دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی ، گرایش آنالیز عددی

عنوان

جواب‌های تقریبی یک معادله انتگرال منفرد با هسته‌های کوشی در ربع صفحه

استاد راهنما
صداقت شهمراد

استاد مشاور
فرامرز طلعتی

پژوهشگر
سمیه دادستدی

۱۳۹۰

بسم الله الرّحمن الرّحیم

پروردگارا دعایم به درگاه تو این است:

بی‌نوایی و تنگ چشمی را از دلم ریشه کن ساز و از بیخ و بن برکن

اندکی نیرویم بخش تا بتوانم بار شادی‌ها و غم‌ها را تحمل کنم

نیرویی به من ارزانی فرما تا عشق خود را در خدمت و کمک ثمر بخش سازم

توانی به من عطا فرما که هیچ گاه چیزی از بی‌نوایی نستانم و در برابر گستاخ و مغرور زانوی دنائت خم نکنم

قدرتی به من بخشا تا روح خود را از تعلق به جیفه‌های ناچیز روزگار بی‌نیاز کنم و از هرچه رنگ تعلق پذیرد آزادش سازم

نیرویی به من ده تا قدرت و توان خود را از روی کمال عشق و نهایت محبت، تسلیم خواسته‌ها و رضای تو کنم.

(رابیندرانات تاگور)

تقدیم به

بی شرط ترین موجودات هستی

الهه صبر و مهربانی

به عشق بی دریغ مادرم و روان پاک پدرم

و تقدیم به

بهترین های زندگی ام

برادر و خواهران عزیزم

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُرُ الْمَخلوق لَمْ یَشْکُرُ الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **صداقت شهمراد**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر**فرامرز طلعتی** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

از دکتر فریبا بهرامی که داوری این پایان‌نامه را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

از تمام دوستان و هم‌کلاسی دوران تحصیلم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی مخصوصاً از دکتر حسین امامعلی‌پور ریاست دانشکده علوم ریاضی، دکتر غلامرضا حجتی معاونت آموزشی دانشکده علوم ریاضی، دکتر حسین خیری مدیرگروه ریاضی کاربردی،سرکار خانم **مهناز کشفی** و نیز کارکنان محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

سمیه دادستدی

۱۳۹۰

نام خانوادگی دانشجو: دادستدی نام: سمیه

عنوان: جواب‌های تقریبی یک معادله انتگرال منفرد با هسته‌های کوشی در ربع صفحه

استاد راهنما : صداقت شهمراد

استاد مشاور : فرامرز طلعتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحات: ۷۶

کلید واژه‌ها: معادله انتگرال منفرد، هسته کوشی، چندجمله‌ایهای ژاکوبی و چبیشف

چکیده

در این پایان‌نامه که مبتنی بر [۱۱] تنظیم شده است، فرمول‌های صریحی برای جواب معادله انتگرال منفرد با هسته‌های کوشی در ربع صفحه معرفی می‌شوند. سپس، چندجمله‌ایهای چبیشف و ژاکوبی برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی این معادله به کار می‌روند.

روش کار در این مقاله به این صورت است که ابتدا تابع تحلیلی بخشی را در نظر می‌گیریم و با توجه به فرمول‌های $Sokhotski - Plemelj$ و با جایگذاری در معادله مشخصه به مسأله با مقدار کرانی می‌رسیم و این مسأله را حل می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال‌های اخیر نظریه معادلات انتگرال منفرد، در مسائل کاربردی مورد توجه بیشتر قرار گرفته است. معادلات انتگرال منفرد با هسته‌های کوشی و هیلبرت در کارهای هیلبرت و پوانکاره در شروع قرن بیستم به عنوان تعمیم معادلات فردهلم ظاهر شدند. در دهه سی‌ام رابطه تنگاتنگی بین این معادلات و مسائل متعدد در ایرودینامیک، نظریه کشسانی، الکترودینامیک و رشته‌های دیگر پیدا شد. از آن پس توسعه خوبی در ارتباط با تئوری این معادلات شروع شد. افرادی چون *T. Carleman*، *J. Plemelj*، *J. Sokhotski* و *F. D. Gakhov* و *S. G. Mikhlin* به همراه ریاضی دانان لهستانی از قبیل *J. Sokhotski* و *W. Pogorzelski* در این فرایند نقش به سزایی داشتند. در همین دهه با وجود اینکه نظریه معادلات انتگرال منفرد هنوز بطور کامل توسعه نیافته بود روش‌های عددی برای حل این معادلات در حال انجام بود.

بسیاری از مسائل فیزیکی که معمولاً با تکنیک معادلات دیفرانسیل حل می‌شوند بطور مؤثر با روش‌های معادلات انتگرال حل پذیرند. این کار منحصراً روی معادلات انتگرال منفرد و روی جواب‌های توزیعی این معادلات، متمرکز می‌شود. تعداد زیادی از مفاهیم زیبای ریاضی به یافتن چنین جواب‌هایی منجر می‌شود که در چرخشی می‌توان آنها را در تنوع وسیعی از حوزه های علمی نظیر نظریه پتانسیل، مکانیک، دینامیک سیال، پراکندگی صوتی و موج‌های زلزله، ایستاتیک و دینامیک آماری مورد استفاده قرار داد.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل یک سری مفاهیم مقدماتی که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌شود معرفی می‌گردد.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. تابع $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی نامیده می‌شود هرگاه در هر نقطه از D مشتق‌پذیر باشد، به‌علاوه این تابع در $z_0 \in D$ تحلیلی است هرگاه f در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد. به عبارت دیگر f در z_0 تحلیلی است هرگاه در یک همسایگی از z_0 مشتق‌پذیر باشد و لذا باید $f'(z_0)$ موجود باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید L یک منحنی بسته هموار در صفحه مختلط با متغیر z باشد. ناحیه درون منحنی L ناحیه درونی نامیده می‌شود و با D^+ نشان داده می‌شود در حالیکه متمم ناحیه‌ی $D^+ \cup L$ ناحیه‌ی بیرونی نامیده می‌شود و با D^- نشان داده می‌شود. اگر $f(z)$ روی D^+ تابع تحلیلی بوده و روی $D^+ + L$ پیوسته باشد داریم:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \tag{۱.۱}$$

و اگر $f(z)$ روی D^- تابع تحلیلی بوده و روی $D^- + \text{Ł}$ پیوسته باشد داریم :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \tag{۲.۱}$$

خم L درجهت مثبت در نظر گرفته می‌شود یعنی روی مسیر بسته‌ی L جهت حرکت به گونه‌ای است که ناحیه‌ی درون L همواره سمت چپ متحرک باشد. انتگرال سمت چپ فرمولهای (۱.۱) و (۲.۱) به انتگرال کوشی معروف است.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید L یک خم بسته یا باز با طول متناهی باشد. τ عدد مختلط و $\varphi(\tau)$ تابع

پیوسته روی خم باشد، در اینصورت انتگرال

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus L$$

انتگرال از نوع کوشی با تابع چگال $\varphi(\tau)$ و هسته $\frac{1}{\tau - z}$ نامیده می‌شود.
ثابت می‌شود تابع $\Phi(z)$ همه جا در فضای مختلط جز نقاط روی خم L تحلیلی است و در ∞ به صفر میل می‌کند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید L اجتماع تعداد متناهی از خم‌های بسته (یا باز) باشد که اشتراکی ندارند و تابع $\Phi(z)$ تابع تحلیلی در هر ناحیه متناهی جز نقاط روی خم L باشد که روی L از سمت چپ و راست پیوسته است جز احتمالاً در نقاط انتهایی از L و در نزدیکی نقاط انتهایی در شرط $|\Phi(z)| \leq \frac{C}{|z-c|^\alpha}$ صدق می‌کند. c متناظر با نقطه انتهایی و α و C ثابت‌های حقیقی معلوم و $\alpha < 1$ می‌باشد. توابعی مانند $\Phi(z)$ توابع تحلیلی بخشی با ناپیوستگی روی L نامیده می‌شوند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید L خم هموار و $\varphi(\tau)$ تابع تعریف شده روی L باشد. در اینصورت تابع $\varphi(\tau)$ در شرط هولدر صدق می‌کند هرگاه به ازای هر دو نقطه دلخواه t_1 و t_2 از خم داشته باشیم :

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A|t_2 - t_1|^\lambda, \qquad 0 < \lambda \leq 1,$$

به طوری که A و λ اعداد ثابت مثبت هستند که به ترتیب ثابت هولدر و شاخص هولدر نامیده می‌شوند.
گوییم یک تابع در شرط H صدق می‌کند هرگاه در شرط هولدر صدق کند و اگر λ ای خاص مد نظر باشد گوییم در شرط $H(\lambda)$ صدق می‌کند.
توجه : اگر $\lambda > 1$ آنگاه $\varphi'(t) \longrightarrow 0$ و لذا $\varphi(t) = c$ زیرا:

$$|\varphi'(t)| = |\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1}| \leq \lim_{t_2 \to t_1} |t_2 - t_1|^{\lambda - 1}$$

و اگر $\lambda = 1$ آنگاه شرط هولدر به شرط لیپ شیتز تبدیل می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. گوییم تابع $\varphi(t, \tau)$ که t و τ در بازه‌های معینی قرار دارند، در شرط هولدر صدق می‌کند

هرگاه به ازای هر زوج مقدار (t_1, t_2) و (τ_1, τ_2) متعلق به مجموعه‌های معین داشته باشیم:

$$|\varphi(t_2, \tau_2) - \varphi(t_1, \tau_1)| \leq A|t_2 - t_1|^{\mu} + B|\tau_2 - \tau_1|^{\nu}, \qquad 0 < \mu, \nu \leq 1$$

که A، B، μ و ν ثابت‌های مثبت می‌باشند. اگر $\lambda = \min\{\mu, \nu\}$ آنگاه می‌توان ثابتی مانند C یافت که

$$|\varphi(t_2, \tau_2) - \varphi(t_1, \tau_1)| \leq C\left[|t_2 - t_1|^{\lambda} + |\tau_2 - \tau_1|^{\lambda}\right].$$

انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \qquad a < c < b$$

برای محاسبه این انتگرال مجازی داریم

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0}\Big[-\int_a^{c-\epsilon_1} \frac{dx}{c-x} + \int_{c+\epsilon_2}^b \frac{dx}{x-c}\Big] = ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0} ln\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

اگر ϵ_1 و ϵ_2 مستقل از یکدیگر به صفر میل کنند آنگاه انتگرال مجازی بالا همگرا نخواهد بود، چنین انتگرالی، انتگرال منفرد نامیده می‌شود اما اگر $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ فرض شود انتگرال همگرا می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. مقدار اصلی کوشی $(The\ Cauchy\ Principal\ Value)$ برای انتگرال منفرد

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c}, \qquad a < c < b$$

برابر عبارت

$$\lim_{\epsilon \to 0}\Big[\int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c}\Big]$$

است که طبق محاسبات بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$p.v\int_a^b \frac{dx}{x-c}=ln\frac{b-c}{c-a}. \qquad (۳.۱)$$

در حالت کلی انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}$$

که $\varphi(x)$ تابعی است که در (a,b) در شرط هولدر صدق می‌کند در اینصورت می‌توان نوشت

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}=\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx+\varphi(c)\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

با توجه به شرط هولدر داریم

$$|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}|<\frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}}, \quad 0<\lambda\leq 1$$

پس انتگرال اولی به عنوان انتگرال مجازی موجود است و انتگرال دومی با توجه به (۳.۱) قابل محاسبه است. پس انتگرال منفرد $\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}$ برحسب مقادیر اصلی کوشی موجود است و داریم

$$p.v\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}=\int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx+\varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

توجه : اگر $\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c}$ به عنوان یک انتگرال دلخواه یا مجازی موجود باشد(همگرا باشد) در اینصورت مقدار اصلی آن نیز موجود است ولی عکس مطلب درست نیست.
به روش مشابه مقدار اصلی کوشی برای تابع مختلط $\varphi(x)$ که در شرط هولدر صدق می‌کند بر روی خم منحنی الخط با ابتدای a و انتهای b بصورت زیر است

$$p.v\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\varphi(t)[ln\frac{b-t}{a-t}+\pi i]$$

یا

$$p.v\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\varphi(t)\ln\frac{b-t}{t-a}$$

و در حالتیکه $a=b$ باشد (L بسته باشد)

$$p.v\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+i\pi\varphi(t).$$

تعریف ۸.۱.۱. تغییر ترتیب انتگرالگیری در یک انتگرال منفرد مکرر بصورت زیر می‌باشد :

الف) حالتی که یکی از توابع زیر انتگرال‌ها معمولی است: ابتدا تغییر ترتیب انتگرالگیری در

$$I=\int_L \omega(\tau,z)d\tau\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1$$

را که تابع $\varphi(\tau,\tau_1)$ در شرط هولدر صدق می‌کند و $\omega(\tau,z)$ انتگرالپذیر است و L یک منحنی هموار می‌باشد، بررسی می‌کنیم.

لم :

$$\int_L \omega(\tau,z)d\tau\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1=\int_L d\tau_1\int_L \frac{\omega(\tau,z)\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-z}d\tau$$

برهان. ر. ک. [۲] . □

ب) تعویض ترتیب انتگرالگیری زمانیکه هر دو تابع زیر انتگرال‌ها منفرد هستند

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1=\varphi(t,t)+\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau$$

فرمول فوق به فرمول پوانکاره - برتراند معروف است.

قضیه ۹.۱.۱. *دو انتگرال منفرد زیر را در نظر بگیرید*

$$I(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1$$

$$I_1(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau$$

هر چند تفاوت آنها در ترتیب انتگرالگیری است ولی با هم برابر نیستند، این تفاوت توسط فرمول $Poincare - Bertrand$ (ر. ک. [۲]) بصورت زیر نشان داده می‌شود

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1 = \varphi(t,t) + \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau$$

یا

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1 = -\pi^2\varphi(t,t) + \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau$$

برهان. ر. ک. [۲] . □

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید L یک خم هموار (بسته یا باز) باشد و $\varphi(\tau)$ تابع تعریف شده روی L باشد که در شرط هولدر صدق می‌کند. در اینصورت انتگرال از نوع کوشی $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$ دارای مقادیر حدی $\Phi^-(t)$ و $\Phi^+(t)$ در تمام نقاط غیر منطبق با نقاط انتهایی است یعنی

$$\Phi^-(t) = \lim_{z\to t^-}\Phi(z), \qquad \Phi^+(t) = \lim_{z\to t^+}\Phi(z), \quad t\in L$$

این مقادیر حدی بر حسب تابع چگال $\varphi(t)$ و انتگرال منفرد $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ با فرمولهای زیر بیان می‌شوند

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

که انتگرال $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ نشانگر انتگرال منفرد بر حسب مقدار اصلی است. روابط فوق به فرمولهای $Sokhotski - Plemelj$ معروفند که معادل روابط زیر هستند

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t).$$

مقدار $\Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ جهش تابع Φ در امتدادخم L نامیده می‌شود.

برهان. ر. ک. [۲] . □

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنید $f(z)$ در ناحیه R محدود به دو منحنی C_1 و C_2 تحلیلی باشد، در اینصورت*

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

که منحنی C_1 در جهت مثبت و منحنی C_2 در جهت منفی در نظر گرفته می‌شود.

برهان. ر. ک. [۱۵]. □

قضیه ۱۲.۱.۱. *اگر $f(z)$ در ناحیه همبند ساده R تحلیلی باشد آنگاه $\int_a^b f(z)dz$ مستقل از مسیری است که دو نقطه a و b را در R بهم وصل می‌کند.*

برهان. ر. ک. [۱۵]. □

در بسیاری از کاربردها لازم است که تابع $f(z)$ حول نقطه تکین خود بسط داده شود. قضیه تیلور را در این حالت نمی‌توان مورد استفاده قرار داد. برای این منظور از سری لوران استفاده می‌کنیم. نمایش بوسیله سری لوران در طوق محصور به دو دایره متحدالمرکز که $f(z)$ در تمام نقاط درونی و مرزی آن تحلیلی است، معتبر می‌باشد.

قضیه ۱۳.۱.۱. *اگر $f(z)$ درون و روی ناحیه R محدود به دو دایره متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز a و به ترتیب به شعاعهای r_1 و r_2 که $(r_1 > r_2)$ تحلیلی باشد، آنگاه برای هر z در R داریم*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} \tag{۴.۱}$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}dw, \quad n = 1, 2, ...$$

برهان. ر. ک. [۱۵]. □

جمله دوم از سمت راست رابطه (۴.۱) قسمت اصلی (منفرد) از بسط، حول نقطه $z = a$ می‌باشد. بسط لوران هر تابع در همسایگی نقطه بی‌نهایت، بسط آن به صورت سری لوران است که همه جا در خارج یک دایره به قدر کافی بزرگ و مرکز $z = 0$ همگراست (یعنی همه جا به جز احتمالاً در $z = \infty$).

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $f(z)$ در یک همسایگی سفته بی نهایت، تحلیلی است وبسط لوران آن به شکل زیر است

$$f(z) = ... + \frac{c_{-n}}{z^n} + ... + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n + ...,$$

در اینصورت منظور از مانده در بینهایت که با

$$Res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz,$$

نشان داده می‌شود عدد $-c_{-1}$ است که در آن γ دایره ای با شعاعی به اندازه کافی بزرگ $\rho = |z|$ است که در جهت عقربه های ساعت پیموده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. تابع $\Gamma(z)$ به عنوان تعمیمی از تابع فاکتوریل از اعداد صحیح مثبت به فضای مختلط در نظر گرفته می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad Re(z) > 0.$$

انتگرال فوق مطلقاً همگراست و داریم

$$|\Gamma(x+iy)| \leq \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$$

تابع $\Gamma(z)$ جز در نقاط $z = 0, -1, -2, ...$ همه جا تحلیلی است و

$$Res_{z=-k} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$Res_{z=0} \Gamma(z) = 1$$

از ویژگی های تابع گاما این است که

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad Re(z) > 0$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}, \quad z \in \mathbb{C}$$
$$\Gamma(n+1) = n!$$
$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

برای اثبات روابط فوق رجوع کنید به [۱].

تعریف ۱.۱.۱۶. تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p,q > 0 \tag{۱.۵}$$

این تابع بر حسب تابع گاما بصورت زیر بسط داده می‌شود و برای اعداد مختلط p و q با قسمت حقیقی مثبت برقرار است

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{۱.۶}$$

تعریف ۱.۱.۱۷. $arg(z) = Arg(z) + 2k\pi$ که در آن $0 \leq Arg(z) < 2\pi$ را در نظر بگیرید. $z \longrightarrow arg(z)$ یک تابع نیست اما هرگاه از مجموعه مقادیر $arg(z)$ به ازای هر z یک مقدار انتخاب کنیم، یک تابع بدست می‌آوریم. $arg(z)$ طبق تعریف فوق یک تابع چندمقداری نامیده می‌شود.

توجه : بر حسب اینکه آرگومان اصلی z را به‌صورت $0 \leq Arg(z) < 2\pi$ یا $-\pi \leq Arg(z) < \pi$ انتخاب کنیم، مقادیر شاخه اصلی لگاریتم و لذا شاخه‌های دیگر قدری تفاوت خواهند کرد.

۱.۲ معادله انتگرال وانواع آن

تعریف ۱.۲.۱. معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود

$$G\left(x, y(x), \int H(x,t,y(t))dt\right) = 0.$$

در حالت کلی معادلات انتگرال دو دسته اند: خطی، غیر خطی

معادلات انتگرال خطی : فرم کلی معادلات انتگرال خطی بصورت زیر است

$$h(x)y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt = f(x) \tag{۷.۱}$$

که $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود و λ یک پارامتر معلوم است. همچنین $h(x)$، $f(x)$، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابع معلوم و $y(x)$ تابع مجهول معادله است.

معادله (۷.۱) را خطی گویند زیرا تابع مجهول $y(x)$ در زیر علامت انتگرالگیری به صورت خطی ظاهر می‌شود.

معادلات انتگرال غیر خطی: این نوع معادلات به صورت‌های زیر ظاهر می‌شوند

$$h(x)y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t,y(t))dt = f(x)$$

$$h(x)y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)F(y(t))dt = f(x)$$

که اولی را معادلات غیر خطی نوع $Urysohn$ و دومی را معادلات غیر خطی نوع $Hammerstein$ می‌نامند.

به ازای $h(x) \equiv 0$ معادله انتگرال نوع اول و به ازای $h(x) \neq 0$ معادله انتگرال نوع دوم به دست می‌آید.

در هر کدام از این معادلات در صورتیکه $f(x) = 0$ باشد معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن و در غیر اینصورت معادله ناهمگن گویند.

دسته بندی معادلات خطی و غیرخطی:

۱)معادلات انتگرال فردهلم

۲)معادلات انتگرال ولترا

۳)معادلات انتگرال - دیفرانسیل

۴)معادلات انتگرال منفرد.

معادله انتگرال فردهلم : اگر در معادلات انتگرال هر دو حدود $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ مقادیر ثابت باشند، معادله فردهلم خواهد بود که شکل استاندارد خطی آن بصورت زیر است

$$h(x)y(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = f(x). \tag{۸.۱}$$

معادله انتگرال ولترا : اگر حداقل یکی از حدود $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ متغیر باشند معادله ولترا خواهد بود که شکل استاندارد خطی آن بصورت زیراست

$$h(x)y(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x). \tag{۹.۱}$$

معادله انتگرال منفرد : اگر حداقل یکی از حدود انتگرال موجود در (۷.۱) نامتناهی یا هسته معادله در نقطه یا نقاطی از بازه انتگرالگیری نامتناهی گردد آنگاه معادله انتگرال را منفرد گوییم.

معادله انتگرال – دیفرانسیل : معادله‌ای است که در آن مشتق و انتگرال تابع مجهول به‌طور همزمان در معادله ظاهر می‌شوند.

۳.۱ توابع متعامد

تعریف ۱.۳.۱. تابع ω که در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و در بازه (a,b) در شرط $\omega(x) \geq 0$ صدق کند و در هر زیر بازه از (a,b) ، $\omega \equiv 0$ نباشد، یک تابع وزن برای این بازه نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. گوییم $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ یک مجموعه از توابع، در بازه $[a,b]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x)$ متعامد است اگر

$$< \phi_j, \phi_k >= \int_a^b \omega(t)\phi_j(t)\phi_k(t)dt = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \alpha_k > 0, & j = k \end{cases}$$

که در آن α_k یک مقدار ثابت است.