بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

ویژگی نقطه ثابت در فضاهای باناخ

تدوین

فرخنده تخته

استاد راهنما

دکترعلیرضا مدقالچی

اسفند 1388

بسمه تعالی

تاریخ:..........................
شماره:..........................
پیوست:..........................
واحد:..........................

دانشکده علوم ریاضی
و
کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی‌ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ خانم فرخنده تخته دانشجوی دورهٔ کارشناسی‌ارشد رشتهٔ ریاضی محض تحت عنوان:

ویژگی نقطه ثابت با استفاده از ویژگی‌های دوگان فضای باناخ

در روز چهارشنبه مورخ ۸۸/۱۲/۵ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجهٔ آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۸/۷۵ می‌باشد.

۱ـ عالی ☑
۲ـ بسیار خوب ☐
۳ـ خوب ☐
۴ـ قابل قبول ☐
۵ـ غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر علیرضا مدقالچی	دکتر سید منصور واعظ پور	دکتر امیرخسروی

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی
و کامپیوتر

یابان طالقانی ، بعد از
بهار ، شماره ۵۹۹ ،
: ۱۵۶۱۸
۷۷۵۰۷۷
۷۷۶۰۲۹۸۸
یابان شهید بهشتی ، میدان
، دانشگاه تربیت معلم ،
: ۳۷۵۵۱ ـ ۳۱۹۷۹ ،
۴۵۷۹۶۰ ـ ۰۲۶۱

تقدیم به **پدرعزیز و مادرمهربانم**

مَنْ لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ

خداوند منان راشکرگزارم که توفیق گام نهادن در وادی علم و دانش وچشیدن ذره‌ای از آن بیکران رابر من ارزانی داشت. هم او که مرا از وجود اساتید فرهیخته و گرانمایه‌ای بهره مند گردانید که هریک مهر تابنده ای برندانسته هایم بودند. مراتب قدردانی و تشکر خود را به استاد بزرگوارم جناب آقای پرفسور علیرضا مدقالچی که در طول تدوین این پایان‌نامه و در دوران تحصیلم در دوره‌ی کارشناسی ارشد زحمات فراوانی متحمل شدند، ابراز می‌دارم و برای ایشان آرزوی سلامتی و طول عمر دارم. از استاد ارجمندم جناب آقای پرفسور امیر خسروی نه تنها به خاطر این‌که به عنوان داور داخلی زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، بلکه به خاطر زحمات فراوانی که در طول دوران تحصیلم در دوره‌ی کارشناسی ارشد برای من کشیده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم. همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر واعظ پور که به عنوان داور خارجی زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه را به عهده گرفتند کمال تشکر را دارم. در پایان از پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل، همواره مشوق و یاری‌دهنده‌ام بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

فرخنده تخته

چکیده

در این پایان نامه وجود نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های نا گسترده و نگاشت های دارای مرکز تعریف شده از یک زیرمجموعه‌ی محدب و بسته‌ی یک فضای باناخ به‌توی آن زیر مجموعه، که دارای شرطی خاص است، بررسی می کنیم. به ویژه یک شرط کافی کلی تر از ضعیف ستاره فشردگی را به‌دست می آوریم، به طوری که اگر C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و کران دار l_1 باشد که در این شرط صدق می‌کند، آن‌گاه هر نگاشت ناگسترده‌ی $T : C \to C$ نقطه‌ی ثابت دارد.

هم چنین ثابت می کنیم یک فضای باناخ با گوی یکه‌ی دوگان که نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره فشرده‌ی دنباله‌ای است، دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت نسبت به توپولوژی ضعیف برای نگاشت های ناگسترده است، اگرفضای دوگان آن دارای ویژگی به‌طوریکنواخت کِدک–کِلِی ضعیف ستاره باشد و ثابت می کنیم که فضاهای باناخ E–محدب (که شامل فضاهای نا مربع یکنواخت هستند.) دارای ویژگی نقطه ثابت هستند.

واژه‌های کلیدی: ویژگی نقطه‌ی ثابت، نگاشت ناگسترده، نگاشت دارای مرکز، توپولوژی ضعیف ستاره، فضای باناخ E–محدب

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۰۰: 47H10,47H09,46B20

پیشگفتار

فرض کنیم X یک فضای باناخ و C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی X باشد. گوییم C دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت برای نگاشت های ناگسترده است، هرگاه هر نگاشت ناگسترده‌ی تعریف شده از C به C نقطه‌ی ثابت داشته باشد. گوییم فضای باناخ X دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت نسبت به نگاشت های ناگسترده است، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی محدب، بسته، کران دار و ناتهی X دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت باشد. تعیین شرایط روی فضای باناخ X وزیرمجموعه‌های X به‌طوری که نقطه‌ی ثابت داشته باشند، در دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه بوده است. درسال ۱۹۷۶کارلویتز[1] نشان داد که درفضای باناخ $(l_1, \|.\|_1)$، هر زیرمجموعه محدب و ضعیف ستاره فشرده $(l_1, \|.\|_1)$ دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت برای نگاشت های ناگسترده است. گوبل[2] و کوزومو[3]درسال ۱۹۷۹ ثابت کردند، زیرمجموعه‌ای محدب، بسته وکران دار از$(l_1, \|.\|_1)$ موجوداست که دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت برای نگاشت های ناگسترده نیست. حال پرسشی که دراینجا مطرح می شود این است: چه نوعی از زیرمجموعه‌های محدب، بسته و کران دار $(l_1, \|.\|_1)$ دارای ویژگی نقطه ثابت برای نگاشت های ناگسترده هستند؟ ما در این پایان نامه یک ویژگی کلی تر از ضعیف ستاره فشردگی را به‌دست می آوریم، به طوری که اگر C زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و کران دار l_1 باشد که در این شرط صدق کند، آن‌گاه هر نگاشت ناگسترده‌ی $T : C \to C$ نقطه‌ی ثابت دارد.

هم چنین یک سوال باز در فضاهای باناخ بازتابی این است: آیا هرفضای باناخ بازتابی دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت برای نگاشت های ناگسترده است؟ در سال های اخیر تلاش های زیادی برای اثبات ویژگی نقطه‌ی ثابت در رده‌های محدودتری از فضاهای باناخ بازتابی صورت گرفته است. اما مساله‌ی ویژگی نقطه‌ی ثابت برای فضاهای ابر بازتابی که رده‌ی محدودتری از فضاهای باناخ بازتابی اند، هنوز باز مانده است. اخیراً فالست[4]، فووستر[5] و ناوارو[6] ثابت کردند، فضاهای باناخ نامربع یکنواخت که یک زیر رده از فضاهای باناخ ابربازتابی هستند، ویژگی نقطه‌ی ثابت دارند.

---

[1] L.A.Karlovitz
[2] K.Goebel
[3] T.Kuczumow
[4] J.G.Falset
[5] E.L.Fuster
[6] E.M.M.Navarro

نادیو[1] و ساستری[2] در سال ۱۹۷۶ فضاهای باناخ E-محدب را معرفی کردند. فضاهای باناخ E-محدب یک رده از فضاهای باناخ هستند که به‌طوراکید بین فضاهای باناخ نامربع یکنواخت و فضاهای ابر بازتابی هستند. در این پایان نامه ثابت می کنیم، فضاهای باناخ E-محدب ویژگی نقطه‌ی ثابت دارند. این پایان نامه شامل ٦ فصل است. در فصل اول قضیه‌هاو تعریف های مقدماتی در مورد فضاهای باناخ وآنالیز تابعی و...را بیان می کنیم. در فصل دوم قضیه هاو تعریف های اساسی نقطه‌ی ثابت را که در فصل های دیگر مورد نیازند، بیان می کنیم. در فصل سوم نگاشت های دارای مرکز و فضاهای با ویژگی (C) ومجموعه‌های با ویژگی (P), (P_τ) (τ توپولوژی خطی روی X است.) را تعریف می کنیم و چند قضیه را در مورد نگاشت های دارای مرکز پیوسته ثابت می کنیم. در فصل چهارم فضاهای باناخ $L(\tau)$ را تعریف می کنیم و مثال هایی ازاین فضاها را ارائه می دهیم و ثابت می کنیم که شرط $L(\tau)$ اکید روی فضای باناخ X رابطه‌ای قوی بین نگاشت های دارای مرکز و نگاشت های ناگسترده ایجاد می کند. در فصل پنجم ثابت می کنیم اگر در یک فضای باناخ مانند X زیر مجموعه‌ای محدب، کران‌دار، بسته و ناتهی مانند K از X شامل یک l_1-پایه به طور مجانبی یک‌ریخت باشد، آن‌گاه K شامل زیر مجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی است که دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت برای نگاشت های ناگسترده نیست. در ادامه‌ی فصل زیر مجموعه‌هایی محدب، کران‌دار و بسته از $L^1[0, 1]$ را که فشرده‌ی ضعیف و زیر مجموعه‌هایی محدب، کران‌دار و بسته از l_1 را که فشرده هستند، مشخص می کنیم .

در فصل ششم ثابت می کنیم یک فضای باناخ با گوی یکه‌ی دوگان w^*- فشرده‌ی دنباله‌ای، دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت نسبت به توپولوژی ضعیف برای نگاشت های ناگسترده است، اگرفضای دوگان آن دارای ویژگی به‌طوریکنواخت کِدک-کِلِی ضعیف ستاره باشد. در ادامه با توجه به خواص فضای دوگان ثابت می کنیم، فضاهای باناخ E-محدب (که شامل فضاهای نا مربع یکنواخت هستند.) دارای ویژگی نقطه‌ی ثابت هستند. فصل‌های ۳،۴و۵ بر مبنای مقاله‌ی

[4] T.D.Benavides,J.G.Falset,E.L.Fuster,P.L.Ramirez,Fixed point properties and proximinality in Banach spaces,Nonlinear Analysis.71(2009)1562-1571

---

[1] S.V.R.Naidu

[2] K.P.R.Sastry

و قسمت هایی از مقاله‌ی

[16] J.G.Falset,E.L.Fuster,S.Prus,The fixed point property for mappings admitting a center,Nonlinear Analysis.66(2007)1257-1274

است. فصل ٦ بر مبنای مقاله‌ی

[12] P.N.Dowling,B.Randrianantoanina,B.Turett,The fixed point property via dual space properties,Journal of Functional Analysis.255(2008)768-775

است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل که شامل سه بخش است، تعریف‌ها و مفهوم‌های مقدماتی در مورد فضاهای باناخ، بازتابی، توپولوژی‌های ضعیف، ضعیف ستاره، همگرایی در اندازه و ... را که در فصل‌های دیگر موردنیازند، ارائه می‌دهیم.

۱.۱ فضاهای باناخ و بازتابی

۱.۱.۱ **تعریف.** فضای برداری X را روی $\mathbb{R}$ یک فضای نرم‌دار گوییم، هرگاه نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ وجود داشته باشد به طوری که:

۱) به ازای هر x از X، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر x از X و هر α از $\mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳) به ازای هر x و y از X، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای نرم دار X یک فضای باناخ نامیده می‌شود، اگر X با متریک $d(x, y) = \|x - y\|$ یک فضای متریک کامل باشد.

اگر فضای باناخ X روی $\mathbb{C}$ باشد، آن را فضای باناخ مختلط می‌نامیم.

۲.۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار و T یک عمل‌گر باشد. نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = ۱\} \ .$$

اگر $\|T\|$ متناهی باشد، T را یک عمل‌گر کران‌دار گوییم. (درغیراین‌صورت T را بی‌کران گوییم.) واضح است که به ازای هر $x \in X$، $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$.

اگر $X \neq ۰$ تعریف نرم T با تعریف زیر هم‌ارز است.

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq ۱\}$$

۳.۱.۱ **قضیه.** [1, 23.14] فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ یک عمل‌گر خطی باشد. آن‌گاه حکم‌های زیر هم‌ارزند.

۱) T یک عمل‌گر کران‌دار است.

۲) عدد حقیقی مثبت M وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$، $\|T(x)\| \leq M\|x\|$.

۳) T در صفر پیوسته است.

۴) T پیوسته است.

۴.۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. گردایه‌ی تمام عمل‌گرهای خطی کران‌دار از X به Y را با $\mathcal{L}(X, Y)$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{L}(X, Y)$ با عمل‌های

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x) \quad , \quad (\alpha T)(x) = \alpha(T(x))$$

یک فضای برداری است. هم‌چنین $\mathcal{L}(X, Y)$ با نرم

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = ۱\}$$

یک فضای‌نرم دار است.

۵.۱.۱ قضیه. [32, 5.13] اگر Y یک فضای باناخ باشد آن‌گاه $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ یک فضای باناخ است.

۶.۱.۱ تعریف. اگر X یک فضای نرم‌دار $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ را با $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ نمایش می‌دهند و اگر Y برابر با $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ را با X^* نمایش می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم.

۷.۱.۱ قضیه (هان ـ باناخ). [35, 3.3] فرض کنیم M زیرفضایی از فضای برداری X باشد و $P : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در رابطه‌های $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ و $P(tx) = tP(x)$ $(t \geq ०, x,y \in X)$ صدق کند، $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ خطی باشد و $f(x) \leq P(x)$ بر M. در این صورت نگاشت خطی $\Lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که $\Lambda(x) = f(x) \qquad (x \in M)$ و

$$-P(-x) \leq \Lambda(x) \leq P(x)$$

۸.۱.۱ قضیه. [1, 23.25] فرض کنیم Y یک زیرفضای برداری از فضای نرم‌دار X و $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابعک خطی پیوسته روی Y باشد. آن‌گاه f می‌تواند به یک تابعک خطی پیوسته‌ی g بر X توسیع یابد به طوری که $\|g\| = \|f\|$.

۹.۱.۱ قضیه. [1, 23.26] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و x عضو ناصفری از X باشد، آن‌گاه تابعک خطی پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که: $\|f\| = ۱$ و $f(x) = \|x\|$.

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. باتوجه به قضیه‌ی (۵.۱.۱) $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ همواره یک فضای باناخ است، $\mathcal{L}(X^*,\mathbb{R})$ را با X^{**} نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان دوم X می‌نامیم. به ازای هر $x \in X$، $\hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ رابا ضابطه‌ی $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم. نگاشت $x \longrightarrow \hat{x}$ (از X به X^{**}) را نشاندن متعارف از X به X^{**} گوییم.

۱۱.۱.۱ تعریف. فضای نرم دار X را بازتابی گوییم، هرگاه نشاندن طبیعی $x \longrightarrow \hat{x}$ (از X به توی X^{**}) پوشا باشد.

۱۲.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار است. $S(X) = \{x \in X : \|x\| = ۱\}$ را کره‌ی یکه و $B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq ۱\}$ را گوی یکه می‌نامیم.

۱۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $D \subseteq X$.

$$diam\ D := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in D\}$$

را قطر D می‌نامیم.

۱۴.۱.۱ قضیه. [32, 8.17] فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این‌صورت X بازتابی است اگر و تنها اگر X^* بازتابی باشد.

۱۵.۱.۱ تعریف. فضای توپولوژیک (X, τ) را یک فضای خطی توپولوژی گوییم، اگر عمل‌های $+ : X \times X \longrightarrow X$ و $. : K \times X \longrightarrow X$ به ترتیب با ضابطه‌های $(x, y) \longrightarrow x + y$ و $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ پیوسته باشند (K میدان اسکالر است.) و (X, τ) یک فضای هاسدورف باشد.

۱۶.۱.۱ تذکر. فرض کنیم X یک فضای خطی توپولوژی باشد. اگر (x_n) دنباله‌ای در X باشد که به x، با توپولوژی τ همگرا باشد، می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{\tau} x$ یا $\tau\text{-}\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$

۱۷.۱.۱ قضیه. [32, 8.15] $(l_۱, \|.\|_۱)$ یک فضای باناخ بازتابی نیست.

۱۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار و τ یک توپولوژی خطی روی X باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را τ-نیم‌پیوسته‌ی پایینی گوییم، در صورتی که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$، τ-بسته باشد. اگر τ توپولوژی نرم باشد، f رانیم پیوسته‌ی پایینی گوییم.

۱۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار و τ یک توپولوژی خطی روی X باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را τ- نیم پیوسته‌ی پایینی دنباله‌ای گوییم، درصورتی‌که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$، τ-بسته‌ی دنباله‌ای باشد. اگر τ توپولوژی نرم باشد، f رانیم پیوسته‌ی پایینی دنباله‌ای گوییم.

۲۰.۱.۱ قضیه. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار و نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ نیم پیوسته‌ی پایینی است اگر و تنها اگر به ازای هر (x_n) در X که $x_n \longrightarrow x_\circ$ و $x_\circ \in X$ داریم:

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) \geq f(x_\circ)$$

برهان. $[2, 25.12] \Longrightarrow$

$\Longleftarrow$ فرض کنیم $x_n \longrightarrow x_\circ$ که $x_\circ \in X$. چون f نیم پیوسته‌ی پایینی است، پس $V = \{x \in X \ : \ f(x) > f(x_\circ) - \varepsilon\}$ یک همسایگی $x_\circ$ است پس $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که به ازای هر $n \geq N$ داریم $x_n \in V$ لذا $f(x_n) > f(x_\circ) - \varepsilon$ در نتیجه $\liminf_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) \geq f(x_\circ)$.

۲۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد و τ یک توپولوژی خطی روی X باشد. زیرمجموعه‌ی C از X را τـفشرده دنباله‌ای گوییم، اگر هر دنباله در C دارای زیردنباله‌ای τـهمگرا باشد.

۲۲.۱.۱ قضیه. [14, 1.6.13] یک زیر مجموعه‌ای از یک فضای متریک فشرده است اگروتنهااگر بسته و فشرده‌ی دنباله‌ای باشد.

۲۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم (X, Σ, μ) یک فضای اندازه‌باشد و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ توابعی اندازه‌پذیر باشند. گوییم (f_n) در اندازه به f همگراست، اگر به ازای هر $\varepsilon > \circ$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = \circ$$

و گوییم (f_n) همگرای موضعی در اندازه به f است، اگر برای هر $\varepsilon > \circ$ و هر $F \in \Sigma$ که $\mu(F) < \infty$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mu\{x \in F : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = \circ \ .$$

۲۴.۱.۱ قضیه. [14, 3.9.8] فرض کنیم (X, Σ, μ) یک فضای اندازه σـ متناهی و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ توابعی اندازه‌پذیر باشند. اگر f_n همگرای موضعی در اندازه به f باشد، آن‌گاه یک زیردنباله از (f_n) موجود است که تقریباً همه جا به f همگراست.

۲۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای محدب از فضای خطی توپولوژی X باشد. نگاشت T

تعریف شده بر K را آفین گویم، اگر به ازای هر $x, y \in K$ و هر $0 \leq \alpha \leq 1$،

$$T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha T(x) + (1-\alpha)T(y)$$

۲۶.۱.۱ **قضیه.** [2, 19.3] فرض کنیم (x_n) دنباله ای در فضای نرم‌دار X باشد، به طوری که $x_n \longrightarrow x$ در این صورت دنباله‌ی $z_n = \frac{x_1+...+x_n}{n}$ نیز به x همگراست.

۲۷.۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضایی از X باشد. فناساز $M^{\perp}$ رابه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$M^{\perp} = \{x^* \in X^* \;:\; x^*(x) = 0 \quad (x \in M)\}$$

۲.۱ توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف ستاره

۱.۲.۱ **تعریف.** فرض کنیم X یک فضای نرم دار و X^* فضای دوگان آن باشد و A یک زیر مجموعه‌ی متناهی از X^* و x_0 عضو دلخواهی در X باشد. به ازای هر $\varepsilon > 0$

$$U(x_0, A, \varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad , \quad f \in A\}$$

را تعریف می‌کنیم. گردایه‌ی زیر پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X تشکیل می‌دهند.

$$\{U(x_0, A, \varepsilon) \quad \varepsilon > 0 \;,\; x_0 \in X \;,\; \text{متناهی } A \subset X^* \}$$

این توپولوژی را توپولوژی ضعیف بر روی X گوییم و با (X, w) نشان می‌دهیم.

اگر (x_n) دنباله‌ای در X باشد که با توپولوژی ضعیف به $x \in X$ همگراست، در این صورت نماد $x_n \xrightarrow{w} x$ یا $w\text{-}\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$ را به کار می‌بریم.

۲.۲.۱ قضیه. [38, 3.6.4] اگر X یک فضای نرم‌دار و (x_n) دنباله‌ای در X باشد به طوری‌که $x_n \xrightarrow{w} x$ اگر و تنها اگر برای هر $f \in X^*$ داشته باشیم $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

۳.۲.۱ قضیه. [38, 2.9.2] فضای باناخ X بازتابی است اگر وتنها اگر $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq ۱\}$ با توپولوژی ضعیف فشرده باشد.

۴.۲.۱ قضیه. [35, 3.12] فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای محدب از فضای باناخ X باشد. در این صورت F با توپولوژی نرم بسته است اگر و تنها اگر با توپولوژی ضعیف بسته باشد.

۵.۲.۱ قضیه. فضای باناخ X بازتابی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی بسته، محدب و کران‌دار X با توپولوژی ضعیف فشرده باشد.

برهان. با توجه به قضیه‌های (۳.۲.۱) و (۴.۲.۱) حکم به سادگی اثبات می‌شود.

۶.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $A \subseteq X$. اگر هر دنباله در A دارای زیردنباله‌ای همگرای ضعیف به عضوی از A باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A را فشرده دنباله‌ای با توپولوژی ضعیف گوییم.

۷.۲.۱ قضیه (ابرلین ـ اشمولیان[1]). [14, 5.6.1] فرض کنیم X یک فضای نرم دار و A یک زیرمجموعه‌ی X باشد. آن‌گاه روابط زیر هم‌ارزند:

۱) هر دنباله‌ی (x_n) در A، زیردنباله‌ای ضعیف همگرا دارد.

۲) هر دنباله‌ی (x_n) در A، یک نقطه‌ی حدی ضعیف در X دارد.

۳) بستار ضعیف A، با توپولوژی ضعیف فشرده است.

بنابر این قضیه، فشردگی با توپولوژی ضعیف و w^*ـ فشردگی دنباله‌ای همواره هم‌ارزند.

۸.۲.۱ تعریف. فضای نرم‌دار X را جدایی‌پذیر گوییم، هرگاه دارای زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا باشد.

[1] The Eberlin – Smulian

۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرم دار و X^* فضای دوگان X، $\varepsilon > \circ$، A زیر مجموعه‌ای متناهی از X و $f_\circ \in X^*$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$U(f_\circ, A, \varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x) - f_\circ(x)| < \varepsilon \quad x \in A\}$$

گردایه‌ی زیر، پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X^* تشکیل می‌دهند.

$$\{U(x_\circ, A, \varepsilon) \quad \varepsilon > \circ\ ,\ x_\circ \in X\ ,\ \text{متناهی } A \subset X\ \}$$

این توپولوژی را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* گوییم و با (X^*, w^*) نشان می‌دهیم.

اگر (f_n) دنباله‌ای در X^* باشد و (f_n) با توپولوژی ضعیف ستاره به $f \in X^*$ همگرا باشد، در این صورت می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{w^*} f$ و یا $w^*\text{-}\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = f$

(f_n) به f نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره همگراست، اگر وتنها اگر به ازای هر $x \in X$، $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

۱۰.۲.۱ قضیه (باناخ ـ آل اوغلو [1]). [35, 3.15] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد، در این صورت $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ باتوپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

۱۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و $E \subseteq X$. اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب X را که شامل E هستند، غلاف محدب E گوییم و با $co(E)$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که:

$$co(E) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ :\ \alpha_i \geq \circ, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, x_i \in E, n \in \mathbb{N}\}$$

بستار غلاف محدب E را غلاف محدب بسته گوییم و با $\overline{co}(E)$ نشان می‌دهیم.

۱۲.۲.۱ قضیه (کرین ـ اشمولیان [2]). [14, 5.6.4] اگر X یک فضای باناخ و K زیر مجموعه‌ای ضعیف فشرده‌ی ضعیف از X باشد، آن‌گاه $\overline{co}(K)$ نیز فشرده‌ی ضعیف است.

۱۳.۲.۱ قضیه. [14, 5.6.3] فرض کنیم X یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد. در این صورت توپولوژی ضعیف روی زیر مجموعه های فشرده‌ی ضعیف X، متریک پذیر است.

---

[1] *Banach – Alaoglu*

[2] *Krein – Smulian*

۱۴.۲.۱ قضیه. [14, 1.6.15] اگر (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد، آن‌گاه X جدایی‌پذیر است.

۱۵.۲.۱ قضیه. [36, 2.6] هرگاه $(K_\alpha)_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده‌ی یک فضای هاسدورف باشد و $\bigcap\limits_{\alpha\in I} K_\alpha = \emptyset$ آن‌گاه هر زیرگردایه‌ی متناهی از $(K_\alpha)_{\alpha\in I}$ نیز دارای اشتراک متناهی است.

۱۶.۲.۱ قضیه.[32, 8.24] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار جدایی‌پذیر باشد، در این صورت هر دنباله‌ی کران‌دار در X^* دارای زیردنباله‌ای همگرای ضعیف ستاره است.

۱۷.۲.۱ قضیه. [14, 5.5.7] یک زیر مجموعه‌ی محدب در X^* مانندK با توپولوژی ضعیف ستاره بسته است اگروتنهااگر به ازای هر $r > ۰$ مجموعه‌ی $\{x^* \in K \ : \ \|x^*\| \leq r\}$ با توپولوژی ضعیف ستاره بسته باشد.

۱۸.۲.۱ قضیه. [14, 5.5.1] فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد در این صورت گوی یکه‌ی دوگان X (B_{X^*}) با توپولوژی ضعیف ستاره متریک پذیر است اگر وتنها اگر X جدایی پذیر باشد.

۱۹.۲.۱ قضیه. فرض کنیم X یک فضای جدایی‌پذیر باشد و K زیرمجموعه‌ای محدب از X^* باشد، آن‌گاه K با توپولوژی ضعیف ستاره بسته است اگر و تنهااگر w^*ـ بسته‌ی دنباله‌ای باشد.

برهان. با توجه به قضیه‌های (۱۷.۲.۱) و (۱۸.۲.۱) و با توجه به این‌که در فضاهای متریک بسته بودن و بسته بودن دنباله‌ای هم ارز است حکم ثابت می‌شود.

۲۰.۲.۱ لم (شور [۱]). [32, 8.18] هر دنباله‌ی همگرای ضعیف در $(l_1, \|.\|_1)$ همگراست.

۲۱.۲.۱ قضیه. [38, 3.6.3] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار با بعد متناهی باشد، در این صورت توپولوژی‌های ضعیف و نرم روی X بر هم منطبق‌اند.

۲۲.۲.۱ قضیه. [14, 5.2.6] فرض کنیم X یک فضای باناخ و A زیرمجموعه‌ای فشرده از X باشد، در این صورت $\overline{co}(A)$ فشرده است.

---

[۱] *Schur*