بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش (محض)

یک مساله جایگشتی برای گروه ها

از :

سید حسین راضی

استاد راهنما :

دکتر منصور هاشمی

بهمن ۱۳۸۸

تقدیم بـــه

روح بلند روح ا...

و همه کسانی که آبی بلند را می اندیشند.

تقدیر و تشکر

حمد و ستایش خدای عالم را، که اوست بخشنده و مهربان، یگانه عالم، صاحب و مالک هستی بخش، قادر در متعال و بی همتا.

درود و سپاس بی پایان نثار صبورترین پدر و دلسوزترین مادر و مهربانترین همسر که مدیون ایثار و مهر ایشانم، تقدیر فراوان همراه با آرزوی توفیق و سلامت تقدیم استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر منصور هاشمی که بدون حمایت و راهنمایی و شکیبایی ایشان هرگز توفیق به سرانجام رسانیدن کار حاصل نمی شد.

از محضر اساتید بزرگوار و ارجمند آقای دکتر حبیب ا.. انصاری و آقای دکتر احمد عباسی به دلیل زحماتشان و داوری این پایان نامه، کمال تشکر و سپاس دارم.

فهرست مندرجات

فهرست علائم اختصاری .... ث

چکیده فارسی .... ج

چکیده انگلیسی .... چ

مقدمه ۱

فصل اول

۱-۱ مفاهیم مقدماتی گروهها ۲

فصل دوم

۲-۱ مقدمه ۱۶

۲-۲ $P(۲,۳)-$ گروهها ۱۸

۲-۳ $R(۲,۲)-$ گروهها ۲۲

فصل سوم

۳-۱ مقدمه ۲۷

۳-۲ $R(۳,۲)-$ گروهها ۲۹

واژه نامه ۴۴

منابع و ماخذ ۴۸

فهرست علائم اختصاری

اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
بستار نرمال مجموعه R	$\bar{R}$
زیر گروه مشتق از G	G'
طول پوچتوانی گروه G	$c(G)$
گروه آزاد روی مجموعه X	$F(X)$
گروه n ام از مرتبه m	(m,n)
جابجاگر a و b	$[a,b]$

چکیده

یک مساله جایگشتی برای گروهها

سید حسین راضی

فرض کنیم m و n اعداد صحیح مثبت باشند. گوئیم G دارای خاصیت $R(m,n)$ (به ترتیب $P(m,n)$) است، هرگاه برای هر n زیر مجموعه $X_۱$، ... و X_n از اندازه m از گروه G یک جایگشت غیر بدیهی σ وجود داشته باشد به قسمی که

$$X_۱ \cdots X_n \bigcap X_{\sigma(۱)} \cdots X_{\sigma(n)} \neq \phi$$

$$(X_۱ \cdots X_n = X_{\sigma(۱)} \cdots X_{\sigma(n)} \text{ به ترتیب })$$

فرض کنیم G یک گروه غیر آبلی باشد. در این پایان نامه نشان می دهیم که

۱) $G \in P(۲,۳)$ اگر و فقط اگر یکریخت با $S_۳$ باشد.

۲) $G \in R(۲,۲)$ اگر و فقط اگر $|G| \leq ۸$.

۳) فرض کنید G متناهی باشد، در این صورت $G \in R(۳,۲)$ اگر و فقط اگر $|G| \leq ۱٤$ یا G یکریخت با یکی از حالتهای زیر است:

گروه کوچک $(۱٦, i)$ که $i \in \{۳,٤,٦,۱۱,۱۲,۱۳\}$، گروه کوچک $(۳۲, ٤۹)$، گروه کوچک $(۳۲, ٥۰)$ که گروه کوچک (n, m) گروه n ام از مرتبه m است.

واژه های کلیدی: گروههای متناهی، گروههای پوچتوان، گروههای جایگشتی، گروههای (m,n)–جایگشت پذیر، گروههای (m,n)–جایگشت پذیر تحدید شده، گروه کوچک (m,n).

Abstract

On A permutablity problem for Groups

Seyyed hossein Razi

Let m , n be positive integers. We denote by $R(m,n)$ (respectively $P(m,n)$) the class of all groups G such that, for every n subsets $X_۱, \ldots , X_n$ of size m of G there exists a non – identity permutation σ such that

$$X_۱ \cdots X_n \bigcap X_{\sigma(۱)} \cdots X_{\sigma(n)} \neq \phi$$

$$(\textbf{respectively } X_۱ \cdots X_n = X_{\sigma(۱)} \cdots X_{\sigma(n)})$$

Let G be a non – abelian group. We study

(i) $G \in P(۲,۳)$ if and only if G isomorphic to $S_۳$.

(ii) $G \in R(۲,۲)$ if and only if $|G| \leq ۸$.

(ii) If G is finite , then $G \in R(۳,۲)$ if and only if $|G| \leq ۱۴$ or G is isomorphic to one of the following:

Small Group $(۱۶, i)$ $i \in \{۳,۴,۶,۱۱,۱۲,۱۳\}$, small group $(۳۲,۴۹)$, small group $(۳۲,۵۰)$, where Small group (m,n) is the n th group of order m .

Keywords:

finite groups, nilpotent groups, permutable groups, (m,n) – Permutable groups, restricted (m,n) – permutable groups, Small groups (m,n).

مقدمه

گروههای جایگشت پذیر به وسیله افراد مختلفی مطالعه شده اند. مقاله ای که در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته، تحت عنوان یک مساله جایگشتی برای گروهها می باشد ([۱۶]) . مفهوم خاصیت جایگشتی در گروهها تاکنون روی سری مرکزی پائینی و عناصر و زیر مجموعه ها تعریف شده است که در این پایان نامه، به بررسی خاصیت جایگشتی روی زیر مجموعه ها می پردازیم. این بررسی مشتمل بر سه فصل است:

فصل اول به تعاریف و قضایایی در نظریه گروهها از جمله گروههای پوچ توان، گروههای آزاد و تعاریف خاصیت جایگشتی گروهها اختصاص دارد.

در فصل دوم، به بررسی رده گروههای P (۲,۳) و R (۲,۲) می پردازیم و شرط لازم و کافی برای اینکه گروه G دارای این خواص باشد را به دست می آوریم.

فصل سوم، به بررسی رده گروههای R (۳,۲) اختصاص دارد و این رده از گروهها را طبقه بندی می کنیم.

فصل اول

۱-۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱-۱ مفاهیم مقدماتی گروهها

فرض کنید G گروهی دلخواه باشد. در این صورت تعاریف زیر را می آوریم.

تعریف ۱-۱-۱. فرض کنید G یک گروه و $\phi \neq A \subseteq G$. آنگاه مرکز ساز A در G که با نماد $C_G(A)$ نشان می دهیم، به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_G(A)=\{ a\in G \; ; \; ax=xa \quad \forall x \in A \}$$

و در حالت خاص اگر $A=G$ آنگاه $C_G(A)$ را مرکز گروه نامیم و با $Z(G)$ نمایش می دهیم.

و اگر $\phi \neq H \subseteq G$ باشد، آنگاه نرمال ساز H در G را با $N_G(H)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N_G(H)=\{ a\in G \; ; H=a^{-1}Ha \}$$

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنید G یک گروه، x و y دو عضو در G باشند در این صورت

$$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$$

را جابجاگر x و y می نامیم. با کمی دقت می توان دریافت که $xy=yx[x,y]$ و از اینجا انگیزه این نامگذاری روشن می گردد.

می توان نشان داد که ترکیب دو جابجاگر لزوما یک جابجاگر نیست، بنابراین درحالت کلی مجموعه تمام جابجاگرهای یک گروه تشکیل یک زیر گروه نمی دهند. اما زیر گروه تولید شده توسط جابجاگر های یک گروه مانند G را با G' نشان داده و آن را زیر گروه مشتق G می نامیم.

لم ۱-۱-۳. فرض کنید x و y و z عضوهایی از یک گروه G باشند. در این صورت داریم

الف) $[x,y]=[y,x]^{-1}$

ب) $[xy,z]=[x,z]^{y}[y,z] \quad , \quad [x,yz]=[x,z][y,z]^{z}$

ج) $[x,y^{-1}]=([x,y]^{y^{-1}})^{-1} \quad , \quad [x^{-1},y]=([x,z]^{x^{-1}})^{-1}$

د) $[x, x^{-1}, y]^{x} [y, z^{-1}, x]^{z} [x, y^{-1}, z]^{y} = 1$ (اتحاد هال – ویت)[1]

اثبات. به [۱٤] صفحه ۱۱۹ مراجعه شود. □

تعریف ۱–۱–۵. فرض کنیم F یک گروه، X یک مجموعه و $\theta : X \to F$ تابعی باشد. در این صورت F را بر X آزاد گوییم هرگاه به ازای هر گروه G و هر تابع $\alpha : X \to G$، یک همریختی منحصر به فرد مانند $\beta : F \to G$ موجود باشد به طوری که $\theta \beta = \alpha$.

تعریف ۱–۱–۶. فرض کنید X یک مجموعه و $F(X)$ گروه آزاد روی X باشد. اگر $R \subseteq F(X)$ و $\bar{R}$ بستار نرمال R باشد (اشتراک زیر گروههای نرمال F که شامل R هستند)، آنگاه علامت $<X \mid R>$ را برای گروه $\frac{F}{\bar{R}}$ به کار برده و آن را یک نمایش می نامیم.

تعریف ۱–۱–۷. فرض کنیم G یک گروه و X مولدی برای آن باشد، یعنی $G = <X>$. اگر F گروه آزاد روی X باشد ($F = F(X)$)، آنگاه با تعریف گروه آزاد یک همریختی پوشا مانند $\beta : F \to G$ وجود دارد که $G \cong \frac{F}{\ker \beta}$. اکنون اگر R زیر مجموعه ای از F باشد که مولدی برای گروه $\ker \beta$ است. آنگاه $\bar{R} = \ker \beta$ (زیرا $\ker \beta$ زیر گروه نرمال است). با این مقدمات، گوییم گروه G دارای نمایش $<X \mid R>$ است و می نویسیم $G = <X \mid R>$. همچنین X را مجموعه مولد و R را مجموعه رابطه های گروه می نامیم. گروه G با نمایش متناهی نامیده می شود، اگر دارای نمایشی مانند $G = <X \mid R>$ باشد که X و R متناهی اند.

اگر $R = \{ r_1, r_2, \ldots, r_m \}$ و $X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ می نویسیم:

$$G = <x_1, x_2, \ldots, x_n \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots, r_m = 1>$$

تذکر ۱–۱–۸. در اینجا باید توضیح دهیم که اگر G با مولد متناهی نباشد، آنگاه به صورت یک نمایشی متناهی تعریف نمی شود. یک مثال از چنین گروهی، گروه اعداد گویا یعنی $\mathbb{Q}$ با عمل جمع است.

[1] Hall – Witt identity

مثال ۱-۱-۹. نمایش چند گروه مقدماتی چنین است:

الف) $<x \mid x^n = 1>$ گروه دوری از مرتبه n.

ب) $D_{2n} =<x , y \mid x^2 = 1 , y^n = 1 , (x y)^n = 1>$، گروه دو وجهی از مرتبه n.

ج) $Q_{2n} =<x , y \mid x^{2n-1} = 1 , y^2 = x^{2n-2} , x y x = y >$، $(n \geq 3)$ گروه چهارگان تعمیم یافته (یا گروه کواترنیون).

لم ۱-۱-۱۰. فرض کنیم X و Y و Z سه گروه باشند و $\alpha : X \to Y$ یک بروریختی و $\beta : X \to Z$ یک همریختی باشد. در این صورت اگر $\ker \alpha \subseteq \ker \beta$، آنگاه یک همریختی مانند $\gamma : Y \to Z$ وجود دارد به طوری که $\alpha \gamma = \beta$ (و اگر β یک برو ریختی باشد، آنگاه γ نیز چنین است.)

اثبات. به [۱] صفحه ۱٦٤ مراجعه شود. □

لم ۱-۱-۱۱. (فون دایک) فرض کنیم $F(X)$ یک گروه آزاد روی X و $\bar{R}$ بستار نرمال R در $F(X)$ باشد. اگر $G =<X \mid R>$ و $H =<X \mid S>$ که $R \subseteq S \subset F(X)$، آنگاه برو ریختی $\varphi : G \to H$ موجود است که هر $x \in X$ را ثابت نگه می دارد و $\ker \varphi = \overline{S / R}$.

اثبات. همریختی های طبیعی $\alpha : F(X) \to \frac{F(X)}{\bar{R}}$ و $\beta : F(X) \to \frac{F(X)}{\bar{S}}$ را در نظر می گیریم. چون $R \subseteq S$ و $\ker \alpha = \bar{R} \subseteq \bar{S} = \ker \beta$ ، طبق لم ۱-۱-۱۰ بروریختی $\gamma : \frac{F(X)}{\bar{R}} \to \frac{F(X)}{\bar{S}}$ موجود است. حال فرض می کنیم $w \in F(X)$ به طوری که $\bar{R} w \in \ker \gamma$، در نتیجه $\bar{R} w = \bar{S}$ و لذا $\bar{S} = (w \alpha) \gamma = w \bar{R} w$. پس $w \in \bar{S}$ و $\bar{R} w \in \bar{S} / \bar{R}$ و از طرف دیگر هر عضو $\overline{S / R}$ عضوی از $\ker \gamma$ است. بنابراین $\ker \gamma = \overline{S / R}$ و حکم ثابت می شود. □

لم ۱-۱-۱۲. (آزمون جایگذاری) فرض می کنیم $G =<X \mid R>$ ، H یک گروه و $\theta : X \to H$ نگاشتی مفروض باشد. اگر به ازای هر $x \in X$ و $r \in R$ حاصل جایگذاری $x \theta$ به جای x در r عضو همانی H باشد. آنگاه

یک همریختی مانند $\gamma: G \to H$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $(\bar{R}x)\gamma = x\theta$. به علاوه هرگاه $H = <X\theta>$، آنگاه γ برو ریختی است.

اثبات. چون $F(X)$ بر X آزاد است. همریختی $\beta: F(X) \to H$ موجود است به طوری که به ازای هر x از X، $x\beta = x\theta$. حال فرض می کنیم $r \in R$ و $r = x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_k^{t_k}$ صورت نرمال r باشد. با توجه به فرض $1 = r = (x_1\theta)^{t_1}(x_2\theta)^{t_2} \dots (x_k\theta)^{t_k}$ لذا

$$1 = (x_1\beta)^{t_1}(x_2\beta)^{t_2} \dots (x_k\beta)^{t_k} = (x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_k^{t_k})\beta = r\beta$$

بنابراین $r \in \ker\beta$ و در نتیجه $R \subseteq \ker\beta$ پس $\bar{R} \subseteq \ker\beta$. حال فرض می کنیم $\alpha: F(X) \to \frac{F(X)}{\bar{R}}$ همریختی طبیعی باشد، بنابراین $\ker\alpha \subseteq \ker\beta$. طبق لم ۱-۱-۹، همریختی $\gamma: \frac{F(X)}{\bar{R}} \to H$ وجود دارد که $\alpha\gamma = \beta$. حال به ازای هر عضو دلخواه x از X داریم:

$$(\bar{R}x)\gamma = (x\alpha)\gamma = x(\alpha\gamma) = x\beta = x\theta$$

در پایان چون $H = <x\theta>$ پس β برو ریختی است و α نیز برو ریختی است بنابراین γ هم برو ریختی است. □

لم ۱-۱-۱۳. فرض کنیم $G = <X \mid R>$ و $r, w \in F$. در این صورت

الف) اگر $r \in R$، آنگاه $G \cong <X \mid R \cup \{r\}>$.

ب) اگر $y \notin X$، آنگاه $G \cong <X \cup \{y\} \mid R \cup \{y^{-1}w\}>$.

اثبات. به [۱] صفحه ۱۶۸ مراجعه شود. □

تعریف ۱-۱-۱۴. یکریختی های

$$\eta: <X \mid R> \to <X \cup \{y\} \mid R \cup \{y^{-1}w\}>$$

$$\gamma: <X \mid R> \to <X \mid R \cup \{r\}>$$

و معکوسهای آنها را که در ۱–۱–۱۳ معرفی کردیم، تبدیلات تیتز[1] می نامیم.

تذکر ۱–۱–۱۵. اگر هر یک از تبدیلات تیتز بر نمایشی مانند $<X \mid R>$ اعمال شوند آنگاه به نمایشی مانند $<X' \mid R'>$ منجر می شود، به طوری که $<X \mid R> \cong <X' \mid R'>$. معمولا γ، γ^{-1}، η و η^{-1} را با علامتهای R^{+} (الحاق یک رابطه)، R^{-} (حذف یک رابطه)، X^{+} (الحاق یک مولد) و X^{-} (حذف یک مولد) نشان می دهیم. بنابراین

(۱) با اعمال R^{+} داریم $X'=X$ و $R'=R \bigcup \{r\}$ که در آن $r \in R$؛

(۲) با اعمال R^{-} داریم $X'=X$ و $R'=R-\{r\}$ که در آن $r \in R \bigcap \overline{R-\{r\}}$؛

(۳) با اعمال X^{+} داریم $X'=X \bigcup \{y\}$ و $R'=R \bigcup \{y^{-1}w\}$ که در آن $y \notin X$ و $w \in F$؛

(٤) با اعمال X^{-} داریم $X'=X-\{y\}$ و $R'=R-\{y^{-1}w\}$ که در آن $y \in X$ و $w \in F(X-\{y\})$ و $y^{-1}w$ تنها عضو R است که y در آن ظاهر می شود.

مثال ۱–۱–۱۶. گروه فون دایک (گروه چند وجهی) $D(l,m,n)=<x,y \mid x^{l},y^{m},(xy)^{n}>$ را در نظر می گیریم که در آن l و m و n اعداد صحیح می باشند. در جدول صفحه بعد برخی از تبدیلات تیتز به این گروه اعمال شده، گروه بدست آمده با $D(l,m,n)$ یکریخت است.

---

[1] Tietze

تبدیلات تیتز	x^l	y^m	$(xy)^n$				
X^+	x^l	y^m	$(xy)^n$	$a^{-1}xy$			
R^+	x^l	y^m	$(xy)^n$	$a^{-1}xy$	a^n		
R^-	x^l	y^m		$a^{-1}xy$	a^n		
R^+	x^l	y^m		$a^{-1}xy$	a^n	$(ay^{-1})^l$	
R^-		y^m		$a^{-1}xy$	a^n	$(ay^{-1})^l$	$x^{-1}ay^{-1}$
R^+		y^m		$a^{-1}xy$	a^n	$(ay^{-1})^l$	$x^{-1}ay^{-1}$
R^-		y^m			a^n	$(ay^{-1})^l$	
X^-		y^m			a^n	$(ay^{-1})^l$	

بنابراین

$$D(l,m,n) \cong \langle x,y \mid x^l, y^m, (xy)^n \rangle = \langle y,a \mid y^m, a^n, (ay^{-1})^l \rangle$$

اینک مولد جدیدی مانند b و رابطه جدیدی مانند $b^{-1}y^{-1}$ اضافه می کنیم.

$$D(l,m,n) \cong \langle b,y,a \mid y^m, a^n, (ay)^{-1}, b^{-1}y^{-1} \rangle$$

سپس مولد y را حذف می کنیم یعنی از $y^{-1}=b$ استفاده می کنیم:

$$D(l,m,n) \cong \langle b,a \mid (b^{-1})^m, b^{-1}y^{-1} \rangle$$

پس

$$D(l,m,n) \cong D(n,m,l)$$

تعریف ۱–۱–۱۷. به ازای هر عدد طبیعی n که $n \geq 2$، گروه کواترنیون تعمیم یافته که آن را با Q_{4n} نشان می دهند، زیر گروهی از گروه $GL(2,C)$ است که با دو ماتریس زیر تولید می شود:

$$\xi = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{bmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن $w = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

قضیه ۱-۱-۱۸. گروه Q_{4n} دارای نمایش زیر است:

$$Q_{4n} = < x , y \mid x^{2n} = 1 , x^n = y^2 , y^{-1} x y = x^{-1} >$$

اثبات. با محاسبه معلوم می شود که $\xi^{2n} = 1$، $\xi^{\eta} = \eta^2$ و $\eta^{-1} \xi \eta = \xi^{-1}$. حال می گوییم چون $\eta \neq < \xi >$، $|Q_{4n}| \geq 4n$. حال فرض می کنیم $X = \{x , y\}$ و تناظر $x \leftrightarrow \xi$ و $y \leftrightarrow \eta$ را در نظر گرفته و گروه مجرد

$$G = < x , y \mid x^{2n} = 1 , x^n = y^2 , y^{-1} x y = x^{-1} >$$

را تشکیل می دهیم. بنابراین یک بروریختی مانند $\gamma : G \to Q_{4n}$ وجود دارد. پس $|G| \geq 4n$. از طرف دیگر با فرض $U = \{x^i y^j \mid 0 \leq i \leq 2n-1 , 0 \leq j \leq 1\}$ واضح است که $G = U$. لذا $|G| \leq 4n$. بنابراین $|G| = 4n$ و γ یک یکریختی است. در نتیجه $G \cong Q_{4n}$ و حکم ثابت می شود. □

نتیجه ۱-۱-۱۹. گروه Q_8 که گروه چهارگان یا کواترنیون نامیده می شود، به وسیله ماتریسهای مختلط $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ تحت ضرب ماتریس معمولی تولید می شود که در آن $i^2 = -1$ و دارای نمایش

$$Q_8 = < x , y \mid x^4 = 1 , x^2 = y^2 , y^{-1} x y = x^{-1} >$$

می باشد که یک گروه غیر آبلی از مرتبه ۸ است.

$$Q_8 = \{1 , -1 , i , -i , j , -j , k , -k\}$$

تعریف ۱-۱-۲۰. به ازای $n \geq 3$ گروه

$$D_n = < a , b \mid a^n = 1 , b^2 = 1 , b a = a^{-1} b >$$

را در نظر می گیریم که $a = (1 \ 2 \ \cdots \ n)$ و

$$b=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & \dots & i & \dots & n-۱ & n \\ ۱ & n & n-۱ & n-۲ & \dots & n+۲-i & \dots & ۳ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$=\prod_{۲\le i<n+۲-i}(i\ n+۲-i)$$

D_n گروه دو وجهی از درجه n نامیده می شود. گروه D_n با گروه تمام تقارنهای یک n ضلعی منتظم یکریخت است و معمولا با آن یکی گرفته می شود. به ازای هر $n\ge ۳$، گروه دو وجهی D_n گروهی از مرتبه $۲n$ است.

قضیه ۱–۱–۲۱. گروه $D_{۲n}$ دارای نمایش زیر است:

$$D_{۲n}=<x,y\,|\,x^n=y^۲=(x\,y)^۲=۱>$$

اثبات. به موجب آنچه در تعریف ۱–۱–۲۰ آمد، $D_{۲n}=<\alpha,\beta>$ که در آن

$$b=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ٤ & \dots & i & \dots & n-۱ & n \\ ۱ & n & n-۱ & n-۲ & \dots & n+۲-i & \dots & ۳ & ۲ \end{pmatrix}\ ,\ a=(۱\ ۲\ \cdots\ n)$$

بنابراین، در اینجا با علامتهای فرآیند مذکور در ابتدای بخش حاضر، $X'=\{\alpha,\beta\}$ و $X=\{x,y\}$ که در آن x متناظر با α و y متناظر با β است (مرحله اول فرآیند). با محاسبه معلوم می شود $\alpha^n=۱$، $\beta^۲=۱$ و $(\alpha\beta)^۲=۱$. بنابراین $R=\{x^n\,,y^۲\,,(x\,y)^۲\}$ (مرحله دوم فرآیند). حال گروه مجرد $G=<x,y\,|\,x^n=y^۲=(x\,y)^۲=۱>$ را در نظر می گیریم و ثابت می کنیم که نمایش اخیر یک نمایش $D_{۲n}$ است. برای این منظور ابتدا نگاشت $\theta:X\to D_{۲n}$ را با ضابطه $x\mapsto\alpha$ و $y\mapsto\beta$ در نظر می گیریم . بر طبق قضیه جایگذاری یک برو ریختی مانند $\gamma:<X\,|\,R>\to D_{۲n}$ وجود دارد. بنابراین $|G:\ker\gamma|=۲n$. برای تکمیل برهان قرار می دهیم $U=\{x^i\,y^j\,|\,۰\le i\le n-۱\,,۰\le j\le ۱\}$ (توجه کنید که U زیر مجموعه ای است از گروه $F(X)/\bar{R}$ که از نوشتن $\bar{R}$ در اعضایی به صورت $\bar{R}_w$ صرف نظر کرده ایم و صرفا نوشته ایم w). حال ملاحظه می کنیم که U نسبت به ضرب از راست در $x^{\pm۱}$ و y بسته است. به عنوان مثال، چون $x^n=y^۲=(x\,y)^۲=۱$، به ازای هر i که $۰\le i\le n-۱$ ، خواهیم داشت:

$$(x^i y)x = x^i (yx) = x^i (x^{-1} y^{-1}) = x^{i-1} y$$

از اینجا معلوم می شود که به ازای هر w از $F(X)$، $Uw \subseteq U$. در نتیجه $G \subseteq UG \subseteq U \subseteq G$؛ یعنی $U = G$. بنابراین $|G| = |U| \leq 2n$ و خواهیم داشت $\ker\gamma = 1$ یعنی γ یک یکریختی است. پس $G \cong D_{2n}$ و حکم ثابت می شود. □

تعریف ۱-۱-۲۲. فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد. در این صورت

$$G_t = \{x \in G \mid \text{متناهی باشد } |x|\}$$

تشکیل زیر گروه می دهد که به آن زیر گروه تابدار [۱] G می گوییم. اگر $G_t = \{0\}$، به آن گروه تاب - آزاد می گوییم.

تعریف ۱-۱-۲۳. یک p-گروه متناهی G، فوق العاده - مخصوص [۲] نامیده می شود اگر $G' = Z(G)$ و $|G'| = p$.

همچنین G را حاصل ضرب مرکزی زیر گروه های نرمال G_1، . . . و G_n می نامیم هرگاه $G = G_1 G_2 \cdots G_n$. برای $i \neq j$، $[G_i, G_j] = 1$ و برای هر i،

$$. G_i \cap \prod_{j \neq i} G_j = Z(G)$$

تعریف ۱-۱-۲۴. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیر گروههای نرمال G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

در تعریف فوق، هر G_i را یک جمله سری و r را طول سری می نامند.

---

[۱] Torison

[۲] Extra - Special

تعریف ۱—۱—۲۵. فرض کنیم G یک گروه باشد. سری نرمال

$$1=G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی G گوییم در صورتی که به ازای هر i که $1\leq i \leq n$،

$$\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z\left(\frac{G}{G_{i-1}}\right).$$

تعریف ۱—۱—۲۶. گروه G را پوچتوان می نامند، در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاه ترین سری مرکزی G را رده پوچتوانی G گویند و آن را با $c(G)$ نشان می دهند.

لم ۱—۱—۴. اگر G از رده پوچتوانی دو باشد. آنگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}$ و $x, y, z \in G$ داریم:

الف) $[x, yz]=[x,y][x,z] \quad , \quad [xy, z]=[x,z][y,z]$

ب) $[x^n, z]=[x, y^n]=[x,y]^n$

پ) $(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{\binom{n}{2}}$

اثبات. به [۱٤] مراجعه شود. □

مثال ۱—۱—۲۷. واضح است که هر گروه آبلی یک گروه پوچتوان از رده پوچتوانی ۱ است. (رده پوچتوانی گروه $\{0\}$ را بنا بر قرارداد، صفر می گیریم.) مثالهای دیگر از گروههای پوچتوان، گروههایی مانند G اند که در شرط $G' \leq Z(G)$ صدق می کنند. در مورد این گروهها، سری $1\leq Z(G) \leq G$ یک سری مرکزی است و در نتیجه $c(G)\leq 2$.

تعریف ۱—۱— ۲۸. گروه G را متناهی —با —آبلی —با —متناهی گوییم هر گاه G دارای زیر گروه نرمال مانند N باشد به طوری که N' و $[G:N]$ متناهی باشند.