خطی معکوس‌پذیر از V در نظر می‌گیریم. اگر V متناهی‌البعد و از بعد n باشد در این صورت $End(V) \simeq M_n(F)$ (به عنوان فضاهای برداری). جبر لی $M_n(F)^-$ مجهز به براکت $[A, B] = AB - BA$ $(A, B \in M_n(F))$ را با $gl_n(F)$ نیز نمایش می‌دهیم. مجموعه ماتریسهای $n \times n$ با اثر صفر، یعنی $sl_n(F) = \{A \in M_n(F) \,|\, tr(A) = \circ\}$، یک ایده‌آل از $gl_n(F)$ است.

به دلیل کاربرد زیاد $sl_۲(F)$ در نظریه جبرهای لی، یک پایه استاندارد به صورت زیر برای آن در نظر می‌گیریم که آن را سه تایی $sl_۲$ [۴] می‌نامیم.

$$e = \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ ۱ & \circ \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & -۱ \end{pmatrix}$$

۲۵.۱.۱ تعریف .

اگر L یک جبر لی مختلط باشد، منظور از یک مشتق L، تبدیل خطی $D : L \longrightarrow L$ است به قسمی که برای هر $a, b \in L$، $D([a,b]) = [D(a), b] + [a, D(b)]$. مجموعه $Der(L)$ شامل تمام مشتقات D از L یک زیر جبر از $End(L)^-$ است. برای هر $x \in L$، نگاشت $adx : L \longrightarrow L$ با ضابطه $adx(y) = [x, y]$ یک مشتق از L است و آن را یک مشتق داخلی از L می‌نامیم. مجموعه تمام مشتقات داخلی را با adL یا $Inn(L)$ نمایش می‌دهیم.

۲۶.۱.۱ تذکر.

۱) $Der(L)$ یک زیر جبر لی L است.

۲) $Inn(L)$ یک ایده‌آل از $Der(L)$ است.

برهان. ر.ک. [۱۶].

[۴] $sl_۲ - triplet$

۲۷.۱.۱ تعریف .

اگر L یک جبر لی روی $\mathbb{F}$ باشد، آنگاه مرکزجبر لی L عبارت است از

$$Z(L) = \{x \in L \,|\, [x,y] = 0 \quad \text{برای هر } y \in L\}.$$

اگر H یک زیرجبر از L باشد، آنگاه $N_L(H) = \{x \in L \,|\, [x,H] \subseteq H\}$، نرمالساز H در L و $C_L(H) = \{x \in L \,|\, [x,H] = 0\}$، مرکزساز H در L نامیده می‌شوند.

۲۸.۱.۱ تذکر .

اگر L یک جبر لی روی $\mathbb{F}$ باشد، آنگاه $Z(L)$ یک ایده‌آل از L است. همچنین $N_L(H)$ و $C_L(H)$ زیر جبرهایی از L هستند.

برهان. ر.ک. [۱۶].

۲۹.۱.۱ تعریف .

زیرجبر H از جبر لی L را یک زیرجبر کارتان گوئیم اگر H پوچ توان باشد و $N_L(H) = H$.
فرض کنیم H یک زیر جبرکارتان از جبرلی با بعد متناهی L باشد. در اینصورت H را شکافنده گوئیم اگر مقادیر مشخصه‌ی $ad_L h$ برای هر $h \in H$ در میدان پایه‌ی F قرار داشته باشند و جبرلی L را شکافته شده گوئیم اگر دارای یک زیرجبرکارتان شکافنده باشد.

۳۰.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم L یک جبر لی و $(.,.) : L \times L \longrightarrow \mathbb{C}$ یک فرم دوخطی متقارن روی آن باشد. برای $x,y \in L$، گوئیم x بر y عمود است هرگاه $(x,y) = 0$. فرم دوخطی $(.,.)$ را پایا یا شرکت‌پذیر گوئیم هرگاه به ازای هر $x,y,z \in L$، $([x,y],z) = (x,[y,z])$. مجموعه $Rad\,(.,.) = \{x \in L \mid (x,L) = \{0\}\}$ را رادیکال فرم $(.,.)$ روی L می‌نامیم. فرم $(.,.)$ را روی L ناتباهیده نامیم هرگاه $Rad\,(.,.) = \{0\}$.

۳۱.۱.۱ تذکر .

رادیکال یک فرم دوخطی متقارن پایای $(.,.)$، روی جبر لی L یک ایده‌آل از L است زیرا برای همه $x \in Rad(.,.)$ و هر $y \in L$ باید $[x,y] \in Rad(.,.)$. برای هر $z \in L$ بدلیل پایایی فرم داریم

$$([x,y],z) = (x,[y,z]) = 0$$

۳۲.۱.۱ تعریف .

۱) جبرلی L راساده گوئیم هرگاه

الف) $[L,L] \neq \{0\}$.

ب) اگر I ایده‌آلی از L باشد آنگاه $I = 0$ یا $I = L$.

۲) جبر لی L را نیم ساده گوئیم هرگاه ایده‌آل حل‌پذیر ماکسیمال L، ایده‌آل (0) از L باشد.

۳) جبر لی L را یک جبر لی کامل گوئیم هرگاه $[L\,,\,L] = L$.

۳۳.۱.۱ تعریف .

جبر لی L را ایزوتروپیک [۵] نامیم اگر عضو مخالف صفر x در آن وجود داشته باشد به قسمی که adx پوچ توان باشد.

۳۴.۱.۱ تعریف .

فرض کنیم L یک جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ و V یک فضای برداری متناهی‌البعد باشد. یک نمایش از L روی V، همریختی جبر لی $\varphi : L \longrightarrow End(V)^-$ است که برای هر $x,y \in L$ و $v \in V$ در رابطه زیر صدق کند

$$\varphi([x,y])(v) = \varphi(x)\varphi(y)(v) - \varphi(y)\varphi(x)(v).$$

[5] isotropic