بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش کاربردی

عنوان:

روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی

استاد راهنما:
دکتر محمدشفیع دهاقین

استاتید مشاور:
دکتر مهدی قاسمی و دکتر محمد مرادی

توسط:
رضا خلیل طهماسبی

شهریور ۱۳۹۰

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه شهرکرد است.

تشکر و قدردانی

خداوند بزرگ را به خاطر الطاف، نعمت‌های بی‌شمار و توفیق ادامه‌ی تحصیل شکر گزارم و بر خود واجب می‌دانم از زحمات و الطاف بندگانش در راه تحقق کوچک ترین ثمره دوران تحصیلم قدردانی نمایم.

صمیمانه ترین مراتب سپاس خود را به استاد گرامی آقای دکتر محمدشفیع دهاقین تقدیم نموده، که حضور ایشان به عنوان یک پشتوانه علمی همیشه مرا در پیچ و خم‌های راه علم یاری کرده است و آن چه که در این پژوهش به دست آوردم بی‌مدد ایشان هیچ است.

از آقای دکتر قاسمی وآقای دکتر مرادی که زحمت مشاوره‌ی این پایان نامه را بر عهده گرفتند و از نظرات ارزشمندشان مرا بهرمند ساختند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از داوران گرامی آقایان دکتر انصاری و دکتر احمدی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

مراتب قدر دانی خود را از استاد گرامی آقای دکتر ربانی نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی دانشکده به عمل می آورم.

در پایان از دوستان و همکلاسی‌های عزیزم که در این مدت مرا صمیمانه همراهی کردند، سپاسگزارم و از خداوند متعال موفقیت روز افزون آنان را خواهانم.

این مجموعه کوچک و ناقابل را به پاس عاطفه سرشار و محبت بی‌دریغی که هیچ‌گاه فروکش نخواهد کرد به مهربان ترین کسان خویش یعنی خانواده عزیز و ارجمندم به خصوص

پدر و مادر گرامی،

دوستان عزیزم،

تقدیم می‌دارم.

چکیده

روش تجزیه آدومیان (ADM) را می‌توان برای انواع مختلف معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزیی، خطی یا غیر خطی، و حتی دستگاههایی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزیی به کار گرفت. این روش به خاطر همگرایی سریع در ارائه جواب توسط محققان زیادی مورد توجه قرار گرفته است و همچون اغلب سری‌های توانی احتمال یافتن جواب‌های سری‌های بسته وجود ندارد. هر چند، تحقیق نشان داده است که شمار محدودی از جملات در ارائهٔ سری‌های جواب، منجر به جواب‌های تقریبی با بالاترین دقت است که دقت آن نسبت به اغلب روشهای تقریبی بهتر است.

هدف از این پایان نامه توصیف روش تجزیه آدومیان و همگرایی آن برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی و معادلات دیفرانسیل معمولی است.

کلمات کلیدی

روش تجزیه آدومیان، چندجمله‌ای‌های آدومیان، عملگرهای غیر خطی، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزیی، همگرایی روش تجزیه آدومیان، معادلات انتقال گرما، معادلات انتشار موج.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

مجموعه اعداد طبیعی	N
مجموعه اعداد حقیقی	R
مجموعه اعداد حقیقی مثبت	$\mathbb{R}^+$
مجموعه اعداد مختلط	C
بی نهایت	∞
به ازای هر	$\forall$
وجود دارد	$\exists$
متعلق است به	$\in$
اشتراک	$\cap$
اجتماع	$\cup$
مجموع	$\sum$
انتگرال	$\int$
ماکزیمم	$\max$
مینیمم	$\min$
سوپریمم	$\sup$
حد	$\lim$
حد بالایی	$\limsup$
نرم	$\|\|.\|\|$
فاصله x تا y	$d(x, y)$

پیشگفتار

در این پایان‌نامه به مطالعه روش تجزیه آدومیان و روش تجزیه آدومیان اصلاح شده برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی خطی و معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی می‌پردازیم.

این پایان‌نامه در پنج فصل تدوین شده است. فصل اول، پیش نیاز فصل‌های دیگر است و در آن به بیان تعاریف مقدماتی و قضایایی که در فصل‌های بعد از آنها استفاده شده است، پرداخته‌ایم. در فصل دوم روش تجزیه آدومیان را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزیی خطی و دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی خطی به کار برده‌ایم. در فصل سوم به بیان روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی و دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی پرداخته‌ایم. در فصل چهارم همگرایی روش تجزیه آدومیان وسرعت همگرایی این روش را در مقایسه با روش پیکارد ورانگ — کوتا بیان کرده‌ایم. در فصل پنجم، معادلات انتقال گرما وانتشار موج را در فضای یک بعدی ذکر کرده‌ایم و با استفاده از روش تجزیه آدومیان، انواع مختلف این معادلات را حل کرده‌ایم.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل به یادآوری تعاریف و قضایای مقدماتی که پیش نیازی برای فصل های بعدی است، می‌پردازیم. مطالب این فصل از مراجع [۱۸, ۱۷, ۱۶, ۱۱] گردآوری شده است.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ [۱۸] مجموعه‌ی X را یک فضای متریک گوییم، هرگاه به هر دو نقطه p و q از X عدد حقیقی $d(p,q)$، به نام فاصله از p تا q، مربوط شده باشد به طوریکه

(a) $d(p,q) > ۰$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p,p) = ۰$.

(b) $d(p,q) = d(q,p)$.

(c) به ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

تعریف ۲.۱.۱ یک فضای متریک که در آن هر دنباله کوشی همگرا باشد را فضای متریک کامل گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید K نمایانگر یکی از میدان‌های $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد و X یک فضای برداری روی K باشد. یک نرم روی X تابعی است مانند $\|\,.\,\| : X \to [0,\infty)$، به طوری که

(۱) $\| x \| \geq 0, \quad \forall x \in X \quad , \quad \| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

(۲) $\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \|, \quad \forall x \in X, \alpha \in K.$

(۳) $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|, \quad \forall x, y \in X.$

دوتایی $(X, \|\,.\,\|)$ را یک فضای یرداری نرم‌دار گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید $(X, \|\,.\,\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد، $A \subset X$ را نرم‌ـکراندار گوییم، هرگاه

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in A, \quad \| x \| \leq M$$

تعریف ۵.۱.۱ یک فضای نرم‌دار که نسبت به متر $d(x,y) = \| x - y \|$ کامل باشد را یک فضای باناخ گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ نرم $\| x \|_2$ و نرم $\| x \|_p$ و نرم $\| x \|_\infty$ عبارتند از [۱۶]

$$\| x \|_2 = \Big(\int_a^b |x(t)|^2 \, dt \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| x \|_p = \Big(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\| x \|_\infty = \lim_{p\to\infty} \| x \|_p = \sup_{a\le t\le b} |x(t)|.$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $f : X \to X$ را انقباضی گوییم، اگر ثابتی مانند $0 < k < 1$ موجود باشد به قسمی که

$$d(f(x), f(y)) \le k\ d(x,y) \quad , \quad \forall x,y \in X.$$

باناخ[۱] در سال ۱۹۲۲ قضیه نقطه ثابت زیر را اثبات کرده و کاربردی از آن را در حل معادلات انتگرال بیان کرد.

قضیه ۱.۱.۱ [۱۸] (اصل نگاشت انقباضی باناخ) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و $f : X \to X$ یک نگاشت انقباضی باشد. دراین صورت f دارای نقطه ثابت یکتای x_0 است. بعلاوه برای هر $x \in X$ دنباله تکرار $f^n(x)$ همگرا به x_0 است، یعنی $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

تعریف ۸.۱.۱ مولد $L : X \to Y$ از یک نیم گروه پیوسته $E(t)$ عبارت است از عملگر

$$Lx = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big((E(t))^h - 1\Big)x,$$

که برای همه $x \in X$، حد فوق موجود باشد.

مثال ۱.۱.۱ فرض کنید که L یک عملگر باشد و

$$e^{Lt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Lt)^n}{n!} \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

[۱] Banach

آنگاه e^{Lt}، یک نیم گروه پیوسته روی X و یک مولد برای L است و

$$||e^{Lt}|| \leq e^{||L|||t|} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

سری (۱) به طور مطلق همگراست زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||\frac{(Lt)^n}{n!}|| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(||L|||t|)^n}{n!} = e^{||L|||t|}.$$

این نشان می دهد که $||e^{Lt}||$ کراندار است. واضح است $e^{0L} = 1$. سری‌های توانی تابع $t \to e^{Lt}$، تحلیلی هستند لذا برای همه t ها به طور یکنواخت پیوسته هستند. همچنین L یک مولد برای e^{Lt} است. بنابراین کافی است خاصیت گروه بودن را بررسی کنیم.

$$\begin{aligned} e^{L(s+t)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n(s+t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{L^k t^k}{k!} \frac{L^{n-k} t^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k s^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{L^{n-k} t^{n-k}}{(n-k)!} = e^{Ls} e^{Lt}. \end{aligned}$$

تعریف **۹.۱.۱** (تابع پیوسته لیپ شیتس [۲]) پیوستگی لیپ شیتس در سه حالت مختلف صورت می‌گیرد. فرض کنید $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ باشد آنگاه

(۱) مجموعه باز $B \subseteq \mathbb{R}^m$ را در نظر بگیرید، f روی زیر مجموعه باز B پیوسته لیپ شیتس است هر گاه ثابت $K \in \mathbb{R}^+$ وجود داشته باشد به طوری که

$$||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y|| \quad , \quad x, y \in B.$$

(۲) تابع f پیوسته لیپ شیتس محلی [۳] است، هر گاه برای هر $z \in \mathbb{R}^m$، $L > 0$ وجود داشته باشد به طوری که f پیوسته لیپ شیتس روی گوی باز به مرکز z وشعاع L است.

[۲] Lipschitz Continuous Function

[۳] Locally Lipschitz Continuous

(۳) اگر f روی $\mathbb{R}^m$ پیوسته لیپ شیتس باشد، آنگاه f پیوسته لیپ شیتس کلی [۴] است.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید که E یک فضای برداری مختلط باشد. یک نگاشت $(.,.) : E \times E \to \mathbb{C}$ روی E یک ضرب داخلی است هر گاه

(۱) برای هر $x \in E$، $(x,x) \geq 0$ و $(x,x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(۲) برای هر $x, y \in E$، $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

تعریف ۱۱.۱.۱ یک فضای ضرب داخلی یک فضای هیلبرت است اگر کامل باشد. L^2 و $\mathbb{C}^n$ هر دو فضای هیلبرت هستند.

قضیه ۲.۱.۱ (تخمین کوشی[۵]) فرض کنید که f یک تابع روی یک همسایگی از گوی بسته $B(z^*, R)$ باشد. فرض کنید که

$$M_R = \max |f(z)| : |z - z^*| = R < \infty.$$

آنگاه

$$|f^{(n)}(z^*)| \leq \frac{n! M_R}{R^n}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱ تابع $f : X \to Y$ خوش تعریف است هرگاه $x_1 = x_2$ باشد آنگاه $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه شود. تابعی که خوش تعریف نباشد، بد تعریف نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض می‌کنیم f تابع دلخواهی باشد که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است و $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد از توابع بربازه[۶] (a, b) با تابع وزن w باشد. فرض می‌کنیم که $f(x)$ را

[۴] Globally Lipschitz Continuous

[۵] Cauchy Estimates

به ازای هر x متعلق به بازهٔ (a,b) بتوان به وسیلهٔ یک سری نامتناهی به صورت

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \phi_k(x) \tag{۲}$$

نمایش داد [۱۷]. با ضرب کردن دو طرف این معادله در $w(x)\phi_n(x)$ (که در آن n یک عدد صحیح مثبت است) و با انتگرال گیری از a تا b خواهیم داشت

$$\int_a^b w(x)f(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_n(x)\,dx.$$

به دلیل متعامد بودن توابع ϕ_k، همه جمله‌های سری طرف راست به جزء جمله‌ای که در آن $k=n$، صفر هستند. بنابراین

$$(f,\phi_n) = C_n(\phi_n,\phi_n)$$

و

$$C_n = \frac{(f,\phi_n)}{||\phi_n||^2} \tag{۳}$$

ضرایب (۳)، ضرایب فوریهٔ تابع f نسبت به مجموعهٔ متعامد $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ نامیده می‌شود و سری (۲) با ضرایب (۳)، سری فوریه تابع f نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۱.۱ (آزمون $M-$ وایرشتراس [٦]) فرض کنید $\{f_k\}$ دنباله ای از توابع حقیقی یا مختلط روی مجموعه E باشد. همچنین، فرض کنید که $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ یک سری همگراست وقتی که M_k جمله های نامنفی حقیقی است. اگر برای همه مقادیر k بزرگتر از عدد N و همه مقادیر z متعلق به بازه E،

$$|f(z)| \le M_k$$

[٦] Weierstrass M-Test

آنگاه سری $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ به طور یکنواخت روی مجموعه E همگراست.

معادله دیفرانسیل همگن

$$u' + Au = 0 \qquad (۴)$$

را که در آن $u(t)$ یک بردار و A یک ماتریس مربعی ثابت است در نظر بگیرید. عملگر $S(t)$ یک ماتریس مربعی است به طوری که برای هر بردار ϕ، $u(t) = S(t)\phi$ جواب معادله (۴) با شرایط اولیه $u(0) = \phi$ است.

مثال ۲.۱.۱ در مسئله

$$u' + \alpha u = 0 \quad , \quad u(0) = \phi$$

جواب به صورت $u(t) = e^{-\alpha t}\phi$ می‌باشد که در آن $S(t) = e^{-\alpha t}$ است.

قضیه ۴.۱.۱ [۱۱] (اصل داملز[۷]) تابع

$$u(t) = \int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + S(t)\phi \qquad (۵)$$

در معادله دیفرانسیل $u' + Au = f$ با شرایط $u(0) = \phi$ صدق می کند.

برهان.

$$u'(t) = \int_0^t S'(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + S(t-t) f(t) + S'(t)\phi$$

$$= -A\Big(\int_0^t S(t-\tau) f(\tau)\, d\tau + S(t)\phi\Big) + If(t)$$

$$= -Au(t) + f(t)$$

که اثبات کامل شده است. □

[۷] Duhamel's Principle

فصل ۲

روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی خطی

هدف ما در این فصل بیان روش تجزیه آدومیان (ADM) و روش تجزیه آدومیان اصلاح شده($MADM$) و تعمیم روش تجزیه آدومیان اصلاح شده برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزیی خطی است. مطالب این فصل از مراجع [۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ٦, ۸, ۱۰] گردآوری شده است.

۱.۲ روش تجزیه آدومیان برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی

فرض کنیم معادله دیفرانسیل معمولی به فرم $Fu = g$ باشد که در آن F یک عملگر دیفرانسیل خطی است ([۱,۲]). اگر F به مجموع دو جملهٔ خطی به صورت $L + R$ تجزیه شود به طوری که

L وارون پذیرباشد آنگاه رابطه

$$Lu + Ru = g \tag{1}$$

و یا به طور معادل

$$Lu = g - Ru \tag{2}$$

را خواهیم داشت. اکنون اگر عملگر L^{-1} را به طرفین رابطه (۲)، اعمال کنیم، رابطهٔ

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}(Ru)$$

به دست می‌آید. این رابطه را می توان به صورت

$$u = f - L^{-1}(Ru) \tag{3}$$

نوشت که درآن $f = L^{-1}g$. در روش آدومیان معمولاً L عملگر مشتق بوده و L^{-1} عملگر انتگرال گیری است.

فرض کنید تابع u را به صورت یک سری حاصل از مجموع دنباله‌ای از توابع u_n به صورت

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{4}$$

نمایش دهیم. باجایگذاری رابطهٔ (۴) دررابطهٔ (۳)، رابطهٔ

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f - L^{-1}\Big(R(\sum_{n=0}^{\infty} u_n)\Big) \tag{5}$$

یا به طور معادل رابطهٔ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = f - L^{-1}\Big(R(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots)\Big)$$