بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های فون‌نویمان

استاد راهنما:

دکتر کریم سامعی

پژوهشگر:

مهدی دره

اسفند ۱۳۸۶

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهدی دره

رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

گراف مقسوم علیه صفر حلقه های فون نویمان منظم

Zero-divisor graphs of Von-Neumann regular rings

به ارزش4 واحد در روز شنبه مورخ86/12/11 ساعت 16-14 در محل آمفی تئاتر (1) و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزار گردید و با نمره ...۱۹.۸...درجه.....عالی........ ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران:

ردیف	سمت در هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/ دانشکده/ دانشگاه	محل امضاء
1.	استاد راهنما	دکتر کریم سامعی	دانشیار- ریاضی- دانشکده علوم- بوعلی سینا همدان	
2.	استاد مدعو	دکتر عبدالرحمان ساجدی	استادیار- ریاضی- دانشکده علوم-رازی کرمانشاه	
3.	داور داخلی	دکتر محمد موسایی	استادیار- ریاضی- دانشکده علوم- بوعلی سینا همدان	
4.				
5.				
6.				

قدردانی

از زحمات بی‌دریغ و تلاش دلسوزانهٔ استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر کریم سامعی که با تجارب گرانمایهٔ خود راهنما و راهگشای اینجانب بودند، نهایت سپاس و امتنان را دارم.

از اساتید ارجمند خانم دکتر دانشخواه و آقای دکترموسایی که افتخار شاگردی ایشان را دارم، تشکر می‌کنم. امیدوارم که در سایهٔ الطاف ایزد منان بیش از پیش موفق باشند.

از مساعدتهای خانوادهٔ عزیزم، که با صبر و شکیبایی خود دشواری کار را بر من آسان می‌کرد، کمال تشکر را دارم.

نام خانوادگی : دره	**نام : مهدی**

عنوان پایان نامه : گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های فون‌نویمان

استاد راهنما : دکتر کریم سامعی

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد	**رشته :** ریاضی	**گرایش :** جبر	**دانشگاه :** بوعلی سینا
دانشکده : علوم پایه	**تاریخ دفاعیه :** ۸۶/۱۲/۱۱		**تعداد صفحات : ۸۵**

واژه‌های کلیدی : حلقهٔ تعویض‌پذیر، گراف مقسوم‌علیه صفر، حلقهٔ فون‌نویمان، گراف متمم‌شده، گراف متمم‌شده یکتا، جبر بول.

چکیده :

برای حلقهٔ تعویض‌پذیر و یکدار R، گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقهٔ R، که با $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی ساده است که راس های آن همهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی R هستند و دو رأس متمایز y,x مجاورند اگر و تنها اگر $xy=0$. هدف از مطالعه این گراف، ایجاد ارتباط بین علم نظریهٔ گراف و نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر است.

در این پایان‌نامه به بررسی گراف حلقه‌های فون نویمان منظم می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که گراف این حلقه‌ها متمم‌شدهٔ یکتا است. همچنین برای فضای توپولوژیکی فشرده و هاسدورف X، که دارای پایه‌ای از مجموعه‌های هم باز و هم بسته می‌باشد، برچسب تعریف می‌کنیم. این بر چسب به هر زیرمجموعهٔ هم باز و هم بسته X مانند U، عدد $n(U)$ را نسبت می‌دهد. این عدد توسط ابزارهای نظریهٔ گراف بدست می‌آید و نقش مهمی را در مطالعهٔ توپولوژی و جبر ایفا می‌کند. با استفاده از این برچسب برای بعضی از فضاهای توپولوژیکی، شناسه‌های جبری ارائه می‌دهیم.

فهرست مندرجات

مقدمه

ریاضیات به‌خودی خودی خود زیبا و ژرف است. ولی کاربرد ریاضیات در علوم دیگر و زندگی روزمره باعث می‌شود که ریاضیات زیباتر و تاثیرگذارتر شود. راز بقای ریاضیات هم در واقع این است که علوم دیگر به آن وابسته‌اند. ریاضیات همچنین به علوم دیگر دقت می‌بخشد و از مباحثه و جدل‌های طولانی جلوگیری می‌کند. در میان شاخه‌های گستردهٔ ریاضیات، شاخهٔ جبر ساختاری دقیقتر و بنیادی‌تر دارد. در نگاه اول شاید یک ریاضی‌دان مسئله‌ای را در جبر مطرح کند که با ریاضیاتی که در اذهان عموم جاگرفته، سنخیتی نداشته باشد اما در واقع این مسائل بیان دقیق ریاضیات شناخته‌شده است. تاثیر عمیق جبر بر سایر شاخه‌های ریاضی برای ریاضیدانان واضح است و تقریباً امروزه یک نظریهٔ زیبا و پیشرفتهٔ ریاضی نمی‌تواند مستقل از جبر باشد. مانند نظریهٔ جبری اعداد، هندسهٔ جبری ، توپولوژی جبری، آنالیز تابعی، هندسهٔ ناجابجایی و ... .

ایدهٔ برقراری ارتباط بین حلقه‌های تعویض‌پذیر و نظریهٔ گراف برای اولین‌بار در سال ۱۹۸۸ توسط بک [1] طی مقالهٔ،

I. Beck, Coloring of commutative rings, J. Algebra 116 (1988) 208-226.

مطرح شد. علاقهٔ این ریاضی‌دان بیشتر در راستای رنگ آمیزی گراف بود. بک همهٔ عناصر حلقه را بعنوان رئوس گراف قرار داد. در این گراف دو رأس متمایز x, y مجاور بودند، اگر و تنها اگر $xy = ۰$. این گراف لزوماً همبند نبود و رأس ۰ در آن با همهٔ رئوس دیگر مجاور بود.

[1] Beck

مطالعه در این مورد توسط ریاضی‌دانان متعددی ادامه یافت، تا در سال ۱۹۹۹، اندرسون [۲] و لیوینگستون [۳]، طی مقالهٔ،

Anderson, D.F and Livingston, P.S. **1999**. The zero-divisor graph of a commutative ring, J. Algebra 217: 434-447.

تعریف جدیدی برای گراف وابسته به یک حلقهٔ تعویض‌پذیر آوردند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر غیربدیهی حلقه هستند و دو رأس متمایز x, y مجاورند ، اگر و تنها اگر $xy = 0$. در همین مقاله ثابت می‌شود که این گراف، گرافی همبند است و چون عنصر صفر رأسی از این گراف نیست، بنابراین رئوسی که با همهٔ رئوس دیگر گراف مجاور هستند، دارای اهمیت خاصی می‌باشند.

بررسی گراف مقسوم‌علیه صفر حلقهٔ فون‌نویمان [۴] توسط لوی [۵] و شاپیرو [۶] در سال ۲۰۰۲ مورد توجه قرار گرفت. در مقالهٔ آنها که مرجع [۱۴] می‌باشد، شرایطی برای اینکه اگر گراف حلقه‌های فون‌نویمان یکریخت باشند آنگاه خود حلقه‌ها هم یکریختند آورده شده است. سپس این دو به همراه اندرسون در مقاله‌ای در همان سال به توسعهٔ ایده‌های خود می‌پردازند که این مقاله اساس این نگارش می‌باشد و در زیر آورده شده است.

Anderson, D.F , Levy, R and Shapiro, J. **2003**. Zero-divisor graphs, Von Neumann regular rings, and Boolean algebras, Journal of Pure and Applied Algebra, 180: 221-241.

در این مقاله به بحث از گرافهای متمم‌شده و متمم‌شدهٔ یکتا می‌پردازند و نشان می‌دهند که گراف حلقه‌های فون‌نویمان متمم‌شدهٔ یکتا است. همچنین نشان‌می‌دهند که حلقه‌های کاهشی دارای گرافهای متمم‌شده یکتا هستند اگر حلقهٔ خارج‌قسمتی کلی آنها فون‌نویمان منظم باشد. بعلاوه شرایطی برای اینکه گراف حلقهٔ تعویض‌پذیر دلخواه R متمم‌شده باشد ولی متمم‌شدهٔ یکتا نباشد را بدست می‌آورند. در ادامه برای حلقه‌های فون‌نویمان منظم تابعی تعریف می‌کنند که این حلقه‌ها را برچسب دهد و به فضای توپولوژیکی که از خودتوانهای حلقهٔ فون‌نویمان بدست می آید منتقل می‌شود.

در نهایت برای یک فضای توپولوژیکی فشردهٔ هاسدورف متریک‌پذیر شرط کافی را بدست می‌آورند که توسط فضای حاصل از یک حلقهٔ فون‌نویمان بدست آید.

---

[۲] Anderson
[۳] Livingston
[۴] Von Neumann
[۵] Levy
[۶] Shapiro

فصل ۱

مباحث مقدماتی

در فصل اول مفاهیم، اصطلاحات و قضایایی را ارائه می‌دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعد می‌باشند. از آنجایی که برای مطالعه و تحقیق در این مقوله نیاز است که با مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ گراف آشنایی مختصری داشته باشیم، لذا این فصل را با بخشی که شامل مفاهیم مقدماتی نظریهٔ گراف است آغاز می‌کنیم.

۱—۱ مفاهیمی در نظریهٔ گراف

ازآنجایی که برخی مفاهیم مقدماتی در نظریهٔ گراف از اساسی‌ترین ابزار لازم در بررسی ساختار گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌باشند، لذا در این بخش مختصراً به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریهٔ گراف می‌پردازیم.

۱—۱ **تعریف.** گراف سادهٔ G را به صورت زوج $(V(G), E(G))$ تعریف می‌کنیم، به طوری که $V(G)$ یک مجموعهٔ ناتهی از عناصری به نام رأس و $E(G)$ خانواده‌ای از زوج‌های نامرتب از عناصر $V(G)$ موسوم به یال است. توجه می‌کنیم که گراف ساده طوقه و یال تکراری ندارد. در گراف سادهٔ G دو رأس v و w را مجاور می‌گوییم هرگاه یک یال بین آنها موجود باشد و با vw یا $v-w$ نشان می‌دهیم.

۱ــ۲ تعریف. یک زیر گراف از گراف G خود یک گراف است که تمامی رئوس آن به $V(G)$ و تمامی یال‌های آن به $E(G)$ تعلق دارند.

۱ــ۳ تعریف. در گراف سادهٔ G، تعداد یال‌هایی که از رأس v می‌گذرند را درجهٔ رأس می‌گوییم و با $\deg(v)$ نشان می‌دهیم.

۱ــ۴ تعریف. گراف ساده‌ای را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند گراف **کامل** می‌نامیم. گراف کامل با n رأس را معمولاً با علامت K_n نشان می‌دهیم.

۱ــ۵ تعریف. فرض کنیم مجموعهٔ رئوس یک گراف ساده را به‌توان به صورت دو مجموعهٔ مجزای V_1 و V_2 افراز کرد، به طوری که هر رأس از V_1 با همهٔ رئوس V_2 مجاور باشد و هر دو رأس در V_1 و نیز هر دو رأس در V_2 با هم مجاور نباشند، در این صورت G را یک گراف **دو بخشی کامل** می‌گوییم و با $K_{r,s}$ نشان می‌دهیم، به طوری که r و s به ترتیب تعداد رئوس در V_1 و V_2 است. یک گراف دو بخشی کامل به صورت $K_{1,s}$ را یک گراف **ستاره‌ای** می‌نامیم.

۱ــ۶ تعریف. در گراف سادهٔ G، هر دنبالهٔ متناهی از یال‌ها را یک **گشت** می‌گوییم. تعداد یال‌ها در یک گشت را طول گشت می‌نامیم. گشتی را که تمامی یال‌های آن مجزا باشند، یک **گذر** می‌نامیم. اگر رئوسی را که در یک گذر از آن عبور می‌کنیم مجزا باشند، آنگاه گذر را یک **مسیر** می‌گوییم. مسیر بسته‌ای را که حداقل دارای یک یال باشد **مدار** می‌نامیم.

۱ــ۷ تعریف. گراف G را **همبند** می‌گوییم، اگر بین هر دو رأس مجزای آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. اگر گراف G همبند نباشد، می‌گوییم G ناهمبند است.

۱ــ۸ تعریف. فاصلهٔ بین دو رأس v و w از گراف G، عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین v و w و با $d(v,w)$ نمایش داده می‌شود. اگر مسیری بین v و w موجود نباشد، آنگاه $d(v,w)=\infty$.

۱ــ۹ تعریف. برای گراف سادهٔ G، قطر گراف را با $diam(G)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$diam(G) = \sup \{ \ d(v,w) \mid v,w \in V(G), \ v \neq w \ \}$$

اگر گراف G فاقد یال باشد، آنگاه $diam(G) = 0$.

۱ــ۱۰ تعریف. دو گراف G_1 و G_2 را یکریخت گویند هر گاه یک تناظر یک به یک بین رئوس G_1 و G_2 وجود داشته باشد به طوری که تعداد یالهایی که هر دو رأس در G_1 را به هم وصل می‌کنند برابر تعداد یالهایی باشد که رئوس نظیر در G_2 را به هم وصل می‌کنند.

در گراف ساده، شرط بالا به این صورت است که دو رأس مجاورند اگر و تنها اگر رأسهای نظیر آنها مجاور باشند.

۱ــ۱۱ تعریف. فرض کنیم G یک گراف ساده باشد، رابطه ترتیب جزئی $\leq$ را روی رئوس یک گراف به این شکل تعریف می‌کنیم.

برای هر $a,b \in V(G)$، $a \leq b$، اگر هر رأسی که با b مجاور باشد با a هم مجاور باشد، اما a و b مجاور نباشند، تعریف می‌کنیم $a \sim b$ اگر $a \leq b$ و $b \leq a$. همچنین می‌نویسیم $a \perp b$ اگر a,b مجاور باشند ولی هیچ رأسی از G با هر دوی آنها مجاور نباشد. به عبارت دیگر هیچ مثلثی وجود نداشته باشد که a,b متعلق به آن باشند.

۱ــ۱۲ نکته. واضح است که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است.

۱–۱۳ تعریف. گراف G را متمم‌شده گوییم اگر برای هر رأس a از G، رأس b وجود داشته باشد به‌طوریکه $a \perp b$. و گراف G را متمم‌شده یکتا گوییم اگر G متمم‌شده باشد و وقتی $a \perp b$ و $a \perp c$ نتیجه بگیریم که $b \sim c$.

واضح است که گراف ستاره‌ای متمم‌شده یکتا است.

۱–۲ مفاهیمی در نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر

در این بخش به طور مختصر به بیان مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌پردازیم و قضایای مهمی را در باب ساختار مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه بررسی می‌کنیم.

۱–۱۴ تعریف. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. طیف اول R را، مجموعه همه ایدالهای اول R تعریف می کنیم و با $spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

۱–۱۵ لم و تعریف. فرض کنیم I ایدآلی از حلقهٔ R باشد. در این صورت،

$$\sqrt{I} = \{r \in R |\ r^n \in I, \quad \text{که } n \text{ای متعلق به } \mathbb{N} \text{ موجود باشد}\}$$

ایدآلی از R است که شامل I می‌شود، و **رادیکال** I نام دارد.

اثبات. [۱، لم ۳–۴۶]. ■

۱–۱۶ نمادگذاری و لم. فرض کنیم I ایدآل حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد. **واریته** I که با نماد $\text{Var}(I)$ نشان می‌دهیم، برابر مجموعهٔ $\{P \in \text{Spec}(R) \mid P \supseteq I\}$ تعریف می‌شود. در این صورت،

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \text{Var}(I)} P = \bigcap_{\substack{P \in \text{Spec}(R) \\ P \supseteq I}} P.$$

اثبات. [۱، لم ۳—۴۸]. ■

۱—۱۷ لم. حلقهٔ R و ایدآلهای $P, I_1, ..., I_n$ که P ایدآل اول است را در نظر می‌گیریم. اگر P شامل اشتراک I_iها باشد، آنگاه P به ازای iی شامل I_i است.

اثبات. [۱، لم ۳—۵۵]. ■

۱—۱۸ تعریف. رادیکال پوچ R را، اشتراک تمام ایدالهای اول R تعریف می‌کنیم و آن را با $nil(R)$ نمایش می‌دهیم.

$$nil(R) = \cap_{p \in spec(R)} P$$

۱—۱۹ تعریف. حلقه R را کاهشی گوییم اگر $nil(R) = 0$ باشد.

مثال ۱. برای هر حلقه R، $\frac{R}{nil(R)}$ حلقه‌ای کاهشی است.

۱—۲۰ تعریف. حلقهٔ تعویض‌پذیر R را شبه‌موضعی می‌گوییم، اگر و تنها اگر فقط یک ایدآل ماکسیمال داشته باشد.

۱—۲۱ لم. حلقهٔ R شبه موضعی است، اگر و تنها اگر مجموعهٔ عضوهای وارون‌ناپذیر R، ایدآل R باشد.

اثبات. [۱، لم ۳—۱۳]. ■

۱–۲۲ تعریف. فرض کنیم R حلقهٔ تعویض‌پذیر و شبه موضعی باشد، در این صورت اگر R نوتری باشد، R را موضعی گوییم.

۱–۲۳ قضیه. (باقیماندهٔ چینی) فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و $I_1, ..., I_n$ ایدآل‌هایی از R باشند. در این صورت تکریختی،

$$\theta : \frac{R}{I_1 \bigcap ... \bigcap I_n} \hookrightarrow \frac{R}{I_1} \times ... \times \frac{R}{I_n}$$

وجود دارد و هرگاه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $R^2 + I_i = R$ (حلقه‌های یکدار)، و به ازای هر $i \neq j$، $R = I_i + I_j$، آنگاه θ یکریختی است یعنی،

$$\frac{R}{I_1 \bigcap ... \bigcap I_n} \cong \frac{R}{I_1} \times ... \times \frac{R}{I_n}$$

اثبات. [۳، لم ۲–۲۷]. ■

۱–۲۴ تعریف. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. رادیکال جیکبسن R را اشتراک تمام ایدالهای ماکسیمال R تعریف می‌کنیم، و آن را با $Jac(R)$ نمایش می‌دهیم.

$$Jac(R) = \cap_{M \in Max(R)} M$$

۱–۲۵ لم. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد و $r \in R$. در این صورت $r \in jac(R)$ اگر و تنها اگر برای هر $a \in R$، $1 - ra$ عضو وارون پذیر R باشد.

اثبات. [۱، لم ۳–۱۷]. ■

۱–۲۶ نتیجه. $Jac(R)$ شامل هیچ خودتوان غیر از صفر نمی‌باشد.

اثبات. اگر $e \neq \circ$ و $e \in Jac(R)$ آنگاه طبق لم فوق $1 - e$ باید وارون پذیر باشد. اما $e(1-e) = \circ$ و این تناقض است. ■

۱—۲۷ **تعریف.** حلقه R را، نیمه‌اولیه گوییم هر گاه $Jac(R) = \circ$ باشد.

مثال ۲. برای هر حلقه R، $\frac{R}{Jac(R)}$ نیمه‌اولیه است.

۱—۲۸ **تعریف.** فرض کنیم I ایدال حلقه تعویض‌پذیر R باشد، پوچساز I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$AnnI = (\circ : I) = \{a \in R : aI = \circ\}$$

۱—۲۹ **تعریف.** فرض کنیم Q ایدالی از حلقه تعویض‌پذیر R باشد می‌گوییم Q ایدال ابتدایی R است، اگر

۱— $Q \subset R$ یعنی Q ایدال سره از R باشد، و

۲— هر گاه $a, b \in R$ و $ab \in Q$ ولی $a \notin Q$ آنگاه $n \in N$ای وجود داشته باشد بطوری که $b^n \in Q$.

۱—۳۰ **لم.** اگر Q ایدال ابتدایی حلقه تعویض‌پذیر R باشد در این صورت $P := \sqrt{Q}$ ایدال اول R است و گوییم Q، P— ابتدایی است.

اثبات. [۱، لم ۴—۵]. ■

۱—۳۱ تعریف. فرض کنیم I ایدال سره‌ای از حلقه تعویض‌پذیر R باشد تجزیه ابتدایی I عبارتست از اشتراک تعداد متناهی از ایدالهای ابتدایی R که برابربا I باشند:

$$I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$$

که به ازای $i = 1, \ldots, n$ $\sqrt{Q_i} = P_i$

این تجزیه را تجزیه ابتدایی مینیمال I می‌گوییم اگر

۱— $P_1, \ldots P_n$، n ایدال اول متمایز R باشند و

۲— به ازای هر $j = 1, \ldots, n$ داشته باشیم

$$Q_j \not\supseteq \cap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} Q_i$$

و می‌گوییم I ایدال تجزیه‌پذیر R است اگر تجزیه ابتدایی داشته باشد.

۱—۳۲ تعریف. فرض کنیم I ایدال تجزیه‌پذیری از حلقه تعویض‌پذیر R و تجزیه

$$I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$$

که به ازای $i = 1, \ldots, n$ $\sqrt{Q_i} = P_i$

تجزیه ابتدایی مینیمال I باشد. در این صورت مجموعه n عضوی زیر را

$$\{P_1, \ldots, P_n\}$$

مجموعه ایدالهای اول وابسته به I نامیم و با $assI$ نمایش می‌دهیم.

۱—۳۳ **قضیه.** فرض کنیم I ایدال تجزیه‌پذیری از حلقه تعویض‌پذیر R باشد و $P \in spec(R)$ در این صورت P، ایدال اول مینیمال I است اگر وتنها اگر P عضوی مینیمال از مجموعه $assI$ باشد.

اثبات. [۱، لم ۴—۲۴]. ■

۱—۳۴ **نتیجه.** اگر I تجزیه ابتدایی داشته باشد فقط تعداد متناهی ایدال اول مینیمال دارد.

۱—۳۵ **قضیه.** هر ایدال سره از حلقه تعویض‌پذیر نوتری، تجزیه ابتدایی دارد.

اثبات. [۱، لم ۴—۳۵]. ■

۱—۳٦ **قضیه.** فرض کنیم R یک حلقهٔ تعویض‌پذیر متناهی باشد، در این صورت هر عنصر ناصفر R یا وارون‌پذیر و یا مقسوم‌علیه صفراست.

اثبات. فرض می‌کنیم $R = \{a_1, ..., a_m, ..., a_n\}$، به طوری که $a_m \notin Z(R)$. بنابراین $a_1 a_m, ..., a_n a_m$ عناصر متفاوتی از حلقه R می باشند و بنابراین یکی از این عناصر باید برابر با یک حلقه باشد. ■

۱—۳۷ **لم.** در هر حلقهٔ تعویض‌پذیر ناصفر R، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر R، با اجتماع تعدادی از اید آل‌های اول R برابر است.

اثبات. [۱۱، ص ۳]. ■

۱—۳۸ **لم.** فرض کنیم R حلقهٔ تعویض‌پذیر و نوتری باشد، در این صورت $P \in ass0$ اگر وتنها اگر $a \in R$ وجود داشته باشد که $Ann(a) = P$.

اثبات. [۱، لم ۸–۲۲]. ■

۱–۳۹ قضیه. اگر ایدال ۰، حلقه R تجزیه‌پذیر باشد، آنگاه

$$Z(R) = \cup_{P \in ass(\circ)} P$$

اثبات. [۱، لم ۸–۲۰]. ■

۱–۴۰ قضیه. اگر حلقه R کاهشی باشد، آنگاه

$$Z(R) = \cup_{P \in minSpec(R)} P$$

اثبات. [۱۰، نتیجه ۲–۴]. ■

۱–۴۱ لم. فرض کنیم R تعویض‌پذیر و نوتری باشد، در این صورت $Z(R)$ ایدآل پوچسازی از حلقهٔ R است، اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایدآل (و در نتیجه ایدآل اول) حلقهٔ R باشد.

اثبات. [۱۱، قضیهٔ ٦ و ۸۲]. ■

۱–۴۲ نتیجه. فرض کنیم R حلقهٔ شبه موضعی با ایدآل ماکسیمال ناصفر M باشد. اگر کوچکترین عدد صحیح و مثبت k موجود باشد، به طوری که $M^k = \circ$، آنگاه به ازای هر $\circ \neq x \in M^{k-1}$، $Z(R) = M = \mathrm{Ann}(x)$.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم به ازای هر $\circ \neq x \in M^{k-1}$، $M = \mathrm{Ann}(x)$. فرض کنیم $\circ \neq x \in M^{k-1}$، $y \in \mathrm{Ann}(x)$، بنابراین $yx = \circ$، در نتیجه y عنصر واورون‌ناپذیری از R است و چون