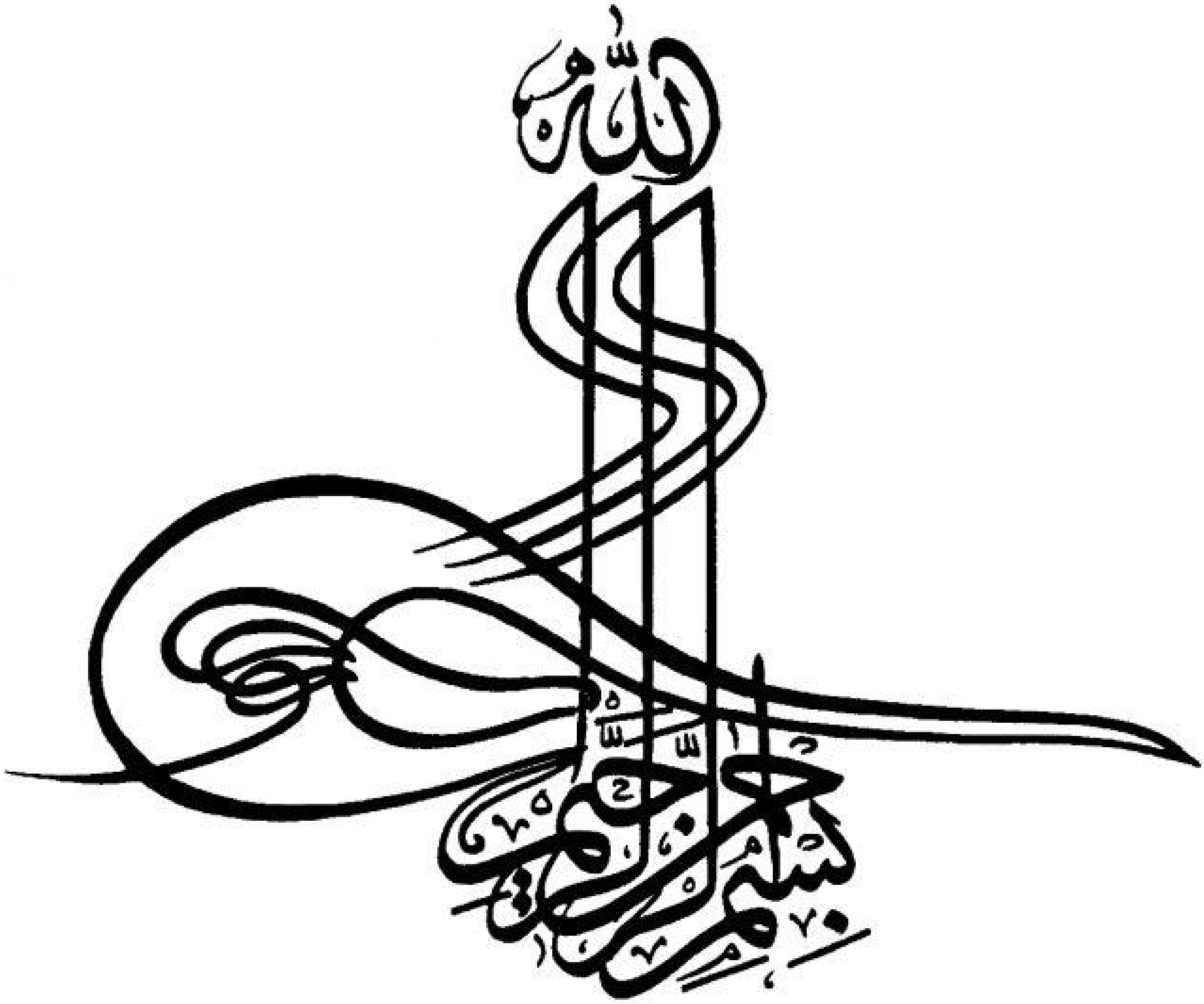
بسم الله الرحمن الرحيم

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب لیلی عبدی بویاغچی دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش هندسه دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۴۲۳۱۰۴ که در تاریخ ۹۲/۰۶/۱۳ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "مطالعه و بررسی هندسه کلاف مماسی منیفلدهای فینسلری" دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: لیلی عبدی بویاغچی

امضا

تاریخ ۹۲/۰۶/۱۹

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

مطالعه و بررسی هندسه کلاف مماسی منیفلدهای فینسلری

استاد راهنما:

دکتر داریوش لطیفی

استاد مشاور:

دکتر کاظم حق‌نژاد آذر

پژوهشگر:

لیلی عبدی

شهریور ۱۳۹۲

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

مطالعه و بررسی هندسه کلاف مماسی منیفلدهای فینسلری

پژوهشگر:

لیلی عبدی

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته داوران پایان‌نامه با درجه‌ی ....

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضا
دکتر داریوش لطیفی	استادیار	استاد راهنما و رئیس کمیته داوران	
دکتر کاظم حق‌نژاد آذر	استادیار	استاد مشاور	
دکتر نعمت اباذری	استادیار	داور	

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدرم و دستان نوازشگر او

و مادرم و فداکاریهایش

سپاس‌گذاری

سپاس، آفریننده عشق را و سپاس، کسانی که آموختن را عشق می‌دانند. سپاس، آنان را که روشنایی ردای علمشان نردبان ناجی نادانی است، آنان که معلم میثاق مهرند و شکوفاگر شاخه‌های شباب اندیشه . در نگارش این پایان‌نامه مرهون زحمات عزیزانی هستم که بر بنده فرض عین است تا از آنان تشکر و قدردانی کنم.

همانند هر فرزندی خود را مدیون زحمات پدر و مادری می‌دانم که زبان در توصیف فداکاریهایشان ناتوان می‌ماند و از دو برادرم که اگر یاریشان نبود شاید من هم در این مرحله نبودم.

و بعد استاد راهنمای گرانقدر جناب آقای دکتر داریوش لطیفی که نه فقط در این پایان‌نامه که در طول این دو سال تأثیرگذارترین استادم بودند. در انتهای این راه بیش از پیش ارزش استادی ایشان و معنای واژه استادی را یافتم. از جنای آقای دکتر کاظم حق‌نژاد آذر سپاسگذارم که نه فقط استاد مشاور من که الفبای ریاضی را از ایشان آموختم و در نهایت از جناب آقای دکتر نعمت اباذری سپاسگذارم که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند.

لیلی عبدی

شهریور ۹۲

در انتهای این مسیر تنها یک حقیقت یافتم:

من هنوز هیچ نمیدانم.

نام خانوادگی: عبدی نام: لیلی

عنوان پایان‌نامه:
مطالعه و بررسی هندسه کلاف مماسی منیفلدهای فینسلری

استاد راهنما: دکتر داریوش لطیفی
استاد مشاور: دکتر کاظم حق‌نژاد آذر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه
دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۹۲/۰۶/۱۳ تعداد صفحات: ۱۱۳

چکیده

در این مقاله کلاف مماسی از یک منیفلد فینسلری مانند (M,F) را که به متریک ساساکی مجهز شده است مورد مطالعه قرار می‌دهیم و بعضی نتایج را به دست می‌آوریم. ما منیفلد ریمانی M را به عنوان یک منیفلد فینسلری توصیف می‌کنیم به طوریکه دیورژانس ترفیع افقی هر میدان برداری در M صفر است یا به طور معادل توزیع افقی در کلاف مماسی کلاف مماسی شکافته مینیمال است، و ثابت می‌کنیم ساختار تقریباً مختلط روی کلاف مماسی شکافته انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر منیفلد پایه انحنای پرچمی صفر داشته باشد. در چنین حالتی کلاف مماسی شکافته کهلری است. همین‌طور ثابت می‌کنیم کلاف مماسی شکافته $TM\backslash0$ به طور موضعی متقارن است اگر و تنها اگر منیفلد پایه به طور موضعی اقلیدسی باشد. نتایج ما تعمیم نتایج مشابهی برای منیفلدهای ریمانی می‌باشند.

کلیدواژه‌ها: کلاف مماسی، متریک ساساکی، منیفلد فینسلری

فهرست

مقدمه

عالمی که ما در یکی از کرات آن زندگی می‌کنیم پر از اسرار و رموزی است که نمی‌توان آن را به حساب آورد. بلکه هر یک از ذرات و اتمهای آن دارای حقیقتی است که از دیده‌ها پنهان می‌باشد. بشر بعنوان یکی از موجودات این عالم، با قوه پنهانی و درونی خرد یا اندیشه خود دارای حس کنجکاوی زیادی است که همواره مایل است بر حقایق و اسرار جهان و رموز پنهان آن آگاهی حاصل نماید.

فراگیری هندسه برای تقویت و خرد همگان خوب است اما نیاز به آموزش هندسه منیفلد در رشته‌های فنی و علوم به مراتب بیشتر احساس می‌شود. لزوم استفاده از هندسه منیفلدها در حقیقت بطور طبیعی در ریاضیات مقدماتی آشکار می‌شود. به عنوان مثال وقتی بخواهیم مشتق‌پذیری یک تابع پارامتری ساده که نمودار آن مثلاً یک نیم‌دایره مانند $F(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 < t < \pi$ است را بررسی نمائیم با استفاده از ریاضیات عمومی این کار عملی است ولی سوالی که غالباً مطرح می‌شود این است که آیا معکوس این تابع نیز مشتق‌پذیر است؟ جواب این سوال برای دانشجویانی که با مفهوم "زیرمنیفلدها" آشنایی ندارند سخت است. منیفلدها در علوم و فنون مختلف کاربردهای متنوعی دارند. بعنوان مثال در برخی از شاخه‌های فیزیک مانند نظریه نسبیت عام و یا نظریه کوانتوم، هندسه منیفلدها نقش زیربنایی دارد و کتب بسیار متنوعی در این زمینه تألیف شده است. هنگام استفاده از تئوری معادلات دیفرانسیل، منیفلدها از اهمیت خاصی برخوردارند و یا هرگاه بخواهیم مقدار یک انتگرال را روی یک فضای پیچیده یا نامتناهی محاسبه کنیم نیاز به استفاده از مفهوم انتگرال روی منیفلدها داریم.

گاهی اوقات در هندسه اتفاق می‌افتد که می‌خواهیم با کنار هم قرار دادن منیفلدها، منیفلد جدیدی بسازیم، برای این کار ابتدا باید یک ساختار دیفرانسل‌پذیری روی این خانواده از منیفلدها تعریف کنیم. این عمل را کلاف کردن خانواده‌ای از منیفلدها به یکدیگر و این ساختار جدید را ساختار کلافی می‌نامیم. این مطالعات تحت نام نظریه کلاف‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. نظریه کلاف‌ها بخش مهمی از هندسه دیفرانسیل

را تشکیل می‌دهد و یکی از اهداف این نظریه ارائه یک تعریف جامع از مشتق کواریانت از تانسورهاست.

هدف این پایان‌نامه بررسی هندسه کلاف مماسی از یک منیفلد فینسلری می‌باشد. هندسه کلاف مماسی از منیفلدهای ریمانی به خوبی توسعه پیدا کرده‌اند ولی همین روند در مورد منیفلدهای فینسلری با سرعت مشابهی پیش نرفته است. مجموعه حاضر شامل چهار فصل می‌باشد که در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه از هندسه منیفلد بیان شده است که شامل ۵ بخش می‌باشد. در این فصل مفهوم منیفلد را بیان و سپس به تعریف میدان‌های برداری، کروشه لی و ... می‌پردازیم. ساختار ریمانی روی یک منیفلد توپولوژیک و بعد التصاق ریمانی و انحنای ریمانی را معرفی می‌کنیم .

در فصل ۲ خلاصه ای از ساختار فینسلری را بیان می‌کنیم. هدف اصلی این فصل معرفی متریک ریمانی است که از ساختار فینسلری روی منیفلد فینسلری ناشی می‌شود.

در فصل سوم به بررسی کلاف مماسی از یک مینفلد ریمانی می‌پردازیم و در واقع هندسه آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، در این فصل با در نظر گرفتن کلاف مماسی به عنوان یک منیفلد هموار، کروشه لی، میدان‌های برداری و ... را تعریف می‌کنیم. همین‌طور ساختار ریمانی آن را که به متریک ساساکی معروف است مورد مطالعه قرار داده و همچنین کمیت‌های وابسته به متریک ریمانی از جمله التصاق ریمانی و انحنای ریمانی را محاسبه می‌نماییم.

فصل چهارم در ادامه فصل سوم، به بررسی کلاف مماسی از یک منیفلد فینسلری می‌پردازد. این فصل شامل دو بخش می‌باشد که در بخش اول متریک ساساکی روی کلاف مماسی شکافته از یک منیفلد فینسلری را تعریف می‌کنیم. این بخش شامل دو قضیه اصلی است که قضیه اول شرطی را بیان و اثبات می‌کند که در صورت برقراری آن یک منیفلد فینسلری، منیفلدی ریمانی خواهد بود. قضیه دوم تعمیم قضیه‌ای از منیفلدهای ریمانی به منیفلدهای فینسلری است که بیان می‌کند کلاف مماسی یک منیفلد ریمانی به طور موضعی متقارن است اگر و تنها اگر منیفلد پایه به طور موضعی اقلیدسی باشد. در بخش دوم به معرفی ساختار تقریباً مختلط روی منیفلدها و سپس تعمیم آن به منیفلدهای فینسلری می‌پردازیم و در نهایت قضیه‌ای را در این زمینه اثبات می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ هندسه ریمانی

هندسه‌ای که ریمان[۱] آن را برای اولین بار مطرح ساخت و بنام هندسه ریمانی[۲] معروف گردید، در حقیقت تعمیم مطالبی بنام هندسه دیفرانسیل رویه‌ها است که توسط گاوس[۳] مورد مطالعه قرار گرفته بود. در هندسه دیفرانسیل رویه‌ها یک ضرب داخلی روی خانواده بردارهای مماس[۴] بر رویه[۵] تعریف می‌گردد که توسط این ضرب می‌توان طول بردارهای مماس بر رویه در $\mathbb{R}^3$ را بدست آورد. این ضرب داخلی را معمولاً توسط $\langle \; , \; \rangle$ نمایش می‌دهند. از خواص جالب توجه این ضرب آن است که کلیه خواص هندسی رویه از جمله طول قوس یک منحنی $\gamma(t)$ در روی هر رویه را نیز می‌توان با استفاده از آن بدست آورد.

$$L = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

طول قوس یک خم و روش محاسبه آن اساس تعریف خواص هندسی آن فضاست. به عبارت دقیقتر وقتی روشی یا فرمولی برای محاسبه طول قوس یک خم در فضا ارائه می‌دهیم یک نوع ضرب داخلی یا متریک روی آن فضا تعریف می‌کنیم. با استفاده از این متریک می‌توان کلیه خواص هندسی دیگر آن فضا را تعریف نمود. لذا می‌توان گفت که به نوعی با ارائه یک تعریف در یک فضا در حقیقت هندسه آن را معرفی کرده‌ایم. در حقیقت اولین کار ریمان تعمیم این ضرب بود که بعدها منجر به تعریف انتگرال ریمان[۶] و متریک ریمان[۷] گردیده و موجبات تعریف ریمانی را پس از هندسه اقلیدسی فراهم نمود.

[۱] Rieman
[۲] Riemannian geomety
[۳] Carl Friedrich Gauss
[۴] Tangent vectors
[۵] Curve
[۶] Riemannian integral
[۷] Riemannian metric

۲.۱ منیفلد یا خمینه

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید M یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت M را موضعاً اقلیدسی گوییم (فضای اقلیدسی مثل $\mathbb{R}^n$) هرگاه برای هر نقطه p از M یک همسایگی باز U از آن در M و یک همسایگی باز V در $\mathbb{R}^n$ (برای یک $n \in Z^+$) هومیومرفیسم $\varphi : U \longrightarrow V$ موجود باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فضای توپولوژیک را یک منیفلد توپولوژیک گوییم هرگاه

i) موضعاً اقلیدسی باشد؛

ii) هاسدورف باشد؛

iii) دارای پایه شمارا باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد توپولوژیک n بعدی و $\mathcal{A}$ یک اطلس ماکسیمال روی M باشد، در این صورت این اطلس ماکسیمال را یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر[۱] روی M و زوج $(M, \mathcal{A})$ را یک منیفلد هموار[۲] گوییم. یعنی یک منیفلد هموار عبارتست از یک منیفلد توپولوژیک به همراه یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار n بعدی باشد. برای هر $p \in M$ فرض کنید T_pM نشان دهنده فضای مماسی[۳] M در p باشد، اگر (U, x) یک کارت موضعی حول p روی M باشد، عضو $\left({}^{\partial}/_{\partial x_k}\right)_p$ از کلاف مماسی T_pM به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left({}^{\partial}/_{\partial x_k}\right)_p : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$$

$$\left({}^{\partial}/_{\partial x_k}\right)_p (f) \to {}^{\partial f}/_{\partial x_k}(p) = \partial_{e_k}\left(f \circ x^{-1}\right)(x(p)) \cdot$$

که در آن $f \in C^{\infty}(M)$ و $\{e_k; k = 1, 2, ..., n\}$ پایه استاندارد $\mathbb{R}$ می باشد. در این صورت $\left\{\left({}^{\partial}/_{\partial x_k}\right)_p ; k = 1, 2, ..., n\right\}$ یک پایه برای T_pM خواهد بود. حال اگر X_p یک بردار مماس[۴] دلخواه در نقطه $p \in M$ باشد، می‌توانیم نمایش موضعی زیر را برای X_p داشته باشیم:

[۱] Diffrentiable structure
[۲] Smooth manifold
[۳] Tangent space
[۴] Tangent vector

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i (\partial/\partial x_i)_p.$$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار n بعدی باشد، در این صورت کلاف مماسی[۱] M به صورت اجتماع تمام فضاهای مماسی تعریف شده و با نماد TM نمایش داده می‌شود:

$$TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$$

پس $TM = \{(p, X_p)\,;\; p \in M, X_p \in T_pM\}$.

نشان می‌دهیم TM یک منیفلد توپولوژیک است و دارای ساختار هموار می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار n بعدی باشد، در این صورت کلاف مماسی TM دارای ساختار منیفلدی $2n$ بعدی است.

برهان. نگاشت تصویر طبیعی[۲] $\pi : TM \to M$ یا نگاشت کلافی[۳] را در نظر می‌گیریم. حال اگر U بازی در M باشد، آنگاه $\pi^{-1}(U)$ را در TM باز فرض می‌کنیم. به این ترتیب یک توپولوژی روی TM گذاشته می شود که این توپولوژی، هاسدورف و دارای پایه شماراست حال سعی می‌کنیم توسط ساختار دیفرانسیل‌پذیر M (اطلس ماکسیمال آن)، یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر برای TM ایجاد کنیم. فرض کنید (U, x) یک کارت[۴] روی M باشد. در این صورت قرار می‌دهیم $\overline{U} = \pi^{-1}(U)$ و

$$\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$\varphi\left(X_p\right) = \left(x^1(p), ..., x^n(p), X^1, ..., X^n\right),$$

$$p \in U,\; X_p \in \overline{U} = \pi^{-1}(U).$$

بدین ترتیب متناظر با کارت (U, x) برای M، کارت $(\overline{U}, \varphi)$ برای TM به صورت فوق ایجاد می‌شود. حال اگر (V, y) نیز یک کارت روی M باشد که $U \cap V \neq \emptyset$، در این صورت نشان می‌دهیم که کارت‌های متناظر

[۱] Tangent bundle
[۲] Naturle projection
[۳] Bundle map
[۴] Chart

$(\overline{U},\varphi)$ و $(\overline{V},\phi)$ باهم C^∞ - مرتبط اند که در آن $(\overline{V},\phi)$ کارت متناظر با (V,y) است:

$$\overline{V}=\pi^{-1}(V)$$

$$\phi:\overline{V}\to\mathbb{R}^{2n}$$

$$\phi\left(X_p\right)=\left(y^1\left(p\right),...,y^n\left(p\right),Y^1,...,Y^n\right)$$

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}Y^i\left({}^{\partial}\!/_{\partial y^i}\right)\cdot$$

نگاشت تغییر کارت $(\overline{U},\varphi)$ و $(\overline{V},\phi)$ به صورت زیر است:

$$\phi\circ\varphi^{-1}:\varphi(\overline{U}\cap\overline{V})\subseteq\mathbb{R}^{2n}\to\phi(\overline{U}\cap\overline{V})\subseteq\mathbb{R}^{2n}$$

$$\left(x^1(p),...,x^n(p),X^1,...,X^n\right)\to\left(y^1(p),...,y^n(p),Y^1,...Y^n\right)\cdot$$

برای اینکه نشان دهیم $\phi\circ\varphi^{-1}$ هموار است بایستی نشان دهیم که y^iها و Y^iها توابعی هموار از x^iها و X^iها هستند. با توجه به اینکه (U,x) و (V,y) C^∞ - مرتبط اند، پس y^iها توابعی هموار از x^iها هستند. به صورت واضح داریم:

$$y^i(p)=(y\circ x^{-1})^i(x(p))\ ,$$

چون $y\circ x^{-1}$ هموار است پس مولفه iام آن یعنی y^i نیز هموار است:

$$y^i\left(x^1(p),...,x^n(p)\right)=\left(y\circ x^{-1}\right)^i\left(x^1(p),...,x^n(p)\right)\cdot$$

حال نشان می‌دهیم که Y^iها توابعی هموار از x^iها و X^iها می‌باشند. برای اینکار بایستی رابطه بین این متغیرها را پیدا کنیم. داریم:

$$X_p=\sum_r X^r({}^{\partial}\!/_{\partial x_r})=\sum_j X^j({}^{\partial}\!/_{\partial y^j})\ ,$$

از اینجا می‌توانیم بنویسیم

$$X_p(y^i)=\sum_r X^r(\frac{\partial y^i}{\partial x^r})=\sum_j Y^j(\frac{\partial y^i}{\partial y^j})\ ,$$

$$\sum_r X^r({}^{\partial y^i}\!/_{\partial x^r})=\sum_j Y^j\delta^i_j=Y^i\ ,$$

پس

$$\begin{aligned} Y^i &= \sum_r X^r (\frac{\partial y^i}{\partial x^r}) \\ &= \sum_r X^r D_r (y^i \circ x^{-1})(x(p)) \\ &= \sum_r X^r D_r (y \circ x^{-1})(x(p)) \\ &= X^1 D_1 (y \circ x^{-1}) + X^2 D_2 (y \circ x^{-1}) \\ &+ ... + X^n D_n (y \circ x^{-1}) \cdot \end{aligned}$$

در نتیجه کارتهای ایجاد شده روی TM تشکیل یک اطلس می‌دهند. $\square$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار n بعدی باشد، در این صورت یک میدان برداری[1] روی M عبارتست از نگاشت هموای مانند $X : M \to TM$ به طوریکه اگر $p \in M$ آنگاه $X(p) \in T_pM$.

به طور ساده تر یک میدان برداری تابعی است از M به TM که به هر نقطه منیفلد مانند p، بردار مماس $X_p \in T_pM$ در فضای مماسی M در نقطه p را نسبت می‌دهد. مجموعه تمام میدان‌های برداری روی منیفلد M را با نماد $\chi(M)$ نشان می‌دهند. یک میدان برداری را به صورت زیر نیز می‌توانیم تعریف کنیم:

تعریف ۷.۲.۱. یک میدان برداری روی M عبارتست از نگاشت هموار $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ با ضابطه $f \to X(f)$ که خواص زیر را دارد:

$(i)\quad X(f+g) = X(f) + X(g)\,,$

$(ii)\quad X(\lambda f) = \lambda X(f)\,,$

$(iii)\quad X(f \cdot g) = X(f)\,g + f \cdot X(g) \cdot$

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید X و Y دو میدان برداری روی منیفلد هموار M باشد، در این صورت کروشه لی[2] X, Y یک میدان برداری است که با نماد $[X,Y]$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\ ,\ ] : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

[1] Vector field
[2] Lie bracket

$$[\ ,\ ](X,Y) = [X,Y],$$

$$[X,Y] : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$$

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت مشتق پذیر در نقطه p، نه لزوماً در کل M، باشد در این صورت نگاشت مشتق f در نقطه $p \in M$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{*p} : T_pM \to T_pM$$

$$f_{*p}X_p(g) := X_p(g \circ f)\cdot$$

که در آن $g \in C^{\infty}(N)$.

به وضوح می‌بینیم که $f_{*p} : T_pM \to T_pM$ خطی است. همین طور خوش تعریف نیز هست. یعنی $f_{*p}X_p \in T_{f(p)}N$ یک بردار مماس است.

به همین ترتیب توسط نگاشت مشتق بین کلاف‌های مماسی TM و TN رابطه زیر را می‌توانیم داشته باشیم:

$$f_* : TM \to TM$$

$$(p, X_p) \to (f(p), f_{*p}X_p).$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید M منیفلد هموار n بعدی باشد، در این صورت برای $p \in M$ یک فضای برداری n بعدی است پس دوگان آن یعنی T_p^*M نیز یک فضای برداری n بعدی می‌باشد:

$$T_p^*M = \{f;\ f : T_pM \to \mathbb{R}\}$$

قرار می‌دهیم $T^*M = \bigcup\limits_{p\in M} T_p^*M$. T^*M کلاف کتانژانت[1] نامیده می‌شود. T^*M نیز دارای ساختار منیفلد $2n$ بعدی است.

[1] Cotangent bundle

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید M یک منیفلد هموار n بعدی و T_p^*M فضای کتانژانت M در p باشد، در این صورت اعضای T_p^*M را یک ۱- فرمی گویند. یعنی یک ۱- فرمی در نقطه p عبارتست از تابعک خطی $\omega : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$.

تعریف ۱۲.۲.۱. یک میدان یک فرمی روی M عبارتست از نگاشت هموازی مانند $\omega : M \longrightarrow T^*M$ که به هر نقطه p از M یک فرمی $\omega(p) \in T^*M$ را نسبت می دهد.

مجموعه تمام میدان‌های ۱- فرمی روی M را با نماد $\Omega^1(M)$ نشان می‌دهند. همچنین ω را می‌توانیم به فرم عملگر زیر در نظر بگیریم:

$$\omega : \chi(M) \to C^\infty(M)$$

$$X \to \omega(X); \quad \omega(X)(p) = \omega_p(X_p).$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت هموار باشد که در آن M یک منیفلد هموار است. در این صورت دیفرانسیل خارجی f را با df نشان می‌دهند و آن را به صورت میدان ۱- فرمی زیر تعریف می‌کنند:

$$df : \chi(M) \to C^\infty(M); \quad df(X) := \chi(f).$$

حال اگر M یک منیفلد هموار n بعدی باشد و (U, x) یک کارت از آن، در این صورت توابع مختصاتی $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ موجودند. به این ترتیب می‌توانیم دیفرانسیل خارجی dx^iها را تعریف کنیم:

$$dx^i : \chi(U) \to C^\infty(M)\cdot$$

اگر X یک میدان برداری دلخواه در $\chi(U)$ باشد، داریم:

$$X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$dx^i(X) = dx^i\left(\sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_j X^j \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = X^i\cdot$$