بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

کاربرد روش بدون المان گالرکین در تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد ورق‌ها با اشکال هندسی مختلف

رساله دکترا مهندسی عمران- سازه

عرفان جابرزاده

استاد راهنما

دکتر مجتبی ازهری

۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

رساله دکترا مهندسی عمران گرایش سازه آقای

عرفان جابرزاده

تحت عنوان

کاربرد روش بدون المان گالرکین در تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد ورق‌ها با اشکال هندسی مختلف

در تاریخ ۱۳۹۲/۰۱/۲۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر مجتبی ازهری
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر بیژن برومند
۳- استاد داور	دکتر حمید هاشم الحسینی
۴- استاد داور	دکتر حمید خادم حسینی بهشتی
۵- استاد داور	دکتر بهروز کوشا
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر عبدالرضا کبیری سامانی

از پدر و مادر عزیزم که در طول سالیان عمرم همواره مشوق و حامی من در امر تحصیل علم بودند، قدردانی می‌نمایم. از همسر مهربانم که با بردباری بسیار شرایط مناسب را برای انجام این رساله برای من فراهم نمود، تشکر می‌کنم. از جناب آقای دکتر ازهری به سبب کلیه زحماتی که برای من به عنوان استاد راهنما متحمل شدند و همیشه پشتیبان من بودند، بسیار سپاسگزارم. از جناب آقای دکتر برومند که زحمت مشاوره این رساله را بر عهده داشتند و در مسیر انجام آن به من یاری رساندند، کمال تشکر را دارم. همچنین از استادان عزیزم آقایان دکتر سعادتپور، دکتر مستوفی‌نژاد، دکتر مؤمنی و سایر اساتید گرامی قدردانی می‌نمایم. در پایان نیز از تمامی دوستان و همراهان خود در دانشگاه که با همدلی خود من را یاری کرده‌اند متشکرم.

خدایا همواره در کنارم بودی و با یاد تو این مرحله از زندگی خود را گذراندم، مرا به حال خود تنها مگذار...

عرفان جابرزاده

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این رساله متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم و همسر عزیزم

چکیده

هدف از انجام این رساله، بررسی کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌ها با اشکال هندسی مختلف با به کارگیری روش بدون المان گالرکین می-باشد. این روش ابزار قدرتمندی در مدل‌سازی ورق‌ها با اشکال هندسی مختلف و شرایط مرزی گوناگون است. در این روش از توابع شکلی که بر اساس درون‌یابی حداقل مربعات متحرک صورت می‌گیرد، استفاده شد. در این رساله در چهار بخش مجزا به بررسی کمانش الاستیک و غیرالاستیک ورق‌های متوازی‌الاضلاع و لوزی شکل، ارتعاش آزاد ورق‌های لایه لایه با سرعت طولی همراه با غلتک‌های مورب، سپس کمانش حرارتی ورق‌های مرکب متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه‌ای شکل، ودر آخر به تحلیل کمانش ورق‌های ویسکوالاستیک نسبتاً ضخیم، با ضخامت ثابت و پله‌ای پرداخته می‌شود. در تحلیل کمانش الاستیک و غیرالاستیک ورق‌های متوازی‌الاضلاع تأثیر وجود تکیه‌گاه‌های میانی و تغییرات ضخامت ورق مورد توجه قرار گرفته و ضرایب کمانش برای ورق‌ها با زاویه تورب مختلف به صورت تابعی از ضخامت ورق ارائه شده است. در تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌ها با سرعت محوری طولی اثر نیروهای لبه‌ای و نیز وجود تکیه‌گاه‌های میانی بر فرکانس ارتعاش ورق مورد بررسی قرار گرفته است. قسمت دیگری از این رساله به تحلیل کمانش حرارتی ورق‌ها با خواص متغیر در ضخامت ورق اختصاص دارد، تحلیل کمانش حرارتی این‌گونه ورق‌ها با اشکال هندسی متوازی‌الاضلاع و ذوزنقه‌ای منجر به ارائه تغییرات دمای بحرانی برای ورق می‌گردد. تغییرات دما در ضخامت ورق می‌تواند به شکل یکنواخت یا غیرخطی باشد. تأثیرات تغییر نسبت ابعاد ورق، نسبت ضخامت ورق و نحوه تغییر خصوصیات مکانیکی ورق در ضخامت آن بر کمانش حرارتی، در این بخش بررسی شده است. قسمت پایانی رساله مربوط به تحلیل کمانش ورق‌های نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری میندلین و تعمیم آن برای ورق‌هایی که دارای خاصیت ویسکوالاستیک هستند، می‌باشد. در این بخش ضرایب کمانش ورق‌ها با ضخامت ثابت و پله‌ای با شکل هندسی مستطیلی و متوازی‌الاضلاع، برای انواع مختلف شرایط مرزی ارائه شده است. در این رساله برای اعمال شرایط مرزی ورق از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌شود.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب ..... هشت

چکیده ۱

فصل اول: مقدمه‌ای در مورد روش‌های عددی

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ انواع روش‌های بدون شبکه و برخی از کاربردهای آن‌ها ۳

۱-۳ مقایسه کلی روش اجزاء محدود با روش‌های بدون شبکه ۶

۱-۴ پیشینه تحقیقات گذشته پیرامون روش بدون المان گالرکین در تحلیل مسائل مربوط به ورق‌ها ۱۰

۱-۵ اهداف تحقیق حاضر ۱۵

۱-۶ پیشینه بررسی کمانش غیر الاستیک ورق‌ها ۱۶

۱-۷ پیشینه بررسی ارتعاش ورق‌ها با سرعت طولی ۱۹

۱-۸ پیشینه بررسی کمانش حرارتی ورق‌های با خواص متغیر در ضخامت ۲۲

فصل دوم: روش بدون المان گالرکین

۲-۱ مقدمه ۲۵

۲-۲ مدل‌سازی دامنه ۲۶

۲-۲-۱ درون‌یابی جابه‌جایی ۲۶

۲-۲-۲ مفهوم دامنه تأثیر ۲۷

۲-۲-۳ تشکیل معادلات سیستم ۲۸

۲-۲-۴ حل مسأله برای کل سیستم ۲۸

۲-۳ تولید توابع شکل بر اساس در روش‌های بدون المان ۲۸

۲-۳-۱ کلیات ۲۸

۲-۳-۲ روش حداقل مربعات متحرک ۳۲
۲-۳-۳ توابع وزن ۳۵

فصل سوم : تحلیل کمانش الاستیک و غیرالاستیک ورق‌های متوازی‌الاضلاع و لوزی شکل

۳-۱ مقدمه ۳۹
۳-۲ روابط کرنش- تغییرمکان ۴۰
۳-۳ روابط تنش -کرنش ۴۱
۳-۴ روابط ممان-تغییرمکان ۴۳
۳-۵ معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق ۴۵
۳-۵-۱ اعمال شرایط مرزی ۴۸
۳-۶ نتایج ۵۱
۳-۶-۱ بررسی همگرایی نتایج ۵۱
۳-۶-۲ بررسی کمانش الاستیک ورق‌های متوازی‌الاضلاع با ضخامت ثابت ۵۳
۳-۶-۳ بررسی کمانش الاستیک ورق‌های متوازی‌الاضلاع با تکیه‌گاه میانی ۵۵
۳-۶-۴ بررسی کمانش غیرالاستیک ورق‌های متوازی‌الاضلاع با ضخامت ثابت ۵۷
۳-۶-۵ بررسی کمانش غیرالاستیک ورق‌های متوازی‌الاضلاع با ضخامت ثابت و تکیه‌گاه میانی ۶۴
۳-۶-۶ بررسی کمانش غیرالاستیک ورق‌های متوازی‌الاضلاع با ضخامت متغیر ۶۷
۳-۶-۷بررسی کمانش غیرالاستیک ورق‌های لوزی شکل ۷۲

فصل چهارم : تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های دارای سرعت محوری طولی با استفاده از روش بدون المان گالرکین

۴-۱ مقدمه ۷۵
۴-۲ ماتریس خواص ماده ۷۷
۴-۲-۱ ورق‌های تک لایه ۷۷
۴-۲-۲ ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای ۷۸

۴-۳ فرمول‌بندی ارتعاش آزاد ورق مرکب لایه‌ای با سرعت محوری ۸۰
۴-۳-۱ اعمال شرایط مرزی ۸۴
۴-۳-۲ هندسه ورق‌های مورد بررسی ۸۵
۴-۳-۳ خصوصیات مکانیکی ورق متحرک ۸۷
۴-۴ نتایج عددی ۸۷
۴-۴-۱ بررسی همگرایی نتایج ۸۸
۴-۴-۲ سایر نتایج عددی ۸۹

فصل پنجم: تحلیل کمانش حرارتی ورق‌ها با خواص متغیر در ضخامت

۵-۱ مقدمه ۱۰۱
۵-۲ کاربرد مواد FGM ۱۰۳
۵-۳ روش‌های ساخت و تولید مواد FGM ۱۰۳
۵-۴ مدل‌سازی مواد FGM ۱۰۴
۵-۵ فرمول‌بندی کمانش حرارتی ورق ۱۰۶
۵-۵-۱ معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق ۱۰۶
۵-۵-۲ تغییرات دما در ضخامت ورق ۱۰۸
۵-۵-۳ تحلیل معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق ۱۱۰
۵-۵-۴ اعمال شرایط مرزی ۱۱۱
۵-۶ نتایج عددی ۱۱۳
۵-۶-۱ خصوصیات مکانیکی ورق‌های مورد بررسی ۱۱۳
۵-۶-۲ هندسه ورق‌های مورد مطالعه ۱۱۳
۵-۶-۳ بررسی همگرایی نتایج ۱۱۴
۵-۶-۴ بررسی کمانش حرارتی ورق‌های متوازی‌الاضلاع ۱۱۷
۵-۶-۵ بررسی کمانش حرارتی ورق‌های ذوزنقه‌ای ۱۲۵

فصل ششم: تحلیل کمانش ورق‌های نسبتاً ضخیم و کاربرد آن در حل ورق‌های ویسکوالاستیک

۶-۱ مقدمه ۱۲۹

۶-۲ تئوری‌میندلین در تحلیل مسائل ورق ۱۲۹

۶-۳ فرمول‌بندی مسأله کمانش ورق ۱۳۲

۶-۳-۱ اعمال شرایط مرزی ۱۳۵

۶-۴ مدل‌سازی ورق ویسکوالاستیک ۱۳۷

۶-۵ نتایج عددی ۱۴۰

۶-۵-۱ تحلیل ورق‌های متوازی‌الاضلاع الاستیک ۱۳۹

۶-۵-۲ تحلیل ورق‌های مربعی ویسکوالاستیک ۱۴۳

۶-۵-۳ تحلیل ورق‌های متوازی‌الاضلاع ویسکوالاستیک ۱۴۵

۶-۵-۴ تحلیل ورق‌های ویسکوالاستیک با ضخامت پله‌ای ۱۵۱

فصل هفتم: جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ۱۵۶

مراجع ۱۶۰

فصل اول

مقدمه‌ای در مورد روش‌های عددی

۱-۱ مقدمه

امروزه مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی غالباً دربرگیرنده حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است. تحلیل این معادلات دیفرانسیل وابسته به شرایط مرزی مختلف در محیط یا دامنه حل مسأله می‌باشد، به عبارت دیگر تحلیل و طراحی در مسائل مختلف مهندسی، شامل به کارگیری اصول فیزیکی در قالب حل معادلات دیفرانسیل در یک محیط مشخص با شرایط مرزی گوناگون می‌باشد که در دهه‌های اخیر از روش‌های عددی مختلف نظیر روش اجزاء محدود و روش تفاضل محدود برای این‌گونه تحلیل‌ها استفاده شده است. در روش‌های مذکور باید دامنه حل مسأله به شبکه‌هایی تقسیم‌بندی شود. شکل‌گیری این شبکه‌ها در نتیجه اتصال گره‌ها به یکدیگر می‌باشد.

به طور نمونه، روش تفاضل محدود کاربرد مناسبی در حل مسائل سیالات دارد اما مشکل اساسی آن اتکاء این روش به توزیع گره‌ای منظم می‌باشد. روش‌های دیگر نظیر اجزاء محدود یا نوارهای محدود نیز از روش‌های مؤثری هستند که به طور سنتی در دهه‌های اخیر در حل معادلات دیفرانسیل پیچیده از طریق گسسته‌سازی محیط یا حجم به اجزاء مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این روش‌ها شبکه‌بندی از طریق تولید المان‌های مستطیلی (به طور کلی چهار ضلعی) یا مثلثی در مورد مسائل دو بعدی یا المان‌های حجمی در ارتباط با مسائل سه بعدی مقدمه حل مسأله

می‌باشد. در چنین روش‌هایی ابتدا معادله دیفرانسیل در محدوده المان تحلیل می‌شود و سپس با توجه به نحوه ارتباط بین المان‌ها معادله دیفرانسیل در کل دامنه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در سال‌های اخیر کوشش‌هایی در جهت ابداع روش‌های نوین عددی که نیازمند المان‌بندی یا شبکه منظم گره‌ای نباشد، صورت گرفته است. در این بین توجه روزافزونی به روش‌های بدون شبکه یا بدون المان معطوف شده است، که عمدتاً به علت هزینه بالای شبکه‌بندی محیط مسأله در روش‌های اجزاء محدود می‌باشد. این در حالی است که گسسته سازی در روش‌های بدون شبکه مبتنی بر تعدادی گره می‌باشد، که به صورت پراکنده در دامنه حل مسأله قرار دارند. پراکندگی گره‌ها در دامنه می‌تواند منظم یا غیرمنظم باشد. به طور کلی در مورد پراکندگی گره‌ها و تراکم آن‌ها، بسته به شکل دامنه و مرزهای مسأله و دقت مورد نیاز می‌توان تصمیم‌گیری نمود. در این روش‌ها تحلیل مسأله از ابتدا در کل دامنه صورت می‌گیرد[۱].

در یک مقایسه ساده با روش اجزاء محدود، روش‌های بدون المان می‌توانند بستر مناسبی برای برطرف نمودن معایبی مانند ایجاد المان یا شبکه، ناپیوستگی تنش‌ها و دقت کم آن‌ها به خصوص در مرزهای المان‌ها، تغییر شکل المان‌ها در مسائل با تغییرشکل‌های بزرگ، مدل‌سازی ترک با مسیرهای پیچیده و نگاشت المان‌ها در مرز محیط‌های پیچیده ایجاد نمایند.

به نظر می‌رسد مادامی که از المان برای مدل‌سازی دامنه حل مسأله استفاده می‌شود، حل مشکلات مذکور ساده نخواهند بود. لذا مفهوم روش‌های بدون شبکه یا المان توسط محققین پیشنهاد گردیده‌اند تا امکان تعریف حوزه مسأله تنها به وسیله مجموعه‌ای از نقاط که به دلخواه توزیع شده‌اند، فراهم گردد. روش‌های بدون المان در رفع مشکلاتی که به آن‌ها اشاره شد، کاربرد فراوانی پیدا کرده‌اند. به عنوان مثال در مسائل رشد ترک و تمرکز تنش می‌توان با اضافه کردن تعداد نقاط یا گره‌هایی که برای مدل‌سازی دامنه به کار می‌رود، مسأله را با دقت بالاتری تحلیل نمود.

بسیاری از روش‌های بدون شبکه یا بدون المان در مرحله توسعه و پیشرفت قرار دارند و حتی در مراجع مختلف نام‌های متفاوتی به آن‌ها اطلاق می‌گردد.

۱-۲ انواع روش‌های بدون شبکه و برخی از کاربردهای آن‌ها

در این زمینه تا به حال روش‌های مختلفی ارائه شده است. برخی از آن‌ها عبارتند از :

-روش بدون المان گالرکین[1] [۲و ۳]: این روش مبتنی بر درون‌یابی "حداقل مربعات متحرک"[2] بوده و برای فرمول‌بندی روابط از فرم ضعیف، استفاده می‌شود.

-روش بدون المان محلی پتروف-گالرکین[3][۴]: این روش نیز مبتنی بر درون‌یابی "حداقل مربعات متحرک" بوده و برای فرمول‌بندی روابط از فرم ضعیف محلی و انتگرال‌گیری در دامنه‌ای محدود نسبت به کل دامنه مسأله، استفاده می‌شود.

-روش نقاط محدود[4] [۵]: در این روش از درون‌یابی "حداقل مربعات وزنی"[5] استفاده می‌شود و در فرمول-بندی روابط بر پایه فرم قوی، می‌باشد.

-روش درون‌یابی نقاط[6] [۶]: در این روش از درون‌یابی نقاط برای تولید توابع شکل استفاده می‌شود و در فرمول‌بندی روابط فرم ضعیف به کار برده می‌شود.

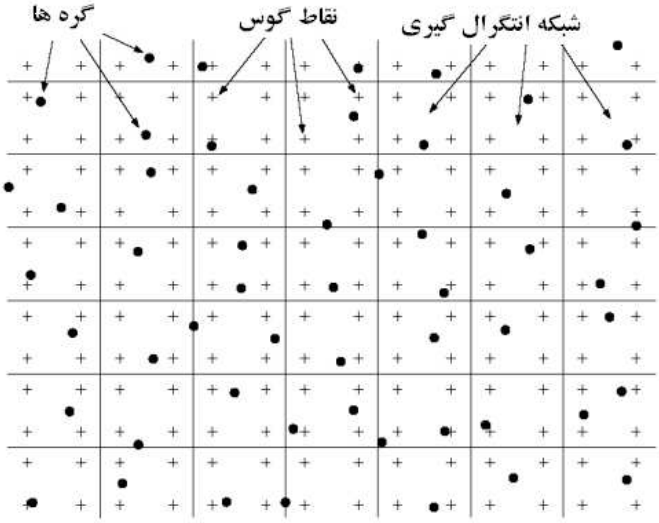
در این‌جا لازم به توضیح است که روش‌هایی که از فرم قوی معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کنند باید در آن-ها توابع شکل دارای پیوستگی بالاتری بوده و معمولاً از پایداری کم‌تری در حل معادلات دیفرانسیل برخوردارند.

نقطه مشترک تمامی این روش‌ها در این است که حداقل در مرحله درون‌یابی متغیرها در دامنه حل مسأله نیازی به استفاده از شبکه (المان بندی) از پیش تعریف شده مانند آن‌چه در اجزاء محدود صورت می‌گیرد، وجود ندارند.

برخلاف آن‌چه که از نام این روش‌ها استنباط می‌شود، بسیاری از آن‌ها برای انتگرال‌گیری در دامنه یا مرز به شبکه پس‌زمینه برای تعیین نقاط انتگرال‌گیری نیاز دارند؛ هر چند در سال‌های اخیر کوشش‌هایی توسط محققین مختلف برای از بین بردن این نقیصه و ایجاد روش‌هایی که واقعاً بدون شبکه باشند، صورت گرفته است. در این زمینه، در شکل ۱-۱ شبکه پس زمینه همراه با نقاط گوس جهت انتگرال‌گیری عددی و نیز گره‌هایی که برای مدل‌سازی دامنه به کار می‌روند به صورت شماتیک نشان داده شده است[۱].

---

[1] Element Free Galerkin(EFG)
[2] Moving Least Squares
[3] Meshless Local Petrov-Galerkin
[4] Finite Points
[5] Weighted Least Squares
[6] Point Interpolation Method



شکل ۱-۱: شبکه پس زمینه جهت انتگرال‌گیری

اگرچه ابداع فرم‌های اولیه روش‌های بدون المان به سال ۱۹۷۷ زمانی که از درون‌یابی SPH [1] برای حل مسائل فیزیک نجوم و هیدرودینامیک استفاده شد، بازمی‌گردد ولی گسترش قابل توجه آن‌ها در دهه اخیر گواه بر وجود اقبال و پیشرفت سریع این روش‌ها است. این روش‌ها به طور کلی، در تحلیل دسته وسیعی از مسائل فیزیکی مختلف به کار گرفته شده اند، که مواردی از آن‌ها به شرح زیر است:

- تحلیل تغییر مکان و تنش در جامدات [۷-۹]
- تحلیل شکست [۱۰-۱۳]
- رشد ترک [۱۴-۱۷]
- دینامیک سیالات [۱۸]
- آنالیز مودال [۱۹]
- ارتعاش آزاد مواد مرکب [۲۰]
- میدان الکترومغناطیس [۲۱-۲۳]
- مسائل مکانیک خاک شامل مسائل مربوط به تعیین خصوصیات خاک و مسائل اندرکنش[۲۴و ۲۵]
- مواد یا سازه‌های هوشمند [۲۶و ۲۷]
- ورق‌ها و پوسته‌ها[۲۸-۳۱]

[1] Smooth Particle Hydrodynamics

۱-۳ مقایسه کلی روش اجزاء محدود با روش‌های بدون شبکه

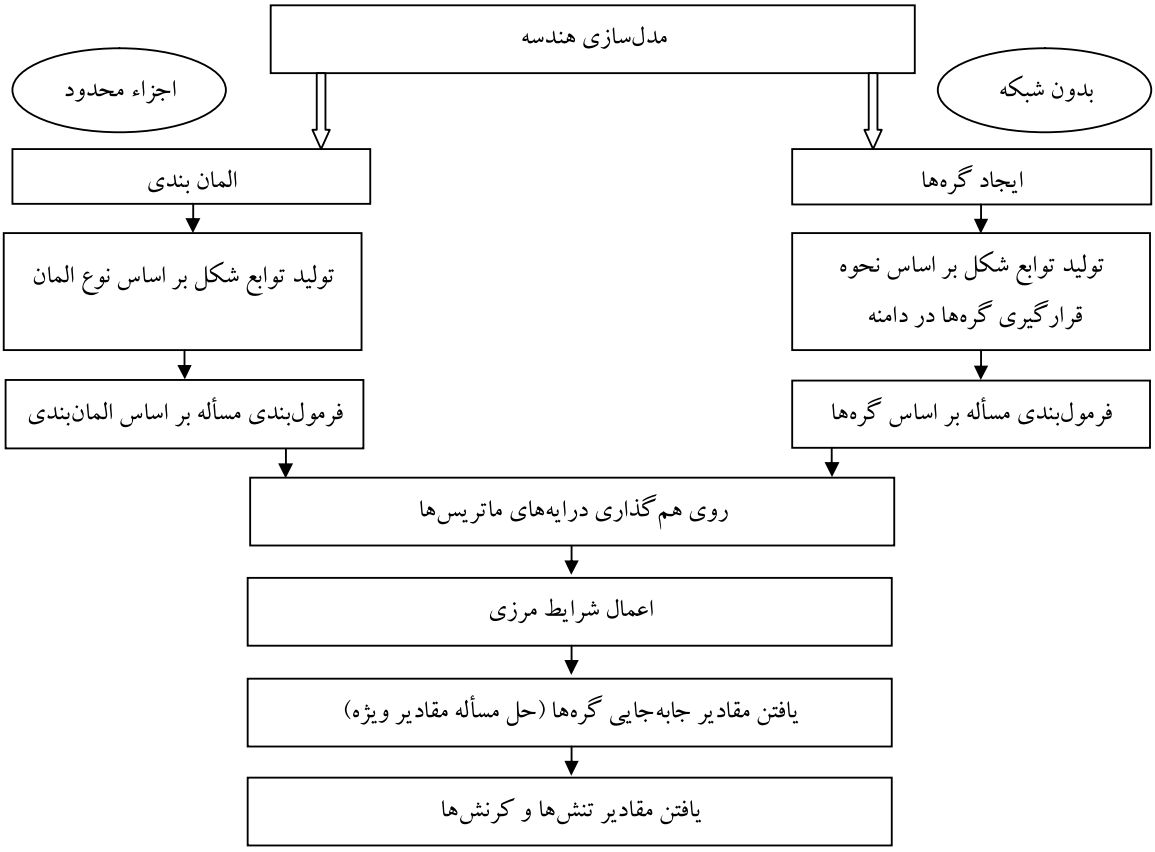
تفاوت عمده روش‌های بدون شبکه با روش اجزاء محدود در عدم نیاز این روش‌ها به المان‌بندی دامنه مسأله و همچنین عدم نیاز به شبکه‌ای که معرف نحوه اتصال المان‌ها باشد، نهفته است.

همان‌طور که پیش از این اشاره شد، برخی از محدودیت‌هایی که در روش اجزاء محدود وجود دارد و روش-های بدون المان سعی در برطرف کردن آن‌ها دارند، عبارتند از:

- المان‌بندی دامنه مسأله که به خصوص در مسائل سه بعدی زمان زیاد و هزینه محاسباتی فراوانی در پی دارد.
- در محاسبه تنش‌ها معمولاً ناپیوستگی و عدم دقت کافی در مرز المان‌ها وجود دارد.
- در تحلیل مسائل با تغییرشکل‌های بزرگ، دقت کافی به علت تغییرشکل زیاد المان‌ها به دست نمی‌آید.
- در مسائل گسترش ترک، چون جهت ایجاد ترک بر مرزهای المان‌ها منطبق نیست، دقت لازم در تحلیل مسأله حاصل نمی‌شود.
- در بسیاری از مسائل نیاز به ژاکوبین برای نگاشت شکل المان‌ها وجود دارد که منجر به افزایش حجم محاسبات می‌گردد.

به طور کلی اساس تفاوت رویکرد دو روش، برای حل مسائل را می‌توان با استفاده از نمودار شکل ۱-۲ تشریح نمود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مسیر حل مسائل توسط دو دسته روش در مرحله مربوط به تولید المان و گسسته‌سازی، از یکدیگر جدا می‌شود و در حقیقت تفاوت بنیادی آن‌ها در نحوه تولید توابع شکل برای درون‌یابی مقادیر مجهول است. در روش اجزاء محدود توابع شکل برای المان‌ها در ابتدای حل مسأله تعیین می‌شوند، به طوری که اگر از دستگاه مختصات طبیعی برای معرفی توابع شکل استفاده شود، توابع شکل برای کل المان‌ها یکسان می-باشند. به همین خاطر توابع شکل در روش اجزاء محدود برای المان‌های مختلف تعیین شده و برای تحلیل مسائل گوناگون به راحتی استفاده می‌شوند. اما در روش‌های بدون شبکه توابع شکل بسته به محل قرارگیری گره‌ها در محیط حل مسأله با یکدیگر متفاوت می‌باشند؛ به طوری که برای تحلیل مسأله توابع شکل در روند حل ساخته شده و مورد استفاده قرار می‌گیرند و این طور نیست که از قبل مشخص باشند.

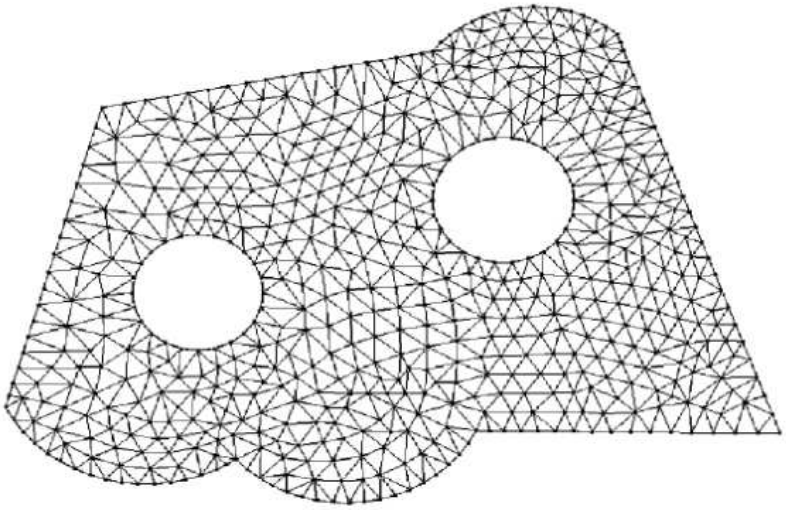
بعد از مرحله گسسته‌سازی محیط این دو دسته روش تقریباً همانند یکدیگر و به طور یکسان در تحلیل مسائل عمل می‌کنند و در بسیاری موارد می‌توان از همان فرمول‌بندی اجزاء محدود در روش‌های بدون شبکه نیز استفاده نمود[۱].



شکل ۱-۲: نمودار روش حل مسأله اجزاء محدود و روش‌های بدون شبکه

در روش اجزاء محدود از آن‌جاکه تحلیل مسأله برای کل دامنه و تعیین توابعی که بتوانند با تقریب مناسب رفتار کل محیط را بیان نماید بسیار پیچیده می‌باشد، از المان‌بندی جهت مدل‌سازی ساده‌تر تغییرشکل دامنه مسأله استفاده می‌شود. در این روش حل مسأله در هر یک از المان‌ها در نهایت به تحلیل مسأله در کل دامنه منجر می‌گردد.

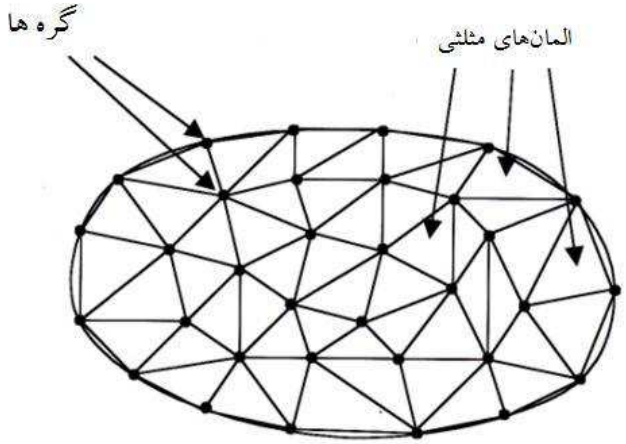
تولید المان در روش اجزاء محدود برای اشکال پیچیده می‌تواند گاهی مشکل و زمان‌بر باشد؛ چراکه المان-بندی باید به طور مناسب بدون هرگونه فاصله بین المان‌ها یا هم‌پوشانی بین آن‌ها صورت گیرد. المان‌های چهارضلعی و مثلثی بیشترین کاربرد را در حل مسائل به روش اجزاء محدود دارند. شبکه‌بندی با استفاده از المان‌های مثلثی، مانند آن‌چه در شکل ۱-۳ نشان داده شده است، ساده‌تر صورت می‌گیرد ولی در مقایسه با المان‌های چهارضلعی با تراکم یکسان گره‌ها، از دقت کمتری برخوردار است.



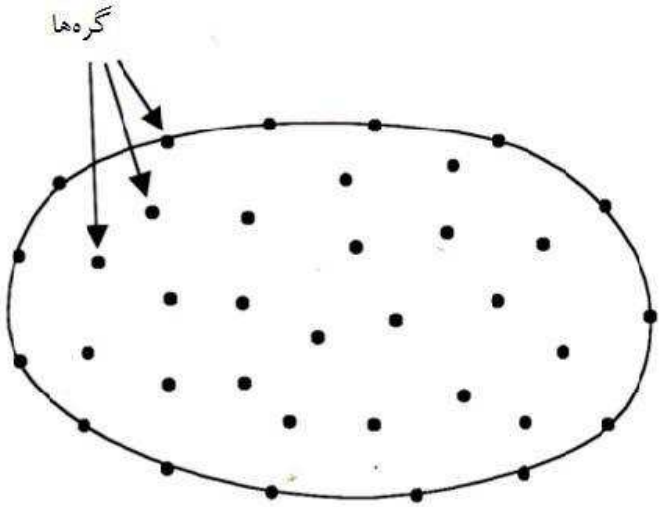
شکل ۱-۳: شبکه‌بندی یک محیط دوبعدی با استفاده از المان‌های مثلثی[۱]

این در حالی است که همان‌طور که قبلاً اشاره شد، در حل مسائل با استفاده از روش‌های بدون المان از تعدادی گره یا ذره برای مدل‌سازی دامنه مسأله استفاده می‌شود. در برخی از این روش‌ها از جمله روش بدون المان گالرکین، برای انتگرال‌گیری عددی به شبکه پس زمینه نیاز است ولی خوشبختانه این شبکه تا زمانی که دقت کافی برای انتگرال‌گیری را تأمین نماید، نیازمند شکل یا ترکیب خاصی نمی‌باشد.

به علاوه در بسیاری از مسائل واقعی مکانیک جامدات ممکن است با مواردی روبرو باشیم که دامنه حل مسأله به صورت شکل‌های پیچیده با مرزهای منحنی شکل باشد. برای مدل‌سازی حقیقی مرزها چنان‌چه از روش اجزاء محدود استفاده شود، باید از المان‌های درجه بالا استفاده نمود؛ ولی در عمل به علت محدودیت‌های زمانی و محاسباتی در بیشتر مواقع از المان‌های درجه یک همانند آن‌چه در شکل ۱-۴ دیده می‌شود، استفاده می‌گردد. بنابراین برای رسیدن به دقت لازم گاهی نیاز است از المان‌های ریزتری به خصوص در مرزها استفاده شود که خود باعث افزایش حجم محاسبات می‌گردد. در حل این‌گونه مسائل با دامنه پیچیده استفاده از روش‌های بدون شبکه می‌تواند بسیار مفید و مؤثر باشد. از آن‌جا که برای مدل‌سازی هندسه از تعدادی گره بر روی دامنه استفاده می‌شود، حتی در صورت استفاده از توابع خطی به عنوان توابع پایه، می‌توان با دقت بالاتری مقادیر مجهول مسأله را در مرزها به دست آورد.



شکل ۱-۴: تحلیل مسأله با روش اجزاء محدود[۱]

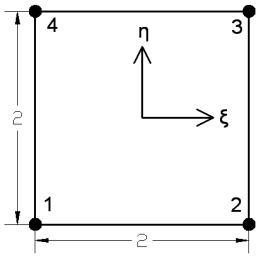


شکل۱-۵ : تحلیل مسأله با روش بدون المان [۱]

تفاوت عمده دیگر بین روش اجزاء محدود و برخی از روش‌های بدون المان از جمله روش بدون المان گالرکین، در نحوه اعمال شرایط مرزی مسأله می‌باشد. در روش اجزاء محدود توابع شکل دارای خاصیت تابع دلتا کرونیکر[1] می‌باشند. به طور مثال برای یک المان چهار گره‌ای به صورت شکل ۱-۶ با استفاده از مختصات طبیعی توابع شکل بیان شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقدار هر تابع شکل در گره مربوطه دارای مقدار یک و در سایر گره‌ها دارای مقدار صفر می‌باشد، وجود این خاصیت مهم باعث می‌گردد تا اعمال شرایط مرزی با استفاده از جدول کد (اتصال)، که نحوه ارتباط گره‌ها را در کل دامنه مشخص می‌کند به آسانی صورت پذیرد. این در حالی است که برخی از روش‌های بدون المان از جمله روش بدون المان گالرکین به علت استفاده از نحوه خاصی از درون-

[1] Kronecker Delta

یابی که در ادامه تشریح خواهد شد، فاقد این خاصیت در توابع شکل ایجاد شده می‌باشند و بنابراین اعمال شرایط مرزی با به کارگیری روش‌های ویژه‌ای مانند ضرایب لاگرانژ[1] انجام می‌شود.



$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_2 = \dfrac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3 = \dfrac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ N_4 = \dfrac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{cases}$$

شکل ۱-۶: توابع شکل یک المان چهارگره‌ای[۱]

۱-۴ پیشینه تحقیقات گذشته پیرامون روش بدون المان گالرکین در تحلیل مسائل مربوط به ورق‌ها

ورق‌ها از اجزاء مهمی هستند که در سازه‌های گوناگون مانند تیرورق‌های پل‌ها، تیرستون‌ها، عرشه سازه‌های دریایی، صنایع کشتی سازی و هواپیماسازی کاربرد دارند. ورق‌ها با اشکال گوناگون به صورت ساده یا با ضخامت متغیر و گاهی همراه با حفره، با جنس‌های مختلف، وقتی می‌توانند به لحاظ سازه‌ای و جنبه اقتصادی عملکرد مناسبی داشته باشند که دارای حداقل وزن ممکن باشند. بنابراین به لحاظ نازکی و ظرافت تحلیل کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌ها از اهمیت به سزایی در طراحی سازه‌ها برخوردار است.

تحلیل دقیق صفحات به جزء در شرایط خاص از لحاظ شکل هندسی و شرایط مرزی، اگر نه غیرممکن بلکه بسیار مشکل است. از این رو استفاده از روش‌های عددی مانند اجزاء محدود و نوارهای محدود به طور گسترده برای آنالیز صفحات مورد استفاده قرار گرفته است. در سال‌های اخیر روش‌های بدون شبکه نیز مورد توجه پژوهشگران بوده است.

در بین این روش‌ها، روش بدون المان گالرکین که توابع شکل را بر مبنای روش حداقل مربعات متحرک (MLS[2]) به دست می‌آورد، به خوبی توسعه یافته و فرمول‌بندی شده است. این روش ابتدا توسط بلیچکو و همکارش در سال ۱۹۹۴ توسعه پیدا کرد[۲]. آن‌ها اولین بار از این روش در تحلیل مسائل الاستیسیته و انتقال حرارت استفاده نمودند. توسعه این روش توسط آن‌ها، در واقع بر پایه تحقیق نیرولز در سال ۱۹۹۲ صورت گرفت[۳]، با این تفاوت

[1] Lagrange Multipliers
[2] Moving Least Squares