۱۴۴۷۰۸-۲۰۲۳۲۳۲

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

برآورد پارامتر n در توزیع دوجمله‌ای

استاد راهنما

دکتر حسین بیورانی

استاد مشاور

دکتر هژیر حومئی

رعنا علی‌پور اصل

شهریور ۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو: علی‌پوراصل	نام: رعنا

عنوان پایان‌نامه: برآورد پارامتر n در توزیع دوجمله‌ای

استاد راهنما: دکتر حسین بیورانی

استاد مشاور: دکتر هژیر حومئی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار گرایش: ریاضی دانشگاه: تبریز

دانشکده: علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور۱۳۸۹ تعداد صفحه:۷۱

واژه های کلیدی: توزیع پیشین، تابع زیان، برآوردگر بیزی قابل قبول، توزیع دوجمله‌ای، تابع مخاطره

چکیده: توزیع دوجمله‌ای از توزیع‌های بسیار کاربردی است. یکی از مهمترین موضوعات در مورد این توزیع برآورد پارامتر n می‌باشد که تاکنون براساس روش‌های گشتاوری و ماکزیمم درستنمایی بوده است. استفاده از برآوردگرهای دیگر نادیده گرفته شده، هر چند در عمل، برای تعیین اندازه نمونه بیشتر با نگرش بیزی سروکار داریم. چنین نگرشی به محقق این امکان را می‌دهد که از اطلاعات پیشین آزمایش، پارامترهای مجهول را برآورد کند.

در این پایان نامه هدف یافتن برآورد قابل قبول پارامتر n براساس تابع زیان بیزی است. بدین منظور با معلوم فرض نمودن پارامتر p و نیز با اختصاص توزیع‌های پیشین برای n از بین توزیع‌های معروف گسسته و استفاده از توابع زیانی چون تابع زیان مربع خطا و تابع زیان مربع خطای مقیاسی، اقدام به برآورد n خواهیم نمود.

به پاس زحمات بی‌دریغشان که هرگز فراموش نمی‌شوند،

به پاس تعبیر عظیم انسانیشان از کلمه ایثار

این مجموعه را به

مادر مهربانم

وپدر فداکارم

تقدیم می‌کنم.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس خدای مهربان را که به من کمک کرد تا بتوانم دوره کارشناسی ارشد را به لطف و یاری او به اتمام برسانم. ضمن تشکر از خانواده عزیز و دوستانم که همواره همراه و پشتیبان من بودند، برخود لازم می‌دانم که از زحمات استاد راهنمای بزرگوارم دکتر حسین بیورانی، از راهنمایی‌های استاد مشاورم آقای دکتر هژیر حومئی قدردانی کنم. هم‌چنین از اساتید محترم که همیشه حامی و راهنمای بنده بوده‌اند سپاسگزارم.

فهرست مندرجات

فهرست جداول

فصل اول

مقدمه

مقدمه

برآورد پارامتر n توزیع دوجمله‌ای حدود نیم قرن است که افکار دانشمندان را به خود اختصاص داده است و هر ساله افراد متعددی به این مسئله پرداخته‌اند در حالی که بسیاری از موضوعات متوجه ویژگی گشتاوری و ماکزیمم درستنمائی نمونه کوچک و مجانبی آنها بوده است و برآوردهای دیگر در عمل نادیده گرفته شده‌اند. در سالهای اخیر دانشمندان از دیدگاه بیز درباره برآورد پارامتر n استفاده کرده‌اند.

شاید محبوبیت نگرش بیزی برای محاسبه n به این دلیل باشد که در نگرش کلاسیک از رفتار پیشین n اطلاع نداریم در حالی که نظریه بیز برای پارامتر مجهول جامعه که در این پایان نامه n توزیع دوجمله‌ای می‌باشد توزیع پیشینی نیز فرض می‌کند. بنابراین در نظریه کلاسیک n برآورد شده با خطای بیشتری مواجه خواهد بود زیرا آن را یک عدد ثابت ولی مجهول در نظر گرفته‌اند. البته روش بیزی به دلیل یافتن پیشین دقیق n بدون انحراف و اشکال نیست ولی از خطای کمتری نسبت به روش کلاسیک برخوردار است.

در برآورد پارامتر n توزیع دوجمله‌ای براساس یک مشاهده با p معلوم زمانی که فضای پارامتر $N = \{0,1,2,\dots\}$ باشد، برآورد طبیعی n به صورت $\delta^0 = X/p$ است. روخین[1] [۱۶]، گوش و میدن[2] [۵] نشان دادند که این برآورد دارای خصوصیات بهینه بوده و نیز تنها برآورد ناریب و تحت تابع زیان مربع خطا، قابل قبول و مینیماکس است. ولی در بیشتر مواقع فضای پارامتر n بریده است به این معنی که $n \in N^+ = \{1,2,\dots\}$، لذا برآوردگر δ^0 آشکارا تحت هر تابع زیان محدبی غیر قابل قبول است. فیلدمن و فوکس[3] [۴]، همدانی و والتر[4] [۶] نیز در این رابطه کارهای بسیاری انجام داده‌اند. همچنین صدوقی الوندی[5] [۱۷] در فضای N^+ تحت تابع زیان مربع خطا برآوردگر قابل قبول را برای n معرفی کرده است. صدوقی الوندی و پارسیان[6] [۱۸] برآوردی را تحت تابع زیان لاینکس نامتقارن به دست آورده‌اند و یانگ[7] [۲۰] یک مشخص سازی از برآوردگرهای خطی قابل قبول یعنی $aX + b$ که در آن $b \geq 0$, $1 < a < \frac{1}{p}$ یا $b = 0$, $a = \frac{1}{p}$ تحت تابع زیان مربع خطا تهیه کرده است. در این پایان نامه به بررسی مقالات زو و ون[8] [۲۲] رده‌ای از برآوردگرهای قابل قبول در فضای N^+ معرفی کرده‌اند و ایپیلیوس[9] [۷] قابل قبول بودن برآوردگرهای بیزی n را تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان مربع خطای مقیاسی بررسی کرده‌اند، می پردازیم.

در فصل دوم این پایان نامه تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز بیان شده و در فصل سوم با اختصاص توزیع پیشین ناسره، پواسن و دوجمله‌ای منفی برای n برآوردگرهای بیزی آن را تحت تابع زیان مربع خطا و زیان مربع خطای مقیاسی می‌یابیم و به بررسی مینیماکس و قابل‌قبول بودن آنها پرداخته و نتایج را شبیه سازی نموده

---

[1] Rukhin
[2] Ghosh and Meeden
[3] Feldman and Fox
[4] Hamedani and Walter
[5] Sadoghi-Alvandi
[6] Parsian
[7] Yang
[8] Zou and Wan
[9] Iliopoulos

و مقایسه می‌کنیم. در فصل چهارم به کاربرد برآورد n در توزیع دوجمله‌ای پرداخته که تعداد کل خطا در سیستم اصلاح پذیر و منظم را برآورد خواهیم نمود.

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به تعریف مفاهیم اولیه، که در فصل‌های بعدی این پایان نامه مورد نیاز است می پردازیم.

۱.۲ توزیع دوجمله‌ای[۱]

هر آزمایش تصادفی که تنها دارای دو برآمد باشد امتحان برنولی نام دارد . معمولا این دو برآمد را موفقیت و شکست می‌نامند. در حالتی که n آزمایش مکرر برنولی انجام شود و هر آزمایش برنولی از آزمایش‌های دیگر مستقل باشد و احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر θ باشد، لذا متغیرتصادفی X که عبارت است از تعداد موفقیت ها در n امتحان، دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامتر n و θ است.

تابع احتمال، برای X با داشتن θ عبارت است از:

$$f(x;\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}; \qquad x=0,1,2,\dots,n.$$

۱ Binomial Distribution

۲.۲ توزیع پواسن[۲]

توزیع پواسن الگوی واقعی برای بسیاری پدیده‌های تصادفی را فراهم می‌کند. از آنجا که مقادیر یک متغیر تصادفی پواسن اعداد صحیح نامنفی هستند، هر پدیده‌ی تصادفی که در آن نوعی از شمارش مورد توجه باشد، با فرض توزیع پواسن برای آن می‌توان مدل بندی کرد. این شمارش ممکن است، تعداد تصادفات رانندگی منجر به مرگ در هفته در کشوری معین، تعداد شهاب سنگهای که در طی یک دوره‌ی چرخش یک ماهواره‌ی آزمایشی در مدار به آن برخورد می‌کند و غیره باشد.

گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسن است، اگر چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f(x;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; \qquad x=۰,۱,۲,\dots,n.$$

که در آن پارامتر λ، در $\lambda>۰$ صدق می‌کند.

۳.۲ توزیع دو جمله‌ای منفی[۳]

توزیع با تابع چگالی گسسته

$$f(x;r,p)=\binom{r+x-۱}{x}p^{r}q^{x}; \qquad x=۰,۱,۲,\dots,n.$$

که در آن پارامترهای r و p در $r=۱,۲,\dots$ و $۰<p\leq ۱$ ، $(q=۱-p)$ است، توزیع دوجمله‌ای منفی تعریف می‌شود. در ادبیات آماری گاهی آن را توزیع پاسکال گویند. به متغیر تصادفی X با توزیع دو جمله‌ای منفی

[۲] Poisson Distribution
[۳] Negative Binomial Distribution

اغلب متغیر تصادفی زمان انتظار گسسته اطلاق می‌شود. این متغیر نشان می‌دهد چه مدت (برحسب تعداد شکستها) برای r امین موفقیت انتظار می‌کشیم.

۴.۲ تابع تصمیم[۴]

تابعی با دامنه‌ی O_n (فضای یافته‌ها) و برد A (فضای کارها) را با $d(\underline{x})$ نشان می‌دهیم. برای هر $x \in O_n$، به یک کار a می‌پردازیم. یعنی داریم

$$d(\underline{x}) = a \in A$$

هنگامی که θ پارامتر یک توزیع و $d(\underline{x})$ برآورد آن باشد، کار a به عنوان گزینش $d(\underline{x})$ به عنوان برآورد θ در نظر گرفته می شود. مثال زیر مفهوم تابع تصمیم را بهتر روشن می‌کند.

مثال ۲-۱ فرض کنید θ، درصد لامپ‌های معیوب کارخانه باشد، خریدن لامپ را کار a_1 و نخریدن لامپ را کار a_2 می‌گیریم، در این مثال $A = \{a_1, a_2\}$ اکنون بدین روش تصمیم می‌گیریم تا لامپ را به صورت انبوه خریداری کنیم:

۵ دوجین لامپ را می‌آزماییم، اگر تعداد لامپهای معیوب در هر دوجین حداکثر یک باشد، خرید می‌کنیم و در غیر این صورت خرید نمی‌کنیم. مجموعه تمام توابع تصمیم را با D نشان می‌دهیم و آن را فضای توابع تصمیم می‌گوییم.

[۴] Decision Distribution

۵.۲ تابع زیان[5]

هنگامی که با مشاهده‌ی $\underline{x}$ برای انجام کار a تصمیم می‌گیریم، ممکن است با زیان مالی و غیرمالی (برای نمونه رسوایی یا نگرانی) روبه رو شویم، زیرا از وضع واقعی طبیعت آگاهی نداریم، این زیان را با یک تابع دومتغیره غیرمنفی از θ و $a = d(\underline{x})$ بیان می‌کنیم. چنین تابعی را که می‌تواند به صورت های گوناگون باشد، تابع زیان می‌نامند و آن را با $L(\theta, a)$ نشان می‌دهند.

۶.۲ تابع ریسک برای تصمیم[6]

اگر d یک تصمیم و $L(\theta, d)$ تابع زیان مشخص باشد، تابع ریسک عبارت است از تابعی نامنفی و متناهی که آن را با $R_d(\theta)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_d(\theta) = E_\theta[L(\theta, d(X))].$$

۷.۲ تصمیم مینیماکس[7] و تصمیم قابل قبول(مجاز)[8]

فرض کنید D مجموعه تصمیم و $R_d(\theta)$ تابع ریسک برای $d \in D$ با تابع زیان $L(\theta, d)$ باشد، تصمیم $d_m \in D$ را مینیماکس می‌گوییم، هر گاه برای هر $d \in D$ داشته باشیم

[5] Loss Function
[6] Risk Function for Decision
[7] Minimax
[8] Acceptable

$$\max_{\theta\in T} R_{d_m}(\theta) \le \max_{\theta\in T} R_d(\theta),$$

و تصمیم d_a را قابل قبول گوییم اگر تصمیم دیگری در D نتوان پیدا کرد به گونه‌ای که از d_a بهتر باشد. یعنی در مقایسه‌ی دو تصمیم d_1 با d_2 با تابع ریسک به ترتیب $R_1(\theta)$ و $R_2(\theta)$، d_1 را بهتر از d_2 می‌گوییم، هر گاه برای هر $\theta \in T$، $R_1(\theta) \le R_2(\theta)$ و برای برخی از $\theta \in T$، $R_1(\theta) < R_2(\theta)$ باشد.

بنابراین تصمیم d را غیرمجاز یا غیرقابل قبول می‌گوییم، اگر $d_m \in D$ وجود داشته باشد به طوری که بهتر از d باشد.

۸.۲ تصمیم بیزی[۹]

در روشهای کلاسیک پارامتر θ را با مقدار ثابت معلوم در نظر گرفته و یک نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_n$ از جمعیت که دارای توزیع $f_\theta(X)$ بود جمع‌آوری کرده و بر اساس آن در مورد θ تصمیم‌گیری می‌کردیم ولی در روش بیزی θ را کمیتی در نظر می‌گیریم که خود متغیر تصادفی است و تغییرات آن توسط یک توزیع احتمال (که آن را توزیع پیشین می‌نامند) بیان می‌گردد. این توزیع پیشین بر اساس اعتقادات و تجربیات قبلی آزمایشگر و قبل از مشاهده‌ی داده‌ها تعیین می‌گردد. سپس از جمعیت یک نمونه جمع‌آوری می‌شود و بر اساس آن توزیع پیشین تصحیح می گردد. توزیع پیشین تصحیح شده را توزیع پسین می‌نامند و بر اساس این توزیع پسین تصمیم‌گیری انجام می‌گیرد.

[۹] Bayesian Decision

فرض کنید X یک نمونه تصادفی که توزیع آن به θ بستگی دارد و دارای توزیع پیشین $\pi(\theta)$ باشد، براساس این نمونه تصادفی در توزیع پیشین تجدید نظر می‌کنیم و چگالی پسین را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x;\theta)}{m(x)},$$

که $f(x;\theta)$ چگالی توأم x , θ و $m(x)$ چگالی کناری x است. بنابراین

$$f(x;\theta) = \pi(\theta).f(x|\theta), \qquad\qquad m(x) = \int f(x;\theta)\, d\theta,$$

همچنین در تابع مخاطره $R_d(\theta) = E_\theta[L(\theta, d(x))]$ تابعی از θ است و در نگرش بیزی θ متغیر تصادفی است پس $R_d(\theta)$ نیز یک متغیر تصادفی است و تابعی از θ است و اگر توزیع احتمال θ را با $\pi(\theta)$ نشان دهیم آنگاه امید ریاضی $R_d(\theta)$ را نسبت به چگالی پیشین θ، مخاطره بیز می‌نامند. یعنی

$$r_{d,\pi} = E_\theta[R_d(\theta)]$$

۱.۸.۲ تصمیم بیز

تصمیم $d_b \in D$ را یک تصمیم بیز نسبت به $\pi(\theta)$ (چگالی پیشین) می‌نامند هر گاه برای هر $d \in D$ داشته باشیم

$$r_{d_b,\pi} \leq r_{d,\pi},$$

به سخنی دیگر، d_b را تصمیم بیز می‌گوییم هر گاه کمترین ریسک بیز را دارا باشد یعنی $r_{d_b,\pi} \leq min r_{d,\pi}$.

در برآورد نقطه‌ای پارامتر $\gamma(\theta)$ داریم: