بسم الله الرحمن الرحيم

١٠٥٣٨٥٩

دانشگاه یزد

مجتمع علوم پایه

دانشکده ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حل معادلات انتگرالی ولترا—فردهلم و کاربردهای آن در ارتباط با معادلات با مشتقات جزئی سهموی و هذلولوی

استاد راهنما:

دکتر فرید(محمد) مالک قائینی

استاد مشاور:

دکتر قاسم برید لقمانی

پژوهش و نگارش:

زینب حاجی ابوترابی

اسفند ۱۳۸۳

به نشانه‌ی سپاسی ژرف و خالصانه، تقدیم به:

پدر و مادرم،

که بزرگواری و استواریشان را می ستایم.

تقدیر و تشکر

دراین جا بر خود لازم می‌دانم از کلیه کسانی که مرا در انجام این پایان نامه یاری و همراهی کرده‌اند، تشکر نمایم. در ابتدا از استادان گرامی؛

جناب آقای دکتر **فرید مالک قائینی** به عنوان استاد راهنما که با قبول راهنمایی این پایان نامه و در نهایت دلسوزی و همیاری، افتخار بزرگی را نصیب اینجانب کردند.

جناب آقای دکتر **قاسم برید لقمانی** بعنوان استاد مشاور، بخاطر راهنمایی و زحماتی که برای اینجانب کشیدند.

جناب آقای دکتر**کریم ایواز** عضو هیأت علمی دانشگاه تبریز بخاطر پذیرش مسئولیت داوری این پایان نامه از سوی ایشان و توفیقی بزرگی که نصیب اینجانب شد.

جناب آقای دکتر**سید مهدی کرباسی** بخاطر پذیرش مسئولیت داوری این پایان نامه و محبتی که نسبت به بنده داشتند.

سرکار خانم **عابدینی** منشی دانشکده‌ی ریاضی، بخاطر دلسوزی‌ها و زحمات بی دریغشان.

از استادان بزرگم؛

جناب آقای **احمد رضاموحد** که استاد زندگی من بوده اند و در دوران‌های هموار و ناهموار آن همواره مشوق بنده بوده‌اند.

و جناب آقای دکتر **فعالی** که فلسفه زیبای زندگی و پرواز در بی کران‌ها را به من آموخت.

همچنین از همراهی و همقدمی؛

خانم لیلا رنگی پور و آقایان محمد رضادوستدار، حجت الله لعلی، محمد جمشیدیان و یاسر طاهری نسب که دوره کارشناسی ارشد را با ایشان سپری کرده‌ام.

و نیز وظیفه‌ی خود می‌دانم که از تمامی اعضای خانواده‌ام، پدر و مادر مهربانم، برادر، خواهران عزیزم و دوستان صبورم که همواره قوت قلبی برای ادامه‌ی راه بوده‌اند، تشکری ویژه و صمیمانه داشته باشم.

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورتجلسه دفاعیه پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاعیه پایان نامه‌نامه تحصیلی خانم زینب حاجی ابوترابی دانشجوی کارشناسی ارشد مجتمع علوم دانشگاه یزد، در رشته/ گرایش ریاضی کاربردی

تحت عنوان: **حل معادلات انتگرالی ولترا-فردهلم و کاربردهای آن در ارتباط با معادلات با مشتقات جزئی سهموی و هذلولوی**

و تعداد واحد ٦ در تاریخ ۸۳/۱۲/۱۲

با حضور اعضای هیات داوران متشکل از	نام و نام خانوادگی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر فرید(محمد)مالک	
۲- استاد مشاور	دکتر قاسم برید لقمانی	
۳- داور خارج از گروه	دکتر کریم ایواز	
٤- داور داخل گروه	دکتر سیدمهدی کرباسی	

تشکیل گردید و پس از ارزیابی پایان‌نامه توسط هیات داوران با درجهٔ عالی و نمره به عدد ۱۹ و حروف نوزده تمام مورد تصویب قرار گرفت.

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام و نام خانوادگی: دکتر فاطمه تمدن

امضاء

فهرست مندرجات

آنچه گفتنی باشد، ساده گفته می شود و آنچه ساده گفته نمی شود هنوز گفتنی نیست.

«هامیلتون»

چکیده

در این پایان نامه معادلات انتگرالی ولترا—فردهلم خطی و غیرخطی به طور مفصل مورد بررسی قرار می‌گیرند، همچنین دسته دیگری از معادلات انتگرودیفرانسیل ولترا—فردهلم مورد بحث قرار گرفته و در حالت غیر خطی نیز بررسی می‌شوند و در پایان برخی کاربردهای فیزیکی این نوع معادلات آمده‌اند.

مقدمه

کمتر چیزی در جهان وجود دارد که به اندازه تغییر، ثابت باشد.

معمولاً یک معادله دیفرانسیل وسیله‌ای برای بررسی تغییرات جهان مادی است، بسیاری از مسائلی که در طبیعت به ارتباط چند پارامتر و نسبت تغییرات آنها مربوط می شود پس از الگوسازی، به معادلات دیفرانسیل منجر خواهند شد.

قدمت معادلات انتگرالی فردهلم به صد سال قبل برمی‌گردد که در ارتباط با مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل به کار گرفته شدند و همچنین معادلات انتگرالی ولترا در ارتباط با مسائل مقدار اولیه معادلات دیفرانسیل در اوایل سال ۱۹۰۰ زمانی که ولترا در حال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود مطرح شدند و سپس با تلفیق این دو مفهوم معادلات انتگرالی ولترا—فردهلم درارتباط بامسائل مقدار اولیه—مرزی معادلات با مشتقات جزئی سهموی و هذلولوی توسط افراد متعددی مطرح شدند و حل عددی این نوع معادلات در سالهای ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ به روشهای تصویر، مکانی—زمانی [۱] و نیسترم ذوزنقه‌ای [۲] توسط افرادی چون هاشیا [۳] (۱۹۹۶)، کوتن [۴] (۱۹۸۹) و برونر [۵] (۱۹۹۰) انجام گرفت، که به علت کاربرد زیاد این نوع معادلات درشیمی، زیست شناسی، مهندسی و فیزیک هنوز به عنوان یک مسأله مهم مورد توجه محققین می باشد.

اخیراً روش مکانی چبیشف [۶] که در سال ۱۹۹۸ توسط کروگلو [۷] معرفی شد، توسط هادیزاده و اصغری [۱۲] در دست توسعه می باشد. روش تائو [۸] نیز برای حل معادلات

---

[۱] time collocation

[۲] trapezoidal Nystrom

[۳] Hacia

[۴] Kauthen

[۵] Brunner

[۶] Chebyshev collocation

[۷] Koroglu

[۸] Tau method

انتگرال دیفرانسیل ولترا—فردهلم خطی توسط شهمزاد مطرح شده است. در این پایان نامه روشهای حل دو نوع از معادلات انتگرال دیفرانسیل ولترا—فردهلم را بررسی می کنیم. نقاط قوت و ضعف روشها بامثالهای متنوع و نمودارها نشان داده می شوند و در انتها کاربردهای فیزیکی این نوع معادلات را بیان کرده‌ایم و آنچه دراین پایان نامه می‌خوانید:

فصل ۱) آشنایی با مفاهیم اولیهٔ معادلات انتگرال دیفرانسیل که در فصلهای بعدی از آنها استفاده شده است.

فصل ۲) روش تجزیه آدومیان را به تفصیل بیان کرده و یک الگوریتم برای محاسبه روش تجزیه آدومیان و چند جمله‌ای‌های آدومیان معرفی شده است.

فصل ۳) بررسی و حل معادلات نوع (الف) توسط روشهای تجزیه و کران برآورد شده در همین فصل و نتایج و نمودارهای مربوطه.

فصل ۴) بررسی و حل معادلات نوع (ب) توسط روشهای تبدیل دیفرانسیل و استفاده از چند جمله‌ایهای تیلور، نتایج و نمودارهای مربوطه.

فصل ۵) کاربردهای فیزیکی این نوع معادلات.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

۱−۱ معادلات دیفرانسیل

هر رابطه بین دو یا چند متغیر و مشتقات آنها یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود.
نمایش معمول یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$L[y] = g$$

که در اینجا L عملگر دیفرانسیلی نامیده شده و g یک تابع معلوم می‌باشد.
یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$L[y] = \sum_{j=۰}^{n} f_j(t) y^{(j)}(t) = g(t)$$

که $f_j(t)$ ها توابع معلومی هستند.

مثال ۱ :

$$y''(x) - ۴y'(x) + y(x) = ۱$$

که رابطه بین دو پارامتر و نسبت تغییرات یکی نسبت به دیگری (مشتقات یکی نسبت به دیگری) است، که معادله دیفرانسیل معمولی نامیده می‌شود.
در یک معادله دیفرانسیل معمولی ممکن است متغیر مستقل یا متغیر وابسته وجود نداشته باشند ولی مشتق حتماً حضور دارد.

مثال ۲ :

$$y'''(x) - ۲ = ۰$$

۱ــ۲ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

این گونه معادلات در هندسه و فیزیک هنگامی پدید می‌آیند که تعداد متغیرهای مستقل در مسأله مورد بحث دو یا بیشتر از دو باشد. در چنین حالتی، هر متغیر وابسته، احتمالاً یک تابع با بیش از یک متغیراست، لذا نسبت به یک متغیر تنها مشتق عادی ندارد بلکه مشتقات جزئی نسبت به چند متغیر دارد. مثلاً در بررسی تأثیرات حرارتی در یک جسم صلب، ممکن است دمای θ از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر و از لحظه‌ای به لحظهٔ دیگر تغیر کند، که مشتقات زیر را به همراه خواهد داشت:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}, \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

۱ــ۲ــ۱ معادلات با مشتقات جزئی سهموی و هذلولوی

معادلات مرتبهٔ دو که متغیرهای مستقل آن فقط x, y باشند و متغیر وابسته آن u باشد به صورت کلی

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

نوشته می‌شوند، که ضرائب توابعی از x و y اند و توأماً صفر نیستند. فرض خواهیم کرد که تابع u و ضرائب در دامنهٔ $\mathcal{R}$ به طور پیوسته دو بار دیفرانسیل پذیرند.

دسته بندی معادلات مرتبهٔ دو با یک تبدیل، به صورت استاندارد یا کانونیک در یک نقطه می‌باشد. اگر

$$B^۲(x_۰, y_۰) - ۴A(x_۰, y_۰)C(x_۰, y_۰)$$

به ترتیب مثبت، صفر یا منفی باشد معادله هذلولوی، سهموی و یا بیضوی در نقطه (x_0, y_0) خواهد بود. اگر به ازاء کلیهٔ نقاط یک دامنه عبارت فوق همواره مثبت، صفر و یا منفی باشد آنگاه بترتیب معادله را هذلولوی، سهموی و یا بیضوی در آن دامنه گویند. اگر دو متغیر مستقل داشته باشیم، همیشه می‌توان تبدیلی یافت که معادله داده شده را به صورت استاندارد یا کانونیکی در دامنه معلوم تبدیل کند، ولی در مورد چندین متغیر مستقل در حالت کلی پیدا کردن چنین تبدیلی ممکن نیست.

۱—۳ معادلات انتگرال

اگر تابع داده شده $F(u(t))$ یک تابع برحسب $u(t)$ باشد، آنگاه معادلاتی به شکل:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(u(t))dt$$

و

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)F(u(t))dt$$

که λ یک پارامتر است را به ترتیب معادله انتگرال فردهلم [۱] و معادله انتگرال ولترا[۲] گویند. اگر تابع F برحسب u خطی باشد معادله را یک معادلهٔ خطی و در غیر اینصورت آنرا غیرخطی می‌نامیم. در برخی معادلات تابع $F(u(t))$ برحسب $u(t)$ غیرخطی است، نظیر

$$\ldots., sin(u(t)), e^{u(t)}, u^n(t)$$

---

[۱] Fredholm

[۲] Volterra

۱—۴ معادلات انتگرال خطی

صورت کلی معادلات انتگرال خطی به شکل زیر است :

$$Ku + \lambda f u = g$$

به طوریکه u تابع مجهول، K یک عملگر خطی معلوم، f و g توابع معلوم و λ یک پارامتر ثابت می‌باشد، یا به عبارتی :

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,\mu)u(\mu)d\mu + \lambda f(x)u(x) = g(x)$$

اگر $f(x) = ۰$ باشد معادله انتگرال خطی از نوع اول نامیده می‌شود.
اگر $f(x) \neq ۰$ باشد معادله انتگرال خطی از نوع دوم نامیده می‌شود.
یک معادله انتگرال خطی معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد و با توان یک ظاهر شده است. تابع معلوم $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند.

۱—۴—۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد بالا و پایین انتگرال گیری اعداد ثابت هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (a \leq x, t \leq b) \qquad (۱)$$

که در آن هسته معادله انتگرال $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ داده شده اند و λ یک پارامتر معلوم می‌باشد. برحسب آنکه $\phi(x)$ چه مقداری را انتخاب کند، معادلات انتگرال خطی فردهلم

به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

۱— اگر $\phi(x) = 0$، معادله (۱) تبدیل می‌شود به:

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = 0$$

که این را معادله انتگرال فردهلم نوع اول گویند.

۲— اگر $\phi(x) = 1$، معادله (۱) تبدیل می‌شود به:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = 0$$

این معادله انتگرال را فردهلم نوع دوم گویند.

توجه : در حقیقت معادله اخیر را می‌توان با تقسیم طرفین معادله (۱) بر $\phi(x) \neq 0$ بدست آورد.

۱—۴—۲ معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالا و پایین انتگرال گیری بجای آنکه عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود به صورت زیر است:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt \qquad (۲)$$

که این معادله را با توجه به مقدار $\phi(x)$ و با فرض $\beta(x) = x$ و $\alpha(x) = a$ می‌توان به دو گروه تقسیم بندی کرد.

۱— اگر $\phi(x) = 0$، معادله (۲) تبدیل می‌شود به:

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = 0$$

که این را معادله انتگرال ولترا نوع اول گویند.

۲— اگر ۱ $= \phi(x)$، معادله (۲) تبدیل می‌شود به:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = \circ$$

که آن را معادله انتگرال ولترا نوع دوم گویند.

۱—۵ معادلات انتگرال— دیفرانسیل غیرخطی

ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ در حال مطالعه موضوع رشد جمعیت بود که با معادلات انتگرال —دیفرانسیل مواجه شد.

در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف معادله، در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر با مشتقات معمولی ظاهر می‌شود.

$$\sum_{j=\circ}^{n} p_j(x)u^{(j)}(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,\mu)F(u(\mu))d\mu$$

که n، بزرگترین مرتبه مشتق $u(x)$ ظاهر شده در معادله می‌باشد و تابع $F(u(\mu))$ یک تابع غیرخطی بر حسب $u(\mu)$ می‌باشد و در صورتی که $u(\mu) = F(u(\mu))$، آنگاه معادله را معادله انتگرال— دیفرانسیل خطی می‌نامند. تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک و زیست شناسی در قالب این نوع معادلات انتگرال —دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. البته این گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال هم نمایان می‌گردند.

این معادله را بر اساس حدود انتگرال گیری می‌توان معادلهٔ انتگرال —دیفرانسیل ولترا یا معادلهٔ انتگرال —دیفرانسیل فردهلم نام گذاری نمود.