دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکدهٔ ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

عنوان

مساله مقدار مرزی خطی دستگاه بیضوی معادلات با مشتقات جزیی

نگارش

سکینه عباسی

استاد راهنما

دکتر احمد ماموریان

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در ریاضی کاربردی

شهریور ۱۳۸۷

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر و مادر عزیز

و

همسر مهربانم

چکیده

در این رساله یک مساله مقدار مرزی، برای معادلات بیضوی مرتبه اول خطی بررسی شده است. در فصل یک، خواص بعضی از توابع، عملگرهای خاص وتعاریف مورد نیاز همچنین بعضی از خواص انتگرال کوشی و دستگاه کوشی-ریمان نا همگن را بررسی می‌کنیم.

در فصل دو، تعریف یک معادله از نوع بیضوی وچگونگی تبدیل آن به فرم متعارف و بررسی جواب‌های این معادله توضیح داده شده است.

در فصل سوم، با معرفی دستگاه توابع تحلیلی تعمیم یافته بنیادی وهسته‌های بنیادی، به بررسی فرمول کوشی تعمیم یافته می‌پردازیم ورابطه بین جواب‌های معادله ومعادله الحاقی آن نیز اشاره شده است.

در فصل چهارم، به بررسی مساله مقدار مرزی خطی، از یک دستگاه معادلات بیضوی با مشتقات جزیی می‌پردازیم.

مقدمه

آنالیز مختلط یکی از تاثیرگذارترین شاخه‌های علم ریاضیات است. این شاخه در رشته‌هایی چون جبر، هندسه جبری، نظریه اعداد، معادلات دیفرانسیل، سیستم‌های دینامیکی ومعادلات انتگرال و... کاربرد دارد. بویژه در مسایل مقدار مرزی برای توابع تحلیلی مانند مساله ریمان ومساله ریمان-هیلبرت نقش مهمی‌دارد. گوس، کوشی، وایرشتراس و ریمان مبتکران اصلی آنالیز مختلط بودند.

نقطه شروع ارتباط آنالیز حقیقی و مختلط دستگاه کوشی-ریمان بود

$$\begin{cases} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{cases}$$

با معرفی صورت مختلط این دستگاه به معادله

$$w_{\overline{z}} = 0$$

دست یافتند. با تعمیم دستگاه بالا به

$$\begin{cases} u_x - v_y = f(x, y) \\ u_y + v_x = g(x, y) \end{cases}$$

به معادله

$$w_{\overline{z}} = h(z)$$

رسیدند. این معادله به معادله کوشی-ریمان نا همگن معروف شد. برای حل این معادله نیاز به اطلاعاتی در مورد عملگرهای خاص بود، با معرفی عملگر

$$Tf := -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

دو نتیجه زیر به دست آمد

$$\partial_z Tf = Sf \quad \text{و} \quad \partial_{\bar{z}} Tf = f$$
$$Sf := -\frac{۱}{\pi} \iint\limits_{D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{۲}} d\xi d\eta$$

وجواب معادله کوشی‌ـریمان نا همگن تعیین شد

$$w = Th + \Phi$$

کهΦ تابع تحلیلی است.

بعدها به دستگاه

$$\begin{cases} u_x - v_y + au + bv = f(x, y) \\ u_y + v_x + cu + dv = g(x, y) \end{cases}$$

روی آوردند. دستگاه را به شکل مختلط در آوردند

$$\partial_{\bar{z}} w + Aw + B\overline{w} = F$$

وکوا به بررسی دستگاه

$$\begin{cases} a_{۱۱}u_x + a_{۱۲}u_y + b_{۱۱}v_x + b_{۱۲}v_y + a_{۱}u + b_{۱}v = f_{۱} \\ a_{۲۱}u_x + a_{۲۲}u_y + b_{۲۱}v_x + b_{۲۲}v_y + a_{۲}u + b_{۲}v = f_{۲} \end{cases}$$

پرداخت. معادله در حالت بیضوی به صورت

$$\partial_{\bar{z}} w + Aw + B\overline{w} = F$$

در آمد. بعدهابه بررسی معادله

$$\partial_{\bar{z}} w + \mu_{۱} w_z + \mu_{۲} \overline{w_z} + Aw + B\overline{w} = F$$

پرداختند، که با شرط‌هایی توانستند این معادله را حل کنند.

با بررسی معادلات بالا به مسائل مقدار مرزی از جمله مساله مقدار مرزی هیلبرت، مساله مقدار مرزی ریمان-هیلبرت و... روی آوردند که با تلاش‌های بسیار به حل مسائل در حالات مختلف شدند.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی دریغ اساتید گرامی از جمله جناب آقای دکتر ماموریان تقدیر و تشکر کنم.

فهرست مطالب

فصل اول

پیش‌نیازها

۱-۱ فضای توابع و رده آن‌ها

در این قسمت بعضی از رده توابع و فضای توابعی که اغلب مورد نیاز است را بیان می‌کنیم و خود را به توابعی از دو متغیر مستقل محدود می‌کنیم.

فرض کنیم $C(\bar{D})$ مجموعه توابع پیوسته در نقطه $z = x + iy$ دردامنه بسته $\bar{D}$ باشد. $C(\bar{D})$ با

نرم زیر یک فضای باناخ[1] است،

$$\|f\| = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$$

فرض کنیم $C^m(D)$ مجموعه توابعی مانند $f(z)$، که مشتقات جزئی آن تا مرتبه m در دامنه D پیوسته باشد، اگر f و مشتقات جزئی آن تا مرتبه m در دامنه بسته $\bar{D}$ پیوسته باشد، می‌نویسیم $f \in C^m(\bar{D})$.
واضح است که $C^\circ = C$

فرض کنیم $f(z)$ در شرط زیر در دامنه بسته $\bar{D}$ صدق کند.

$$|f(z_۱) - f(z_۲)| \leq H |z_۱ - z_۲|^\alpha \qquad \circ < \alpha \leq ۱ \tag{۱-۱}$$

که $z_۱$ و $z_۲$ نقاط دلخواهی از $\bar{D}$ و α و H ثابت‌های مثبت و مستقل از انتخاب $z_۱$ و $z_۲$ است. کوچکترین کرانی که از H که در نامساوی (۱-۱) صدق کند را با $H(f)$ نشان می‌دهیم و ثابت هولدر[2] تابع f می‌نامند به عبارتی

$$H(f) = \sup_{z_۱, z_۲ \in \bar{D}} \frac{|f(z_۱) - f(z_۲)|}{|z_۱ - z_۲|^\alpha}$$

در نتیجه

$$|f(z_۱) - f(z_۲)| \leq H |z_۱ - z_۲|^\alpha \qquad \circ < \alpha \leq ۱ \tag{۲-۱}$$

تعریف. به تابع کراندار با متغیر حقیقی یا مختلط z پیوسته هولدر روی مجموعه D می‌گویند، هرگاه $H > \circ$ و $\circ < \alpha \leq ۱$ موجود باشند به طوری که

$$|f(z_۱) - f(z_۲)| \leq H |z_۱ - z_۲|^\alpha \qquad \forall z_۱, z_۲ \in D$$

به H ثابت هولدر و به α توان هولدر گویند. حالت خاص $\alpha = ۱$ را لیپشیتس[3] می‌گویند. مجموعه توابع پیوسته هولدر را با $C_\alpha(\bar{D})$ نشان می‌دهیم.

1) Banach 2) Holder 3) Lipschitz

شرط (۱-۲) را شرط هولدر می‌نامند. $C_\alpha\left(\bar{D}\right)$ با نرم

$$\|f\|^{\alpha}=\|f\|+H\left(f\right)$$

یک فضای باناخ است. همچنین مجموعه توابعی از $C^m\left(\bar{D}\right)$ که در شرط زیر صدق کند را با $C^m_\alpha\left(\bar{D}\right)$ نشان می‌دهیم.

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}\in C_\alpha\left(\bar{D}\right)\qquad\left(k=0,1,...,m\right),0<\alpha\leq 1$$

$L_p\left(D\right),\left(p\geq 1\right)$ فضای همه توابع f به طوری که

$$\left(\iint\limits_D \left|f\left(z\right)\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

نرم $f\in L_p\left(\bar{D}\right)$ را به صورت

$$\|f\|_p=\left(\iint\limits_D \left|f\left(z\right)\right|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$

در نظر می‌گیریم. در این فضا نامساوی معروف هولدر برقرار است، اگر

$$f_k\in L_{p_k}\left(\bar{D}\right)\qquad\left(k=1,2,...,n\right),\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...\frac{1}{p_n}\leq 1$$

آنگاه

$$f_1f_2......f_n\in L_p\left(\bar{D}\right)$$

$$\|f_1f_2.....f_n\|_p<\|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}.....\|f_n\|_{p_n}$$

قضیه ۱ـ۱. فرض کنیم دنباله $p>1,f_n\in L_p\left(\bar{D}\right)$ به $f\in L_p\left(\bar{D}\right)$ همگرای قوی باشد یعنی هنگامی $n\to\infty$، $\|f_n-f\|_p\to 0$، آنگاه داریم :

۱) دنباله f_n به f همگرای ضعیف است به عبارتی

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_D f_n g dxdy=\iint\limits_D fgdxdy$$

که g یک تابع دلخواه متعلق به $q=\frac{p}{p-1}, L_q\left(\bar{D}\right)$

۲) از دنباله f_n یک زیر دنباله f_{n_k} وجود دارد که به f تقریباً همه جا در D همگراست.

تعریف.

$$L_{p,p'}\left(\bar{D}\right) := L_p\left(\bar{D}\right)\bigcap L_{p'}\left(\bar{D}\right)$$

$$\|f\|_{p,p'} := \|f\|_p + \|f\|_{p'}$$

حال فرض کنیم $f\left(z\right)$ در تمام صفحه مختلط $\mathbb{C}$ داده شده و در شرط زیر صدق کند :

$$f\left(z\right)\in L_p\left(C_1\right) \qquad f_r\left(z\right)=|z|^{-r} f\left(\frac{1}{z}\right)\in L_p\left(C_1\right), p\geq 1$$

که C_1 دایره $|z|\leq 1$ و r عدد حقیقی است. مجموعه چنین توابعی را با $L_{p,r}\left(\mathbb{C}\right)$ $\left(L_{p,r}\right)$ نشان می‌دهیم.

$L_{p,r}$ با نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\|f\|_{p,r}=\|f\|_p+\|f_r\|_p, p\geq 1$$

فرض کنیم $f\in C^m\left(D\right)$ و یک زیر مجموعه D_fاز D وجود داشته باشد به طوری که f در خارج D_f صفر باشد. مجموعه چنین توابعی را با $C_\circ^m\left(D\right)$ نشان می‌دهیم. زیر مجموعه‌ای از $C_\circ^m\left(D\right)$ شامل توابعی که دارای مشتق از مرتبه دلخواه باشند را با $C_\circ^\infty\left(D\right)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱ـ۲. $C_\circ^\infty\left(D\right)$ در فضای $p\geq 1, L_p\left(\bar{D}\right)$ چگال است.

به عبارتی اگر $f\in L_p\left(\bar{D}\right)$ یک دنباله $f_n\in C_\circ^\infty\left(D\right)$ وجود دارد به طوری که f_n با متر فضای $L_p\left(\bar{D}\right)$ به f همگرا است یعنی $\|f_n-f\|_p\to 0$ هنگامی‌که $n\to\infty$.

فرض کنیم $\Phi\left(z\right)$ تابع تحلیلی تک مقداری در $z\in D$ باشد. داخل D ممکن است یک مجموعه جدا از نقاط تکین تنها (قطب‌ها، نقاط تکین اساسی) باشد مجموعه چنین توابعی را با $S_\circ^*\left(D\right)$ نشان می‌دهیم. اگر $f,g\in S_\circ^*$آنگاه

$$f\pm g, f.g, fog\in S_\circ^*\left(D\right)$$

مجموعه $S_{\circ}^{*}(D) \bigcap C(D)$ را با $S_{\circ}(D)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم $S_{\circ}^{*} \times L_p(D)$ مجموعه توابعی مانند $f = \Phi g$ باشد که $\Phi \in S_{\circ}^{*}(D)$ و $g \in L_p(D)$، $p \geq ۱$. به عبارت دیگر، $f \in S_{\circ}^{*} \times L_p(D)$ اگر تابع تحلیلی $\Phi \in S_{\circ}^{*}(D)$ وجود داشته باشد به طوری که $\Phi f \in L_p(D)$ در این مورد Φ را مضرب تحلیلی جمع پذیر تابع f گویند.

۲-۱ رده منحنی‌هاورده دامنه‌ها

کمان (خم) باز هموار L در صفحه مختلط توسط معادله زیر تعریف می‌کنیم.

$$z(t) = t(s) \qquad s \in [\circ, ۱]$$

که $x(s) = Ret(s)$ و $y(s) = Imt(s)$ دارای مشتق پیوسته برای $s \in [\circ, ۱]$ می‌باشند.

$$\frac{dt}{ds} = x'_s + iy'_s, \left(x'^{۲}_s + y'^{۲}_s = ۱\right)$$

تعریف. گوییم کمان L به مجموعه C^m متعلق است اگر همه مشتقات تابع z تا مرتبه m روی $۱ \geq s \geq \circ$ پیوسته باشد. علاوه بر آن اگر مشتقات تا مرتبه m تابعz پیوسته هولدر با توان $۱ \geq \alpha \geq \circ$ باشد، گوییم $L \in C_{\alpha}^{m}$.

فرض کینم L منحنی بسته، ساده و تکه ای هموار شامل تعداد متناهی از کمان‌های رده C_{α}^{m} باشد و $v_۱\pi, ..., v_k\pi$ زوایای داخلی بردارهای منحنی باشند، که $۲ \geq v_j > \circ$ مجموعه چنین منحنی‌ها را با $C_{\alpha, v_۱, ..., v_k}^{m}$ نشان می‌دهیم.

اگر مرز دامنه D شامل تعداد متناهی از منحنی‌های جردن با طول متناهی، باز یا بسته و ساده باشد که نقاط اشتراکی نداشته باشند، آنگاه گوییم $D \in C$. اگر همه این منحنی‌ها بسته باشند و به C^m $\left(C_{\alpha}^{m}, C_{\alpha, v_۱, ... v_k}^{m}\right)$ متعلق باشند آنگاه گوییم D به ردهC^m $\left(C_{\alpha}^{m}, C_{\alpha, v_۱, ... v_k}^{m}\right)$ متعلق است.

تعریف. تابع $f:U\to C$ در نقطه $p\in U$ همدیس گوییم هرگاه در نقطه p زاویه‌ها را ثابت نگه دارد و در تمام راستاها به طور مساوی رشد کند. در ضمن تمام توابع تمامریخت همگی همدیس هستند.

هر دامنه D_z را می‌توان به وسیله نگاشت همدیس $z=\varphi(\zeta)$ به دامنه کانونی D_ζ تبدیل کرد که D_ζ کراندار به وسیله دایره‌های $L_\circ, L_۱,...L_m$ که $L_\circ$ دایره واحد $|\zeta|=۱$ با مرکز $\zeta=\circ$ متعلق به D_ζ و شامل $L_۱,...L_m$ است. همچنین شروط

$$\varphi(\circ)=z_\circ \qquad \varphi'(\circ)>\circ$$

را همیشه در نظر می‌گیریم، که $z_\circ$ نقطه ثابت و دلخواه از دامنه D_z است. با این شرایط $\varphi(\zeta)$ به طور یکتا تعیین می‌شود. خواص حدی تابع $\varphi(\zeta)$ و تابع معکوس آن، $\psi(z)$ به خواص همواری مرز دامنه D_z وابسته است.

قضیه ۱ـ۳. اگر D_z به وسیله منحنی‌های جردن بسته ساده $\Gamma_\circ,...\Gamma_m$ کراندار باشد آنگاه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(z)$ در دامنه‌های بسته $D_z+\Gamma, D_\zeta+L$ پیوسته هستند و $L=L_\circ+L_۱+...L_m$ و $\Gamma=\Gamma_\circ+...\Gamma_m$ و دایره L_j تصویر تمامریخت منحنی Γ_j است به عبارتی $L_j=\psi(\Gamma_j)$ و $(j=\circ,۱,...m)$.

قضیه ۱ـ۴. اگر $\Gamma_\circ,\Gamma_۱,...\Gamma_m\in C_\alpha^k$ $(k\geq\circ, \circ<\alpha<۱)$ آنگاه

$$\varphi(\zeta)\in C_\alpha^k(D_\zeta+L) \qquad \psi(z)\in C_\alpha^k(D_z+\Gamma)$$

قضیه ۱ـ۵. اگر $\Gamma\in C^۱_{\alpha,v_۱,...v_k}$ $(\circ<v_j\leq ۲, \circ<\alpha<۱)$ آنگاه

$$\psi(z)\in C_{v'}(D_z+\Gamma) \qquad \varphi(\zeta)\in C_{v''}(D_\zeta+L)$$

که

$$v'=\min\left(۱,\frac{۱}{v_۱},...\frac{۱}{v_k}\right) \qquad v''=\min(۱,v_۱,...,v_k)$$

در همسایگی نقطه گوشه ای مرزی z_j با زاویه داخلی $v_j\pi$ تابع

$$\psi_j(z)=\frac{\psi(z)-\psi(z_j)}{(z-z_i)^{\frac{۱}{v_j}}}$$

هنگامی‌که $z_j \to z$ به حد $\psi_j(z_j) \neq ۰$ میل می‌کند. علاوه بر آن در همسایگی z_j مشتق $\psi'(z)$ شکلی به صورت

$$\psi'(z) = (z - z_j)^{\frac{۱}{v_j} - ۱} \psi_۰(z)$$

دارد که $\psi_۰(z)$ تابعی پیوسته و $\psi_۰(z_j) \neq ۰$.

اگر ζ_j تصویر z_j باشد آنگاه در همسایگی ζ_j تابع

$$\varphi_j(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta_j)}{(\zeta - \zeta_j)^{v_i}}$$

هنگامی‌که $\zeta_j \to \zeta$ به تابع $\varphi_j(\zeta_j)$ میل می‌کند و $\varphi_i(y_i) \neq ۰$ در همسایگی y_i

$$\varphi'(\zeta) = (\zeta - \zeta_j)^{v_j - ۱} \varphi_۰(\zeta)$$

که $\varphi_۰(\zeta)$ تابعی پیوسته و $\varphi_۰(\zeta_j) \neq ۰$.

۱-۳ بعضی از خواص انتگرال از نوع کوشی

تعریف. فرض کنیم L خمی‌هموار در $\mathbb{C}$ باشد و $c \in L$ اگر $\Phi(.;c)$ تابعی انتگرال پذیر روی $\backslash L\{c\}$ و دارای تکینگی در $\zeta = c$ باشد و برای $\varepsilon > ۰$.

$$L_\varepsilon := L \backslash \{\zeta : |\zeta - c| < \varepsilon\}$$

در این صورت اگر

$$\lim_{\varepsilon \to ۰} \int_{L_\varepsilon} \Phi(\zeta; c)\, d\zeta$$

موجود باشد این مقدار را به مقدار اصلی کوشی[۴] $\int_{L_\varepsilon} \Phi(.;c)\, d\zeta$ تعریف می‌کنند.

4) Cauchy

به طور مشابه اگر D دامنه ای در $\mathbb{C}$ و $\Phi\left(.;c\right)$ تابعی در $D\backslash\left\{c\right\}$ $\left(c\in D\right)$ و

$$D_{\varepsilon}=\left\{z|\left|z-c\right|<\varepsilon\right\}\qquad\iint\limits_{D_{\varepsilon}}\Phi\left(z,c\right)dxdy$$

برای $\varepsilon>0$ به اندازه کافی کوچک موجود باشد. در این صورت

$$\iint\limits_{D}\Phi\left(z;c\right)dxdy:=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{D_{\varepsilon}}\Phi\left(z;c\right)dxdy$$

را در صورت وجود حد، مقدار اصلی کوشی این انتگرال منفرد می‌گوییم.

قضیه ۱ـ۶. اگر L خم (تکه تکه) هموار بسته ساده ای در $\mathbb{C}$ باشد و φ پیوسته هولدر باشد در این صورت

$$\Phi\left(z\right):=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi\left(\zeta\right)}{\zeta-z}d\zeta \tag{۱-۳}$$

به تعبیر مقدار اصلی کوشی موجود است.

قضیه ۱ـ۷. L و φ را مثل قضیه قبل فرض می‌کنیم و

$$\psi\left(z\right):=\int_{L}\frac{\varphi\left(\zeta\right)-\varphi\left(\tau\right)}{\zeta-z}d\zeta\qquad z\in L$$

در این صورت

$$\lim_{z\to\tau}\psi\left(z\right)=\psi\left(\tau\right)$$

اگر حد ارائه شده در جهت مماس بر L در نقطه τ نباشد.

قضیه ۱ـ۸. (قضیه پلملج[5]ـسوخوتسکی[6]:) تحت شرایط قضایای ۱ـ۶ و ۱ـ۷ و انتگرال کوشی (۱-۳) انتگرال کوشی مقادیر مرزی

$$\Phi^{+}\left(\tau\right):=\lim_{z\to\tau}\Phi\left(z\right)\quad,\quad z\in D^{+}\quad,\quad\Phi^{-}\left(\tau\right):=\lim_{z\to\tau}\Phi\left(z\right)\quad z\in D^{-}$$

5) Plemelj 6) Sokhotski

را می‌پذیرند که D^+ ناحیه کراندار و محدود به L و $D^- = \mathbb{C}/\left(D^+ + L\right)$ به علاوه برای $\tau \in L$

$$\begin{aligned} \Phi^+(\tau) &= \tfrac{1}{2}\varphi(\tau) + \Phi(\tau) \\ \Phi^-(\tau) &= -\tfrac{1}{2}\varphi(\tau) + \Phi(\tau) \end{aligned} \qquad (4\text{-}1)$$

قضیه ۱ـ۹ (قضیه پلملج-پریوالف[7]) $\Phi^-, \Phi^+ \in C_\alpha(L)$

(برای اثبات قضایای ۱ـ۶، ۱ـ۷، ۱ـ۸ و ۱ـ۹ می‌توانید به موسخلیشولی[8] یا مناکف[9] مراجعه کنید)

قضیه ۱ـ۱۰. فرض کنیم $m \geq 0, 0 < \alpha < 1, L \in C_\alpha^{m+1}, f \in C_\alpha^m(L), D \in C_\alpha^{m+1}$ آنگاه

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f^m(t)}{t-z}dt$$

به $C_\alpha^{m+1}(D+L)$ تعلق دارد.

قضیه ۱ـ۱۱. اگر $0 < \alpha < 1, f \in C_\alpha(L), D \in C^1$ آنگاه $\Phi(z) \in C_\alpha(D+L)$ و مشتق $\Phi'(z)$ در تخمین زیر صدق می‌کند

$$|\Phi'(z)| < \|f\|^\alpha \delta^{\alpha-1} \quad 0 < \alpha < 1$$

که δ فاصله نقطه z از مرز است.

۴-۱ دستگاه کوشی ـ ریمان

در آنالیز توابع مختلط بین عملگرهای $\partial_y, \partial_x, \partial_{\bar{z}}, \partial_z$ رابطه ای به صورت

$$2\partial_{\bar{z}}w = \partial_x w + i\partial_y w$$

$$\bar{z} = x - iy \qquad 2\partial_z w = \partial_x w - i\partial_y w$$

$$z = x + iy$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

7) Privalov 8) Muskhelishvili 9) Monakhov

وجود دارد. تابع مختلط مقدار $w = u + iv$ با دو تابع حقیقی مقدار u و v از دو متغیر حقیقی x و y را با $w(z)$ نشان می‌دهیم، گرچه w تابعی از z و $\bar{z}$ است. هنگامی‌که w در یک مجموعه باز از صفحه نسبت به $\bar{z}$ مستقل باشد آنگاه w یک تابع تحلیلی است و در دستگاه کوشی ـ ریمان[10]

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

صدق می‌کند که این دستگاه با معادله $w_{\bar{z}} = ۰$ معادل است، به عنوان نتیجه ای از

$$۲\partial_{\bar{z}} w = u_x - v_y + i(v_x + u_y)$$

که در این مورد

$$۲\partial_z w = u_x + v_y + i(v_x - u_y) = ۲w'$$

حال دستگاه معالات کوشی ـ ریمان ناهمگن

$$\begin{cases} u_x - v_y = g(x,y) \\ u_y + v_x = h(x,y) \end{cases}$$

در نظر می‌گیریم، که g و h توابع حقیقی از دو متغیر حقیقی x و y می‌باشند. این دستگاه را می‌توان به شکل مختلط

$$\partial_{\bar{z}} w = f \qquad f = \frac{g + ih}{۲} \qquad w = u + iv \tag{۱-۵}$$

نوشت.

با به کار بردن عملگرهای $\partial_{\bar{z}}, \partial_z$ برای تابع تحلیلی $\Phi(z)$ داریم:

$$\partial_z \Phi = \Phi'(z) \qquad \partial_{\bar{z}} \Phi = ۰ \tag{۱-۶}$$

10) Riemann