بسم الله الرحمن الرحیم

بررسی مدل صف بندی M/M/c با خط مشی (d, N)-کنترل

تقدیر و تشکر

اول سپاس خدای بزرگ را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست و سپس اساتید بزرگواری که مرا درس زندگی آموختند. پیش از همه از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمدرضا صالحی راد، که طی طریق این تحقیق با راهنمایی های ارزنده و هدایت های بی دریغ خویش، برجسته ترین نقش را داشته اند.

از جناب آقای دکتر بادامچی زاده که تذکراتشان باعث غنای پایان نامه شد سپاسگزارم. همچنین از تمامی اساتید گرامی، جناب آقای دکتر نعمت الهی، دکتر ممقانی، دکتر اسکندری،دکتر پور طاهری و دکتر خرم از بابت آنچه به من آموختند بنده ایشان و از بابت آنچه نیاموختم شرمنده ایشان هستم.

در پایان از پدر، مادر و همسرم که مشعلان طریق علم آموزی ام بوده اند و با حمایت های بی دریغ خویش، همیشه باعث پشت گرمی من شده اند نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

فرید فروغی

تیر ۱۳۸۷ــ تهران

چکیده :

در این پایان نامه، هدف بررسی یک نوع مدل صف بندی M/M/c با خط مشی (d,N)- کنترل است. در این مدل، به محض اینکه d تا از سرویس دهنده ها بیکار شدند (در لحظه خروج متقاضیی کـه باعث بیکاری d ا مین سرویس دهنده شود)، این d سرویس دهنده همزمان به تعطیلی می روند. وc-d سرویس دهنده دیگر در محل سرویس دهی باقی می مانند. در این حالت ایـن سـرویس دهنـده هـا یـا مـــشغول ســـرویس دهـــی هـــستند یـــا بیکارنـــد. خـــط مـــشی بازگـــشت ســـرویس دهنده هایی که در تعطیلی هستند به محل سرویس دهی به این صورت است که در پایان هـر تعطیلـی تعداد متقاضیان در صف کنترل می شود. اگر این تعداد بیشتر یا مساوی N باشد (N≥c) این سـرویس دهنده ها به باجه های سرویس دهی برمی گردند، در غیر این صورت تعطیلی آنها ادامه می یابد. به این خطی مشی سرویس دهی، خط مشی (d,N)- کنترل می گویند.

برای این مدل ابتدا توزیع احتمال تعداد متقاضیان در صف را پیدا مـی کنـیم. همچنـین تبـدیل لاپلاس استیلتیس توزیع زمان انتظار در صف را بدست می آوریـم. در فـصل اول تعـاریف مـورد نیـاز ، مسئله مورد بررسی و همچنین ادبیـات مـسئله را مـی آوریـم. در فـصل دوم بـه بررسـی روش هندسـه ماتریسی می پردازیم. در فصل سوم توزیع احتمال اندازه سامانه را پیدا می کنیم. در فصل چهارم زمـان انتظار در سامانه را بررسی خواهیم کرد. در پایان با حل یک مثال عددی مدل مـورد بررسـی را تحلیـل می کنیم.

عنوان	فهرست مطالب	صـــــفحه

فصل اول ـ تعاریف و کلیات

فصل دوم ـ روش هندسه ماتریسی

عنوان | فهرست مطالب | صفحه

۱ـ۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم، تعاریف و قضایای مهم مورد نیاز در این پایان نامه ر ا می آوریم. در بخش ۱ـ۲ به توصیف پدیده های تصادفی می پردازیم و فضای احتمال را بصورت مجرد تعریف می کنیم و مباحثی از فرایندهای تصادفی رابه طور خلاصه مطرح می کنیم. در این بخش همچنین فرایندهای (QBD)[1]را معرفی می کنیم. در بخش ۱ـ۳ مدل های صف بندی را معرفی و مباحثی از آنها را که در این پایان نامه استفاده می کنیم، می آوریم. در این بخش همچنین مدل های صف بندی M/M/c را معرفی می کنیم. در بخش ۱ـ۴ اندازه های مؤثر بودن در مدل های صف بندی را ارائه می دهیم. در بخش ۱ـ۵ خلاصه تاریخچه کارهای انجام شده در این زمینه را می آوریم. در بخش ۱ـ۶ به معرفی مدل مورد بررسی در این پایان نامه می پردازیم. در بخش ۱ـ۷ خلاصه ای از مباحث مطرح شده در فصل اول را بیان می کنیم.

۱ـ۲ فضای احتمال

همان طور که می دانیم در طبیعت پدیده هایی وجود دارند که زمان و چگونگی رخداد آنها به طور صددرصد قابل پیش بینی نبوده و در برخی موارد نیز غیرقابل پیش بینی هستند. با این حال دانشمندان همواره تلاش کرده اند تا از راه تجربه و مشاهده به کمک علم و فن آوری تا آنجا که مقدور است علت پدیده ها را کشف نمایند.

برای پیش بینی این پدیده ها باید شانس رخداد آنها را اندازه گیری کنیم. این امر منجر به تعریف و پیدایش نظریه احتمال گردید. برای مثال فرض کنید می خواهیم آزمایشی را انجام دهیم که نتیجه آن غیرقابل پیش بینی است. به این صورت که اگراین آزمایش را تکرار کنیم نتیجه هر تکرار، متفاوت از نتایج قبلی است. به این گونه آزمایش ها، آزمایش های تصادفی می گویند. اگر چه نتیجه هر

[1] .Quasi-birth-and-death

آزمایش برای ما قابل پیش بینی و مشخص نیست، اما فرض کنید مجموعه کامل نتایج یعنی کلیهٔ حالاتی که ممکن است اتفاق بیفتد مشخص باشد. به این مجموعه فضای نمونه آزمایش می گوییم و آن را با S نشان می دهیم.

تعریف متغیر تصادفی

فضای احتمال (S,B,P(.)) را در نظر بگیرید که در آن S مجموعه ای دلخواه B، یک سیگما میدان از زیر مجموعه های S و P(.) یک تابع احتمال است. تابع حقیقی $X(w)$ را که دامنه آن عضوی از B و بردش زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد را یک متغیر تصادفی روی این فضای احتمال می نامیم، هر گاه برای تمام $E\in B$ داشته باشیم.

$$X^{-1}(E)=\{w\in S: X(w)\in E\}\in B$$

تعریف فرایند تصادفی

خانواده ای از متغیرهای تصادفی $\{X(t),t\in T\}$ یا به طور خلاصه تر $\{X(t)\}$را یک فرایند تصادفی می گوییم. که در آن Tرا مجموعه اندیس گذار و S را فضای وضعیت فرایند می نامیم و بعلاوه $X(t)\in S$ است. مجموعه T را معمولاً زمان در نظر می گیرند.

بسته به شمارا یا ناشمارا بودن مجموعه های S,T فرایند $X(t)$ به چهار رده تقسیم می شود. اگر T شمارا باشد، فرایند را گسسته ـ پارامتر می گوییم و آن را با $\{X_n\}$ نمایش می دهیم که در آن $n\in T$ است، در غیر اینصورت آن را پیوسته - پارامتر می نامیم. اگر S مجموعه ای شمارا باشد $X(t)$ را زنجیر و در غیر این صورت آن را فرایند می گوییم. بطور خلاصه جدول زیر نشان دهنده رده بندی فرایندهای تصادفی است. در این پایان نامه ما رده دوم یعنی فضای وضعیت گسسته و فضای پارامتر پیوسته باشد، را در نظر می گیریم.

نوع پارامتر

فضای وضعیت	گسسته	پیوسته
گسسته	زنجیر گسسته ـ پارامتر	زنجیر پیوسته ـ پارامتر
پیوسته	فرایند گسسته ـ پارامتر	فرایند پیوسته ـ پارامتر

تعریف فرایند (زنجیر) مارکوف

فرآیند $\{X(t), t > 0\}$ را فرایند (زنجیر) مارکوف می نامند اگر برای اعداد حقیقی $x_1, x_2, \ldots x_n \quad , \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_n \quad \forall$ داشته باشیم

$$p\{X(t_n) \le x_n \,|\, X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_{n-1})\} = p\{X(t_n) \le x_n \,|\, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

به عبارت دیگر، با معلوم بودن موقعیت حاضر فرایند، موقعیت آینده مستقل از گذشته است.

تعریف احتمال های تغییر وضعیت (انتقال)

اگر X_n برابر j باشد آنگاه می گویند سامانه بعد از n قدم در وضعیت j است حال فرض کنید فرایند در قدم $n-1$ در وضعیت i بوده است. آنگاه احتمال های شرطی $p\{X_n = j \,|\, X_{n-1} = i\}$ را احتمال های تغییر وضعیت فرایند $\{X_n\}$ می نامند. اگر این احتمال ها مستقل از n باشند آنگاه می‌گویند که زنجیر همگن است و برای سادگی کار می توان احتمال های فوق را بصورت p_{ij} نشان داد.

برای زنجیرهای همگن احتمال تغییر وضعیت m مرحله ای را بصورت زیر تعریف کرده و این احتمال ها نیز از n مستقل هستند.

$$p_{ij}^{(m)} = p\{X_{n+m} = j \,|\, X_n = i\}$$

احتمال غیرشرطی حالت j در n امین مرحله را بصورت زیر نشان می دهیم.

$$\pi_j^{(n)} = p\{X_n = j\}$$

برای $n=0$ ، $\pi_j^{(0)}$ را توزیع احتمال اولیه زنجیر می نامیم.

معادلات چپمن ـ کولموگروف[۱]

اگر m و n اعداد طبیعی باشند، آنگاه برای زنجیر های مارکوف گسسته- پارامتر داریم

$$\forall i,\, j \in S:\ p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{r\in s} p_{ir}^{(m)} p_{rj}^{(n)} \qquad (1)$$

همچنین برای زنجیر های مارکوف پیوسته- پارامتر، معادلات چپمن ـ کولموگروف برای $s>t>u>0$ ووضعیت های i و j به صورت

$$p_{ij}(u,s) = \sum_{r} p_{ir}(u,t)\, p_{rj}(t,s) \qquad (2)$$

است. که درآن ، $p_{ij}(u,s)$ احتمال حرکت از وضعیت i به وضعیت j با زمان شروع u و زمان ختم s بوده، و عمل جمعبندی روی تمام وضعیت های زنجیر است.

معادلات دیفرانسیل پیشرو و پسرو کولموگروف[۲]

اگر توابع احتمال تغییر وضعیت $p_{ij}(u,s)$ زنجیر دارای این خاصیتهای اضافی باشند که توابع پیوسته $q_i(t)$ و $q_{ij}(t)$ موجود بوده وداشته باشیم

$$p_r(t,t+\Delta t) = 1 - p_{ii}(t,t+\Delta t) = q_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{ij}(t,t+\Delta t) = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

---

[۱] Chapman-kolmogorov

[۲] Forward and backward differentials equation kolmogrov

که در آن p_r احتمال تغییر وضعیت در $(t, t+\Delta t)$ است.آنگاه تحت بعضی شرایط نظم ضعیف (صفحه ۱۱۲ راس (۱۹۷۰))معادله(۲) به معادلات

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{ij}(u,t) = -q_j(t) p_{ij}(u,t) + \sum_{r \neq j} p_{ir}(u,t) q_{rj}(t) \qquad (۳)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} p_{ij}(u,t) = q_i(u) p_{ij}(u,t) - \sum_{r \neq j} q_{ir}(u) p_{rj}(u,t) \qquad (۴)$$

منتهی می شوند.به این دو معادله دیفرانسیلی به ترتیب معادلات پیشرو و پسرو کولموگروف می گویند.

در معادله (۳) فرض کنیم $u = ۰$ و فرآیند همگن به قسمی است که برای تمام مقادیر t ، $q_i = q_i(t)$ و $q_{ij} = q_{ij}(t)$. در این صورت به دست می آوریم

$$\frac{dp_{ij}(۰,t)}{dt} = -q_j p_{ij}(۰,t) + \sum_{r \neq j} p_{ir}(۰,t) q_{rj}$$

اگر دو طرف معادله فوق را در $p_i(۰)$ (احتمال شروع زنجیر از وضعیت i در زمان صفر) ضرب و روی تمام مقادیر i جمع کنیم،نتیجه می شود

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = -q_j p_j(t) + \sum_{r \neq j} p_r(t) q_{rj}$$

این معادله را با نماد ماتریسی می توان چنین نوشت

$$p'(t) = p(t) Q$$

که در آن

$$p(t) = (p_۰(t), p_۱(t), \ldots)$$

$$p'(t) = \left(\frac{dp_۰(t)}{dt}, \frac{dp_1(t)}{dt}, \ldots\right)$$

و

$$Q=\begin{pmatrix} -q_{0} & q_{01} & q_{02} & q_{03} & \cdots \\ q_{10} & -q_{1} & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_{2} & q_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ماتریس Q را ماتریس شدت می نامند.(به هریس (۱۹۸۵) مراجعه کنید)

تعریف ماتریس شدت(Q)

ماتریسی که عناصر آن را نرخ های تغییر وضعیت زنجیر مارکوف تشکیل می دهند ،ماتریس شدت زنجیر مارکوف می نامند که دارای ویژگی های زیر می باشد:

۱- حاصل جمع عناصر غیر قطر اصلی هر سطر برابر با قرینه عنصر قطر اصلی همان سطر ماتریس است.

۲- عناصر غیر قطر اصلی Q نامنفی هستند.

۳- حاصل جمع عناصر در هر سطر ماتریس برابر صفر است.

این ماتریس در زنجیر های مارکوف گسسته- پارامتر به ماتریس نرخ تغییر وضعیت مشهور است.

تعریف حالت بازگشتی[۱] و حالت گذرا[۲]

$f_{jj}^{(n)}$ را احتمال بازگشت زنجیر به وضعیت j، برای اولین بار بعد از n تغییر وضعیت و با شروع از j تعریف می کنیم. بنابراین احتمال بازگشت به j به صورت زیر تعریف می شود:

---

[۱] .Recurrent state

[۲] .Transient state

$$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$$

اگر $f_{jj} = ۱$ ، آنگاه j را حالت بازگشتی می نامند و اگر $f_{jj} < 1$ باشد j را حالت گذرا می-گویند. وقتی $f_{jj} = ۱$ باشد، میانگین زمان بازگشت به صورت زیر تعریف می شود:

$$m_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$$

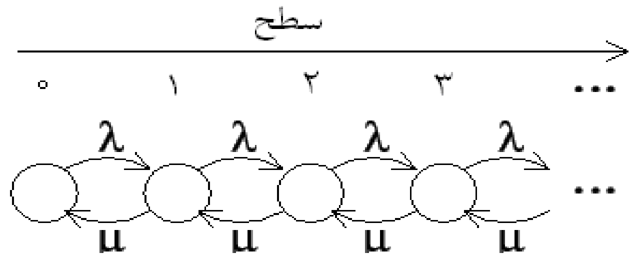
اگر $m_{jj} < \infty$ باشد، آنگاه j را حالت بازگشتی مثبت و اگر $m_{jj} = \infty$ باشد j را حالت بازگشتی پوچ می نامند.

تعریف فرایند QBD

در حالت کلی یک فرایند QBD یک زنجیر مارکوف روی فضای وضعیت

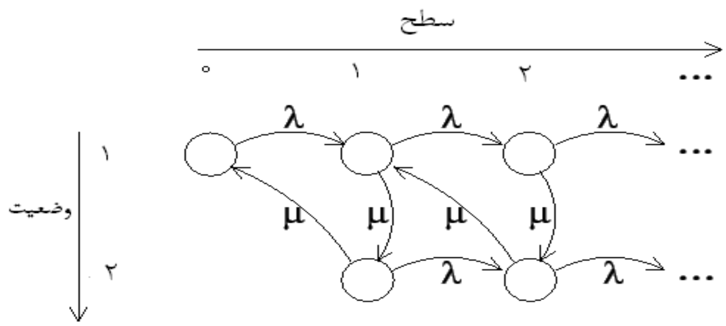
$$s = \left\{ (i, L) \middle| ۱ \le i \le n_L , L \ge ۰ \right\}$$

می باشد،که در آن L نشان دهنده سطح زنجیر و i نشان دهنده وضعیت درون سطح L است. در این پایان نامه تعداد متقاضیان در سیستم را سطح(L) و تعطیلی یا عدم تعطیلی تعدادی از سرویس دهندها را وضعیت در نظر می گیریم. سطح L دارای n_L وضعیت برای هرL می باشد . برای مثال در شکل زیر(ب) $(L \ge ۱)$ $n_۰ = ۱, n_L = ۲$.



(الف)فرآیند زاد و مرگ

شکل۱ -۱



(ب) فرآیند QBD

در یک فرایند QBD انتقال به سطح های مجاور یا انتقال به وضعیت های درون یک سطح مجاز می باشد. بنابرین یک فرایندQBD دارای ماتریس شدت به صورت زیر

$$Q = \begin{bmatrix} L^{(0)} & F^{(0)} & & & \\ B^{(1)} & L^{(1)} & F^{(1)} & & \ddots \\ & B^{(2)} & L^{(2)} & F^{(2)} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

می باشد. که در آن

زیرماتریس $F^{(L)}$ نشان دهنده تغییروضعیت ازسطح L به سطح L+۱ برای $L \geq 0$

زیر ماتریس $B^{(L)}$ نشان دهنده تغییر وضعیت از سطح L به سطح L-۱ برای $L \geq 1$

و زیر ماتریس $L^{(L)}$ نشان دهنده تغییر وضعیت درون سطحL برای $L \geq 0$ است.حال برای درک بیشتر فرایند های QBD کار خود را با یک مثال ادامه می دهیم.

یک فرایند زاد و مرگ یک مثال از فرایند QBD می باشد. شکل(۱-۱(الف)) یک مثال از فرایند زاد و مرگ را به ما نشان می دهد. این فرایند زاد و مرگ،مدل صف بندی M/M/۱ می باشد که در آن متقاضیان با توزیع ورودی پواسون و نرخ λ وارد می شوند و زمان سرویس دهی دارای توزیع

نمایی با پارامتر μ می باشد. در حالت کلی یک فرایند زاد و مرگ یک زنجیر مارکوف روی فضای وضعیت $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ می باشد که تغییر وضعیت ها تنها دروضعیت های مجاور مجاز می باشد. یعنی تنها از حالت L به حالت L-۱ و حالت L+۱، برای $L \geq 1$ مجاز می باشد و برای وضعیت صفر تنها تغییر وضعیت به حالت یک وجود دارد . بنابرین ماتریس شدت یک فرایند زاد و مرگ به صورت

$$Q = \begin{bmatrix} -f_0 & f_0 & & \\ b_1 & -(b_1+f_1) & f_1 & \\ & b_2 & -(b_2+f_2) & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

است.که در آن

f_L نشان دهنده تغییروضعیت ازسطحL به سطح L+۱ برای $L \geq 0$

b_L نشان دهنده تغییر وضعیت از سطح L به سطح L-۱ برای $L \geq 1$

است. در شکل (۱-۱(الف)) ، $f_L = \lambda$ و $b_L = \mu$، برای تمام L ها می باشد.

شکل (۱-۱(ب)) نشان دهنده یک فرایند QBD می باشد که یک فرایند زاد و مرگ نمی باشد و در آن

$$F^{(0)} = (\lambda \quad 0) \qquad F^{(L)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$B^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \qquad B^{(L)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(0)} = -\lambda \qquad L^{(L)} = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & 0 \\ 0 & -(\lambda+\mu) \end{pmatrix}$$

می باشند.(به نیوتس[۱](۱۹۸۱) ،لاتوس وآرماسوامی[۲] مراجعه کنید)

---

۱ .Neuts

۲ .Latouc,G.Rmaswami,v.

۱ـ۳ مدل های صف بندی

در ایـن بخـش چـارچوب و روابـط کلـی حـاکم بـر مـدل صـف بنـدی را مـورد بررسـی قـرار می دهیم. تعاریف، نتایج و فضای مورد نیاز را بطور خلاصه بیـان مـی کنـیم. سـپس مـدل M/M/c را توصیف می کنیم. پس از آن مدل های صف بندی M/M/c با خـط مـشی (d,N) کنتـرل را بررسـی و مباحث اولیه مربوط به آن را بیان می کنیم.

نظریه صف بندی به منظور بهینه سازی (در اینجا منظور کاهش طول صف، کاهش زمان سرویس و هزینه ها است) و تهیه مدلی مناسب برای پیش بینی رفتار سامانه هایی که سعی دارند به درخواست-های تصادفی متقاضیان پاسخ دهند، گسترش یافته است. اولین مسئله ای که در این زمینه مطالعه شده است، مسالهٔ تراکم درخواست مکالمات تلفنی بوده است که توسط ارلانگ[۱] (۱۹۰۹) مـورد بررسـی قـرار گرفت. مدل های صف بندی کاربردهای فراوانی دارند. با استفاده از ابزارها و روش هـای موجـود در ایـن نظریه می توان یـک مـدل مناسـب و بهینـه بـرای مـسأله مـورد نظـر تهیـه کـرد. اگـر بـه هـر کتـاب صف بندی مراجعه کنیم، یک تعریف جامع برای مدل صف بنـدی ارائـه نـشده اسـت بلکـه فقـط آن را توصیف می کنند. ما نیز در اینجا یک توصیف کلی برای یک مدل صف بندی ارائه می کنیم.

توصیف یک مدل صف بندی

یک مدل صف بندی را به صورت ساده می تـوانیم چنـین توصـیف کنـیم. اشـخاص، اشـیاء و یـا کارهایی به منظور گرفتن یک نوع سرویس به یک مکان مراجعه می کننـد. هـر یـک از آنهـا را معمـولاً متقاضی یا مشتری[۲] می نامند. اگر ارائه سرویس بلافاصله مقدور نباشد متقاضیان منتظر می مانند و یک صف را تشکیل می دهند، و بعد از گرفتن سرویس آن محل را ترک می کنند.

۱ .Erlang

۲ .customer

مشخصه های فرآیند های صف بندی

برای هر مدل صف بندی می توان شش مشخصه پایه ای را در نظر گرفت. این مشخصات عبارتند از

(۱) الگوی ورود متقاضیان

الگوی ورود یا ورودی به یک سامانه صف بندی غالباً برحسب متوسط تعداد مراجعین در واحد زمان (میانگین نرخ ورود) یا به وسیله متوسط زمان بین دو ورود متوالی اندازه گیری می شود.

(۲) الگوی ارائه سرویس

الگوی سرویس نیز می تواند به وسیلهٔ نرخ سرویس دهی (تعداد متقاضیانی که در واحد زمان سرویس می شوند) و یا به وسیلهٔ زمان لازم برای سرویس یک متقاضی اندازه گیری شود.

(۳) نظم صف

نظم صف به روشی اطلاق می شود که با آن وقتی که صف شکل گرفته است متقاضیان را برای سرویس انتخاب می کنیم. متداول ترین نظم آن است که هر که اول وارد می شود اول هم سرویس می گیرد (FCFS)[۱]. نوع دیگری از نظم سرویس دهی به ترتیب عکس ورود متقاضیان است (LCFS)[۲] که بیشتر در سامانه های انبار داری که کالاها در اثر مرور زمان خراب نشوند مورد استفاده قرار می گیرد. به این صورت که آخرین کالای انبار شده اول از انبار خارج شده و سرویس می گیرد. انتخاب تصادفی متقاضیان برای سرویس[۳] مستقل از زمان ورود آنان به صف و انواع روش های حق تقدم[۱]، صورت های دیگری از نظم صف می باشند.

[۱].First come ,First served

[۲].Last come, First served

[۳].Random selection for service (RSS)

(۴) ظرفیت سامانه

منظور از ظرفیت سامانه حداکثر تعداد متقاضیانی است که می توانند در صف قرار گیرند. ظرفیت سامانه یا بی نهایت و یا متناهی است.

(۵) تعداد باجه های سرویس

تعداد باجه های سرویس به تعداد سرویس دهنده های موازی گفته می شود که می توانند متقاضیان را هم زمان سرویس دهند.

(۶) تعداد مراحل سرویس

یک سامانه صف بندی ممکن است تنها یک مرحلهٔ سرویس داشته باشد مانند یک آرایشگاه یا یک فروشگاه بزرگ، یا ممکن است چندین مرحله داشته باشد مانند شیوهٔ آزمایش پزشکی که مثالی از یک سامانه صف بندی چند مرحله ای است.

تعریف دوره اشتغال[۲]

فاصله زمانی بین ورود یک متقاضی به یک باجه بیکار (در زمان صفر) تا زمانی که باجه سرویس دو مرتبه بیکار می شود را دوره اشتغال سرویس دهنده می نامند.

تعریف دوره بیکاری[۳]

فاصله زمانی بین خروج آخرین متقاضی از سامانه تا ورود اولین مشتری بعدی را دوره بیکاری سرویس دهنده می نامند. به عبارت دیگر فاصله زمانی بین دو دوره اشتغال متوالی را دوره بیکاری می-نامند.

---

۱ .Priority

۲.Busy period

۳ .Idle period

تعریف دوره تعطیلی[۱]

طول دوره زمانی که سرویس دهنده با وجود متقاضی در سیستم سرویس ارائه نمی دهد.

زمان انتظار در سیستم[۲]

مدت زمانی که متقاضی برای سرویس گرفتن در سامانه منتظر می ماند.

زمان انتظار در صف[۳]

مدتی زمانی که متقاضی تا رسیدن به مرحله سرویس دهی در صف منتظر می ماند.

تعریف عامل بهره دهی (شدت ترافیک)[۴]

درصدی از زمان که سامانه کار می کند و یا نسبت میانگین کل تقاضا برای دریافت سرویس در واحد زمان به کل ظرفیت سامانه برای ارائه سرویس در واحد زمان را عامل بهره دهی یا شدت ترافیک می نامند و آن را با ρ نشان می دهند. طبق این تعریف هر چه مقدار ρ بزرگتر باشد، تقاضا برای دریافت سرویس زیادتر می باشد و سامانه باید کار بیشتری انجام دهد و بنابراین صف طولانی تر خواهد شد.

مدل های صف بندی M/M/c

مدل های صف بندی M/M/c یکی از کاربردی ترین مدل های صف بندی هستند. یک مدل M/M/c را می توان به صورت زیر توصیف کرد.

۱) c سرویس دهنده به صورت موازی به متقاضیان سرویس می دهند،

۱.vacation period

۲ .Wating time in system

۳ .Wating time in queue

۴.Utilization factor (Traffic intensity)

۲) زمان های سرویس متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع و مستقل از فرآیند ورود می باشند،

۳) متقاضیان بر اساس یک فرآیند پواسون با پارامتر λ وارد سامانه می شوند،

۴) هر یک از c باجه دارای توزیع زمان سرویس مستقل نمایی با پارامتر μ می باشند،

۵) در این مدل شدت ترافیک به صورت $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$ است،

۶) متقاضیانی که در زمان اشتغال سرویس دهنده ها وارد سامانه می شوند، تا زمان شروع سرویس در یک صف منتظر می مانند.

۱-۴ اندازه های مؤثر بودن در مدل های صف بندی

تا اینجا توجه ما معطوف به شرح جنبه های فیزیکی فرآیندهای صف بندی بوده است. در این بخش مطالبی در مورد چگونگی مؤثر بودن، یا به عبارتی بهینه بودن، یک سامانه صف بندی را ارائه می دهیم. عموماً سه ویژگی یک سامانه صف بندی مورد توجه است. این سه ویژگی عبارتند از:

(۱) اندازۀ زمان انتظار متقاضی در سامانه

(۲) تعیین روشی که متقاضیان بر طبق آن تشکیل صف می دهند.

(۳) اندازه اوقات فراغت یا بیکاری سرویس دهندگان

چون اکثر سامانه های صف بندی حاوی عناصر تصادفی هستند، بنابراین این اندازه ها نیز متغیرهای تصادفی بوده و توزیع های احتمال آنها یا حداقل تعیین مقادیر امید ریاضی آنها مورد نظر است.

کار تحلیل گر یک سامانه صف یکی از موارد زیر است

(الف) تعیین مقادیر اندازه های مناسب مؤثر بودن فرآیند داده شده.

(ب) طرح ریزی یک سامانه بهینه.