دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :

یک روش جدیدی برای حل معادلات انتگرالی دیفرانسیلی فردهلم

پایان نامه :

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربری

مولف :

مریم دهشتی کلارده

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر حمید مسگرانی

استاد مشاور :

سرکار خانم دکتر خدیجه احمدی آملی

مهرماه ۱۳۸۷

تقدیم به :

پدر و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر

به نام یگانه دادار جهان آفرین که ستایشش، شرف بندگی است و اطاعتش ، دستیابی به زیبایی ها و خوبیهاست .پرستش خدای را سزا که رب جهانیان است و مربی دانای کامل مطلق. و از این روست که علم و عالم و معلم و استاد را ارج نهاده است، چنان که در سخن گوهر بار مولای متقیان می شنویم که هر آنکس به من کلمه ای بیاموزد مرا بنده خویش نموده است.

بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ و راهنمائیهای ارزشمند استاد ارجمند جناب آقای دکتر مسگرانی که جهت تهیه و تدوین این رساله مرا یاری نموده اند، سپاسگزاری نمایم.

چکیده

معادلات دیفرانسیلی و تفاضلی اهمیت و کاربرد فراوانی در مسائل علمی و مهندسی دارند، در روند حل دسته‌ای از آن‌ها به معادلاتی برخورد می‌کنیم که مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود به این‌گونه معادلات، معادلات انتگرال گوئیم.

در این پایان نامه روش بسط سری تیلور برای حل معادلات انتگرالی تفاضلی فردهلم با ضرایب متغیر و شرایط مرکب به‌کار گرفته شده است. برای رسیدن به این هدف یک روش ماتریسی جهت تعیین ضرایب متغیر مطرح است. این روش روی بسط تیلور در معادله تفاضلی و سپس با جایگزینی فرم‌های ماتریسی آن روی معادلات داده شده، بنا نهاده شده است. بنابراین با حل معادله ماتریسی می‌توان ضرایب مجهول تیلور را تقریب زد و به کمک آن جواب معادله را نیز به‌صورت تقریبی با دقت مناسب محاسبه کرد. البته این ایده در معادلات دیفرانسیلی انتگرال فردهلم و ولترا نیز مورد استفاده قرار گرفته که در پایان نامه به آن اشاره شده است.

فهرست مندرجات

فهرست جداول و برنامه‌های کامپیوتری

فصل ۱

معادلات انتگرال

۱.۱ تعاریف و پیش نیازها

تعریف ۱.۱.۱ به هر عضو x از فضای برداری X روی میدان F یک عدد حقیقی نامنفی نسبت می‌دهیم و آن‌را نرم x می‌نامیم و با نماد $||x||$ نمایش می‌دهیم به طوری‌که

- به ازاء هر $x \in X$ داشته باشیم $||x|| \geq 0$
- $||x|| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$
- به ازاء هر $x \in X$ و $a \in F$ داشته باشیم

$$||x|| = |\alpha|||x||$$

- نامساوی مثلثی برقرار باشد یعنی به ازاء هر دو عضو x, y از X نامساوی زیر برقرار باشد

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

بنابراین X را یک فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم. عدد نامنفی $||x-y||$ را فاصله بین دو نقطه x, y می‌نامیم.

مثال ۱ . در $\mathbb{R}^n$ نرم بردار $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ را به‌صورت

$$||x|| = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌کنیم. این نرم به‌خصوص را نرم اقلیدسی می‌نامیم. به‌طور کلی برای هر عدد صحیح $p \geq 1$ می‌توانیم یک نرم به‌صورت

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف کنیم. فضای $\mathbb{R}^n$ با $p-$نرم را گاهی با $\mathbb{R}_p^n$ نشان می‌دهیم. $\mathbb{R}_2^n$ همان فضای n بعدی است اما انتخاب‌های دیگری برای p نیز مهم است. در حالت $p=1$ داریم

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

در این‌جا طول بردار توسط مجموع بزرگی مؤلفه‌هایش اندازه‌گیری می‌شود. امکان دیگر استفاده از بزرگی مؤلفه‌ای از x است که دارای بیشترین مقدار از حیث قدر مطلق باشد پس

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

این نرم معمولاً نرم ماکزیمم یا نرم بینهایت خوانده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱ مجموعه تمام توابع $x(t)$ را که انتگرال

$$\int_a^b |x(t)|^p dt$$

برای آن‌ها وجود داشته باشد (یعنی $\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty$) یک فضای برداری است و با نماد $L_p[a,b]$ یا L_p نشان داده می‌شود و مجموعه تمام دنباله‌های نامتناهی $x_1, x_2, \dots$ از اعداد حقیقی را که در شرط

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

صدق کنند نیز یک فضای برداری تشکیل می‌دهد و آن را با نماد L_p نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ مجموعه اعضای $x_۱, x_۲, \ldots$ از یک فضای برداری نرم‌دار X، بسته یا کامل در X نامیده می‌شود اگر هر عضو دلخواه x از X توسط یک ترکیب خطی متناهی از $x_۱, x_۲, \ldots$ به‌طور دلخواه تقریب زده شود. یعنی برای هر $x \in X$ و $\epsilon > ۰$،اسکالر $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$||x - \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i x_i|| < \epsilon$$

اگر $\{x_i\}$ در X بسته باشد و ضمناً مستقل خطی نیز باشد (یعنی هر زیر مجموعه متناهی از آن مستقل خطی باشد) در این‌صورت می‌گوییم x_i یک پایه برای X است و می‌نویسیم

$$x = \sum_{i=۱}^{\infty} \alpha_i x_i$$

فضاهایی که دارای بعد شمارا (یا متناهی) باشند فضاهای جدایی پذیر نامیده می‌شوند.

۲.۱ قضایای باناخ وهیلبرت

۱.۲.۱ فضاهای باناخ و هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X یک فضای خطی حقیقی یا مختلط باشد. تابع $||.|| : X \to [۰, \infty)$ را نرم گوییم هرگاه

$$||x|| = ۰ \Leftrightarrow x = ۰ \qquad (۱.۱)$$

$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \qquad \forall\ x \in X, \lambda \in \mathbb{R}\ or\ \mathbb{C} \qquad (۱.۲)$$

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \qquad \forall\, x, y \in X \qquad (۱.۳)$$

و $(X, ||.||)$ را فضای خطی نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ فضای خطی نرم‌دار $(X, ||.||)$ را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در X همگرا باشد که در این‌صورت X را فضای باناخ می‌نامیم.

مثال‌هایی از فضاهای باناخ عبارتند از $L_۱(D), L_۲(D), C(D)$ که در آن $D \subseteq \mathbb{R}^n$ دامنه تعریف است و داریم

$$C(D) = \{f :\ \text{پیوسته است}\ \ D\ \ \text{در دامنه}\ \ f\} \qquad ||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in D\}$$

$$L_۱(D) = \{f :\ \text{انتگرال پذیر لبگ است}\ \ D\ \ \text{روی}\ \ f\} \qquad ||f||_۱ = \int_D |f(x)| dx$$

$$L_۲(D) = \{f : f^۲ \in L_۱(D)\text{و اندازه پذیر}\ \ f\} \qquad ||f||_۲ = [\int_D |f(x)|^۲ dx]^{\frac{۱}{۲}}$$

تعریف ۳.۲.۱ فضای باناخ X را فضای هیلبرت می‌نامیم هرگاه یک ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ روی $X \times X$ تعریف شود. مهم‌ترین فضای هیلبرت در بحث معادلات انتگرال، فضای $L_۲(D)$ است که در آن ضرب داخلی به فرم

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x)\bar{g}(x) dx \qquad \forall f, g \in L_۲(D)$$

می‌باشد.

۳.۱ زیرفضاهای چگال

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید $A \subseteq X$ که X فضای باناخ است. اگر $\bar{A} = X$ (بستار A) باشد آن‌گاه A را در X چگال می‌نامیم. هم‌چنین اگر A زیر فضای X باشد در این صورت A زیر فضای چگال X نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۳.۱ A در X چگال است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ و هر $\epsilon > ۰$ عضوی مانند a از A موجود باشد که $||x - a|| \leq \epsilon$

برهان . [۴] $\square$

۴.۱ عملگرهای خطی

تعریف ۱.۴.۱ عملگر $A : X \to Y$ را که X, Y فضاهای خطی هستند، یک عملگر خطی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x_۱, x_۲$ در X و اسکالر α, β

$$A\left(\alpha x_۱ + \beta x_۲\right) = \alpha A x_۱ + \beta A x_۲$$

تعریف ۲.۴.۱ فرض کنید X, Y فضاهای خطی نرم‌دار باشند، عملگر خطی A از X به Y را کراندار می‌نامیم هرگاه $||A|| < \infty$ که در آن

$$||A|| = \sup\left\{||Ax|| : ||x|| = ۱\right\}$$

تعریف ۳.۴.۱ فرض کنید X,Y فضای خطی نرم‌دار باشند، عملگر خطی A از X به Y را پیوسته می‌نامیم هرگاه برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X که به x همگراست داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} ||Ax_n - Ax|| = ۰$$

قضیه ۴.۴.۱ عملگر خطی L پیوسته است اگر و فقط اگر کراندار باشد.

برهان . ابتدا فرض کنیم L کراندار باشد در این‌صورت

$$||Lx - Lx_n|| \leq ||L|| \ \ ||x - x_n||$$

بنابراین وقتی $x_n \to x$ پس $||x - x_n|| \to ۰$ و در نتیجه $||Lx - Lx_n|| \to ۰$ پس L همه جا پیوسته است.
برای اثبات عکس مطلب فرض کنیم L در نقطه‌ای چون x پیوسته باشد در این‌صورت

$$U_n = (x - x_n) \to ۰ \quad \Rightarrow \quad ||LU_n|| \ \ \to ۰$$

L هم‌چنین در صفر پیوسته است پس می توانیم $\delta = ۰$ را طوری بیاییم که $||Ly|| \leq ۱$ باشد (برای هر y ای که در رابطه $||y|| < \delta$ صدق کند) بنابراین برای هر $x \neq ۰$ داریم

$$||Lx|| = \frac{||x||}{\delta} \left\| L\frac{\delta x}{||x||} \right\| \leq \frac{||x||}{\delta}$$

بنابراین L کراندار است و $||L|| \leq \frac{۱}{\delta}$.

البته می‌توان گفت که هر عملگر خطی که تنها در یک نقطه پیوسته باشد همه جا پیوسته است. □

۵.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

می‌دانیم که معادلات دیفرانسیل و معادلات با مشتقات جزئی اهمیت و کاربرد فراوانی در مسائل علمی و مهندسی دارند، در روند حل دسته‌ای از آن‌ها به معادلاتی می‌رسیم که مجهول در زیر علامت انتگرال هم ظاهر می شود.
بویس ریموند[۱] اولین کسی بود که در سال ۱۸۸۸، نام معادله انتگرال را بر روی این‌گونه معادلات نهاد اما تاریخ اولیه معادلات انتگرال عملاً به زمان لاپلاس[۲] در سال ۱۷۸۲ بر می‌گردد.
او تبدیل انتگرالی $g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt$ را برای حل معادلات تفاضلی خطی و معادلات دیفرانسیل به‌کار برد.
به دنبال آن فوریه[۳] در سال ۱۸۲۲ و آبل[۴] در سال ۱۸۲۶ ضمن مطالعه مسائل فیزیکی و مکانیکی مانند انتقال حرارت و مسائل مکانیکی آبل به معادلاتی از قبیل

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xt) f(t) dt$$

$$g(x) = \int_0^\pi (x-t)^{-\alpha} f(t) dt$$

برخوردند که خود معادلاتی از نوع معادلات انتگرال می‌باشند.
پواسن[۵] در سال ۱۸۲۶ ضمن حل معادله مغناطیسی به معادلاتی مانند

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x-t) f(t) dt$$

رسید که در آن $f(x)$ تابعی مجهول می‌باشد. او با بسط $f(x)$ به کمک یک سری توانی با پارامتر λ، موفق به حل این معادله شد اما همگرایی این سری توسط ژوزف لیوول[۶] در سال ۱۸۳۷ نشان داده شد.
لیوویل در حل برخی معادلات دیفرانسیل از معادلات انتگرال بهره گرفت (۱۸۳۲) و نیومن[۷] مسأله دیریکله[۸]

---
[۱] Bois Reymond
[۲] Laplace
[۳] Fourier
[۴] Abel
[۵] Poisson
[۶] Liouville
[۷] Neumann
[۸] Dirichlet problem

(تعیین تابع ψ روی مرز سطح S که در معادله لاپلاس $\Delta^{2}\psi = 0$ صدق می‌کند) را تبدیل به یک معادله انتگرال نمود (۱۸۷۰).

در سال ۱۸۹۶ پوانکاره، معادله انتگرالی $g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt$ را در رابطه با معادله دیفرانسیل جزئی $\nabla^{2} f + \lambda f = g(x,t)$ (معروف به معادله حرکت موج) به‌دست آورد.

ولترا[1] در سال ۱۸۹۶ برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه نمود. در حدود سال‌های ۱۹۰۳—۱۹۰۰ ریاضی دانی به نام فردهلم[2] یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال خطی به شکل

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt$$

انجام داد که شامل دسته بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بودند و تحقیقات وی جهت به‌دست آوردن جواب معادله (حرکت موج) منجر به ارائه قضایای فردهلم، که از قضایای بنیادی در معادلات انتگرال هستند، گردید.

در ادامه این فرایند هیلبرت به تحقیق در مورد معادلات انتگرال پرداخت و در حل بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال سود جست، یکی از کارهای مهم وی فرموله نمودن مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مرزی و اولیه به صورت یک معادله انتگرالی است، بدین ترتیب حرکتی نو در حل این‌گونه معادلات به وجود آمد، قضایای فردهلم در ابتدا برای هسته‌های پیوسته ارائه شدند ولی بعدها توسط افراد دیگری نظیر کارلمان[3] و ریس[4] برای هسته‌های کلی‌تر تعمیم یافتند.

در اوایل نیمه دوم قرن بیستم، تحقیقات زیادی توسط هرمن ویل[5] در رابطه با این‌که به ازای چه مقادیری از λ معادله انتگرال جواب دارد صورت گرفت. از آنجا که در حالت کلی حل دقیق بسیاری از معادلات انتگرالی امکان پذیر نبود، لزوم ارائه روش‌های تقریبی و عددی جهت حل معادلات انتگرال آشکار گشت و به‌خاطر مسائل کاربردی از قبیل معادلات منفرد در تئوری پتانسیل، فیزیک مکانیک، تئوری امواج و الکترونیک، نیاز به نتایج عددی و شیوه‌های عددی بر روی کامپیوترها مسائلی از قبیل گرد کردن و انباشته شدن خطا پیش می‌آمد،

[1] $Volterra$
[2] $Ivar\ Fredholm$
[3] $Karleman$
[4] $Race$
[5] $Harmann\ Weyl$

لازم بود همگرایی روش عددی مورد بحث قرار گیرد زیرا بسیاری از روش‌ها در تئوری همگرا بودند ولی در عمل این‌طور نبود، به همین دلیل روش‌های عددی که سرعت همگرایی آن‌ها بالا بود برای حل انواع معادلات انتگرالی ابداع گردید و مقالاتی در این زمینه بین سال‌های ۱۹۶۳ و ۱۹۸۷ ارائه شد که از آن بین می توان به مقالات فیلیپس، تومی، تیخانوف و دیگران اشاره کرد.

۶.۱ دسته بندی معادلات انتگرال

تعریف ۱.۶.۱ معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول در زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر شود و این‌که خارج از علامت انتگرال نیز این تابع به چه صورتی باشد، منجر به انواع مختلف آن می گردد.

شکل کلی معادلات انتگرال را به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a\left(x\right)f\left(x\right)-\lambda\int_{0}^{x}K\left(x,y\right)f\left(y\right)dy=g\left(x\right)\qquad a\leq x\leq b$$

که در آن $K(x,y), g(x)$ و $a(x)$ توابع معلوم و $f(x)$ مجهول است. تابع $K(x,y)$ را هسته معادله انتگرال می‌نامند. معادلات انتگرال را بر حسب این‌که a,b چگونه باشند به سه دسته تقسیم می کنند

۱) اگر حدود انتگرال a,b اعداد ثابت باشند معادله انتگرال فردهلم است.

۲) اگر b متغیر باشد معادله انتگرال ولترا خواهیم داشت.

۳) اگر حداقل یکی از حدود a,b نامتناهی بوده و یا هسته معادله انتگرال در یک نقطه دامنه نامعین باشد آن را معادله انتگرال منفرد می‌نامیم. به عنوان مثال معادله اول در مثال زیر معادله فردهلم، دومی ولترا و سومی منفرد می باشد.

$$f\left(x\right)-2\int_{0}^{1}\left(x+y\right)f\left(y\right)dy=\sin x\qquad(1)$$

$$f\left(x\right)=\int_{0}^{x}\cos\left(y+f\left(y\right)\right)dy+e^{x} \tag{۲}$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-y/x}}{x}f\left(y\right)dy=g\left(x\right) \tag{۳}$$

در هر یک از معادلات انتگرال فردهلم، ولترا یا منفرد نیز با توجه به ضریب $f(x)$ یعنی $a(x)$ سه حالت مختلف داریم

۱) هرگاه در شکل کلی معادله انتگرال $a(x)=0$ باشد یعنی معادله به‌صورت

$$\lambda\int_{a}^{b}K\left(x,y\right)f\left(y\right)dy=g\left(x\right)$$

باشد آن را نوع اول می‌نامیم.

۲) هرگاه $a(x)=1$ باشد معادله انتگرال به‌صورت زیر

$$f\left(x\right)-\lambda\int_{a}^{b}K\left(x,y\right)f\left(y\right)dy=g\left(x\right)$$

می‌باشد و آن را نوع دوم می‌نامیم.

۳) شکل کلی معادله انتگرال را نوع سوم می‌نامیم.

در معادله انتگرال اگر $g(x)=0$ باشد معادله را همگن می‌نامیم پس در معادله همگن نوع دوم داریم

$$f\left(x\right)-\lambda\int_{a}^{b}K\left(x,y\right)f\left(y\right)dy=0$$

تعریف ۲.۶.۱ اگر L یک عملگر خطی روی میدان F باشد و $\alpha\in F$ اسکالری باشد که به ازای آن برداری چون $V\neq 0$ موجود باشد که $LV=\alpha V$ شود در این صورت α را یک مقدار ویژه یا مقدار مشخصه می‌نامیم. در

حالت خاص در معادله همگن نوع دوم داریم

$$f\left(x\right)=\lambda\int_a^b K\left(x,t\right)f\left(y\right)dy$$

با فرض $\mu=\frac{1}{\lambda}$ داریم

$$\int_a^b K(x,y)f\left(y\right)dy=\mu f\left(x\right)$$

یا در واقع $Lf=\mu f$ پس در معادله همگن دوم با یک مسئله مقدار ویژه روبرو هستیم. به مقداری از μ که به ازاء آن معادله انتگرال فوق جواب داشته باشد مقدار ویژه هسته می‌گوییم و تابع $f(x)$ متناظر با آن را تابع ویژه می‌نامیم. یک هسته ممکن است مقدار ویژه نداشته باشد و یا بیش از یک مقدار ویژه داشته باشد.

تعریف ۳.۶.۱ به مجموعه مقادیر ویژه هسته به همراه صفر طیف هسته $K(x,y)$ گفته می‌شود.

۷.۱ قضایای کلاسیک فردهلم

در این قسمت مابه قضایای اساسی فردهلم برای حل معادلات انتگرال می پردازیم. در این‌جا تنها به ذکر صورت قضایا می‌پردازیم. برای توضیحات بیشتر به [۱۸، ۲، ۱۲، ۱] مراجعه شود.

تعریف ۱.۷.۱ دترمینان فردهلم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{vmatrix} k\left(x_1,y_1\right) & k\left(x_1,y_2\right) & \dots & k\left(x_1,y_n\right) \\ k\left(x_2,y_1\right) & k\left(x_2,y_2\right) & \dots & k\left(x_2,y_n\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\left(x_n,y_1\right) & k\left(x_n,y_2\right) & \dots & k\left(x_n,y_n\right) \end{vmatrix} = K\begin{pmatrix} x_1,x_2,\dots,x_n \\ y_1,y_2,\dots,y_n \end{pmatrix}$$

تعریف ۲.۷.۱ مینور فردهلم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D_n = \left(\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{array} \middle| \lambda \right) = k \left(\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{array} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int \ldots \int k$$

$$\left(\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_p \end{array} \right) dt_1, \ldots, dt_p$$

قضیه ۳.۷.۱ قضیه اول فردهلم

معادله انتگرال فردهلم ناهمگن زیر را در نظر می گیریم

$$f(x) = g(x) + \lambda \int K(x,y) f(y) dy$$

که در آن $f(y)$ و $g(x)$ توابع انتگرال پذیر هستند. این معادله جواب یکتای

$$f(x) = g(x) + \lambda \int \Gamma(x,y;\lambda) g(y) dy$$

می‌باشد که در آن

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)}, D(\lambda) \neq 0$$

به‌صورت خارج قسمت دو سری زیر است ۰

$$D(x,y;\lambda) = K(x,y) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int \ldots \int k \left(\begin{array}{c} x, t_1, \ldots, t_p \\ y, t_1, \ldots, t_p \end{array} \right) dt_1, \ldots, dt_p$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \int \ldots \int k \left(\begin{array}{c} t_1, t_2, \ldots, t_p \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{array} \right) dt_1, dt_2, \ldots, dt_p$$

که هر دو به ازاء تمام مقادیر λ همگرا می‌باشند. جواب معادله همگن زیر برابر با صفر می‌باشد.

$$f(x) = \lambda \int K(x,y) f(y) dy$$