وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

اثبات قضیه‌ی زمردی با استفاده از روش‌های نظریه‌ی ارگودیک

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

فروغ نصیری

استاد راهنما: **دکتر میثم میثمی صدر**

دی ماه ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

کسانی که عشقشان در وجودم دمیده شد

پدر و مادر مهربانم

و

خواهران عزیزم

تشکر و قدردانی

سپاس خدایی را که آفرید

جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را.

از خانواده‌ام

و استاد گرانقدرم، دکتر میثم میثمی‌صدر

و تمامی اساتیدی که از آغاز تحصیل تاکنون به من آموخته‌اند، سپاسگزارم.

در پایان از جناب دکتر علیزاده که در ویرایش پایان‌نامه مرا یاری کردند، متشکرم.

چکیده

قضیه‌ی زمردی در نظریه‌ی اعداد، بیان می‌کند که هر زیرمجموعه از اعداد صحیح با چگالی بالایی مثبت، شامل تصاعدهای حسابی با طول به‌دلخواه بزرگ است.

در این پژوهش قصد داریم اثبات ارگودیکی قضیه‌ی زمردی که توسط فرستنبرگ ارائه شده است، را بررسی کنیم.

فهرست

چکیده . . . . پنج

مقدمه ۱

۱.۰ ایده‌ی اثبات ۲

۱ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی ارگودیک ۵

۱.۱ تعاریف و قضایای اولیه ۵

۱.۱.۱ سیستم های دینامیکی ۶

۲.۱.۱ قضیه‌های مقدماتی بازگشت ۱۱

۳.۱.۱ قضیه‌های ارگودیک ۱۶

۴.۱.۱ تجزیه‌ی ارگودیک ۲۵

۲.۱ اصل تناظر ۲۷

۱.۲.۱ سیستم‌های برنولی ۲۸

۲.۲.۱ بازگشت چندگانه‌ی فرستنبرگ ۳۲

۲ سیستم‌های SZ ۴۰

۱.۲ بررسی دو سیستم خاص ۴۳

۲.۲ سیستم‌های ضعیف-آمیخته ۵۱

۱.۲.۲ سرشت‌نمایی با استفاده از فضای حاصلضربی ۵۶

۳.۲ توابع ضعیف-آمیخته ۶۰

۱.۳.۲ بازگشت چندگانه ۶۲

۴.۲ سیستم‌های فشرده ۶۴

۱.۴.۲ بازگشت چندگانه ۶۶

۲.۴.۲ عملگرهای هیلبرت-اشمیت ۶۸

۳.۴.۲ مؤلفه‌های ضعیف-آمیخته و تقریبا متناوب ۶۹

۴.۴.۲ عامل‌های ضعیف-آمیخته و فشرده ۷۴

۳ آخرین مراحل روند اثبات قضیه‌ی (۲.۰.۱۷) ۷۸

۱.۳ نگاهی کوتاه برآنچه گذشت و مراحلی که تاپایان پیش رو داریم ۷۸

۲.۳ عامل ۸۱

۱.۲.۳ امید شرطی ۸۴

۲.۲.۳ تجزیه‌ی اندازه ۸۵

۳.۳ اثبات قسمت (i) قضیه‌ی(۲.۱.۳) ۸۷

۴.۳ اثبات قسمت (ii) قضیه‌ی(۲.۱.۳) ۹۰

۱.۴.۳ توسیع‌های ارگودیک و ضعیف-آمیخته ۹۰

۲.۴.۳ سرشت‌نمایی حاصلضرب تاری ۹۱

۳.۴.۳ بازگشت چندگانه ۹۳

۵.۳ توسیع فشرده ۹۴

۶.۳ مؤلفه‌های ضعیف-آمیخته و تقریبا متناوب ۹۵

۱.۶.۳ وجود توابع تقریبا متناوب شرطی ۹۷

۲.۶.۳ وجود توسیع‌های فشرده ۹۸

مراجع ۱۰۰
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۳
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۶

مقدمه

نقطه‌ی شروع قضیه‌ی زمردی، به سال ۱۹۲۷ برمی‌گردد که در آن زمان، واردن [۱] [۱] وجود تصاعدهای حسابی را در هر زیرمجموعه از اعداد صحیح ثابت نمود.

قضیه ۱.۰.۰ (قضیه‌ی واردن). *اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح را با تعداد رنگ‌های متناهی رنگ‌آمیزی کنیم، آن‌گاه برای هر عدد صحیح k، تصاعد حسابی $k-$جمله‌ای از اعداد صحیح همرنگ موجود است.*

اما روس [۲] [۲] در سال ۱۹۵۳ نشان داد که با قرار دادن شرط مثبت بودن چگالی بالایی، هر زیرمجموعه از اعداد صحیح با چگالی بالایی مثبت، شامل تصاعدهای حسابی ۳-جمله‌ای است.

پس از آن زمردی [۳] [۳] در سال ۱۹۶۹ با همان فرض، وجود تصاعدهای حسابی ۴-جمله‌ای را بیان نمود. سرانجام در سال ۱۹۷۵، مجددا زمردی [۴] نشان داد که با همان شرط مذکور، می‌توان تصاعدهای حسابی با طول به‌دلخواه بزرگ داشت.

قضیه ۲.۰.۰ (قضیه‌ی زمردی). *هر زیرمجموعه از اعداد صحیح با چگالی بالایی مثبت، شامل تصاعدهای حسابی با طول به‌دلخواه بزرگ است.*

پس از بیان قضیه‌ی زمردی به دلیل اهمیت بالای موضوع، اثبات‌های متعددی در شاخه‌های مختلف ریاضی برای آن ارائه شد که به‌طور نمونه به چند مورد اشاره می‌کنیم.

---

[۱] van der Waerden

[۲] Roth

[۳] Endre Szemerédi

۱) اثبات زمردی [۴] با استفاده از نظریه‌ی مقدماتی ترکیبیات

۲) اثبات فرستنبرگ [۱] [۵] به کمک نظریه‌ی ارگودیک

۳) اثبات گاورز [۲] [۶] در آنالیز فوریه

⋮

در این پژوهش اثبات قضیه‌ی زمردی که توسط فرستنبرگ ارائه شده است، بررسی می‌شود.

۱.۰ ایده‌ی اثبات

ابتدا نشان می‌دهیم قضیه‌ی زمردی با قضیه‌ی فرستنبرگ معادل است.

قضیه ۱.۱.۰ (قضیه‌ی فرستنبرگ). *در یک سیستم حافظ‌اندازه مانند $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$، برای هر مجموعه‌ی اندازه‌پذیر مانند E با اندازه‌ی مثبت و برای اعداد صحیح n و $k \geq ۱$ داریم*

$$\mu\left(E \bigcap T^n E \bigcap \dots \bigcap T^{(k-۱)n} E\right) > ۰.$$

بعد از آن سیستم SZ را تعریف خواهیم کرد، درواقع یک سیستم حافظ‌اندازه، SZ است هرگاه برای تابع اندازه‌پذیر $f \in L^۲(X)$ و برای اعداد صحیح n و $k \geq ۱$ داشته باشیم

$$\liminf_{N \to \infty} \sum_{n=۰}^{N-۱} \int_X f.T^n f \cdots T^{(k-۱)n} f \, d\mu > ۰.$$

[۱] Furstenberg

[۲] Gowers

یا به‌طور معادل برای مجموعه‌ی اندازه‌پذیر E با اندازه‌ی مثبت داریم

$$\liminf_{N\to\infty} \sum_{n=۰}^{N-۱} \mu\left(E \bigcap T^n f \bigcap \cdots \bigcap T^{(k-۱)n} E\right) > ۰.$$

سپس ثابت می‌کنیم که قضیه‌ی فرستنبرگ معادل این حکم است که هر سیستم حافظ‌اندازه SZ است.
درواقع برای اثبات قضیه‌ی زمردی کافی‌است ثابت کنیم که هر سیستم حافظ‌اندازه، SZ است.
بعد از آن، ابتدا تعریف سیستم‌های ضعیف-آمیخته را مطرح می‌کنیم.
سیستم حافظ‌اندازه‌ی $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ضعیف-آمیخته نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو مجموعه‌ی $A, B \in \mathcal{B}$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$D - \lim_{n\to\infty} \mu(T^n A \cap B) = \mu(A).\mu(B).$$

اگر یک سیستم حافظ‌اندازه، ضعیف-آمیخته باشد که در این‌صورت طی قضیه‌ای ثابت می‌کنیم هر سیستم ضعیف-آمیخته، SZ است و اگر ضعیف-آمیخته نباشد، نشان می‌دهیم این سیستم دارای عاملی فشرده است و نشان می‌دهیم که سیستم‌های فشرده، SZ هستند.
اما از آنجایی‌که از SZ بودن یک سیستم فشرده، نمی‌توان ویژگی SZ را برای عامل فشرده‌ی آن تضمین کرد، ناچاریم مفهوم توسیع یک سیستم را مطرح کنیم.
در ادامه قصد بر این است ثابت کنیم که اگر $\mathcal{B}'$ زیر $\sigma-$جبر $\mathcal{B}$ باشد، آن‌گاه $X' = (X, \mathcal{B}', \mu, T)$عاملی از سیستم $X = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ است. در این‌صورت هرگاه سیستم X، SZ باشد، آن‌گاه X' نیز SZ است، به شرط آن که توسیعی فشرده یا ضعیف-آمیخته به‌صورت $(X, \mathcal{B}', \mu, T) \to (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ موجود باشد.

بنابراین، اثبات قضیه‌ی اصلی به اثبات قضیه‌ی زیر محدود می‌شود.

قضیه ۲.۱.۰. *مجموعه‌ی همه‌ی عامل‌ها روی $\sigma-$جبر $\mathcal{B}$ را با رابطه‌ی شمول درنظر بگیرید، در این‌صورت*

i) مجموعه‌ی همه‌ی عامل‌هایی که نگاشت T در آن‌ها SZ است، شامل عضو ماکسیمال است.

ii) هیچ عامل سره نمی‌تواند در مجموعه‌ی ذکر شده در قسمت (i)، عضو ماکسیمال باشد.

برای روشن‌تر شدن مطلب، فرض کنیم که Y عامل ماکسیمالی برای سیستم X باشد که در قسمت (i) قضیه‌ی بالا، ذکر شد. اگر $X = Y$ که اثبات تمام است. پس فرض کنیم $X \neq Y$. بنا بر دو قضیه‌ای که در فصل سوم بیان می‌کنیم، نتیجه می‌گیریم که سیستم X نمی‌تواند توسیعی ضعیف-آمیخته یا فشرده برای Y باشد. اکنون فرض می‌کنیم که سیستم X، توسیعی سره از Y باشد که ضعیف-آمیخته نیست و نشان می‌دهیم که زیرتوسیع سره‌ی واسطه‌ای مانند X^*، موجود است که یک توسیع فشرده برای Y است و این با قضیه‌ی بیان شده در تناقض است. پس $X = Y$. این همان حکم (ii) قضیه‌ی بالاست. بنابراین هر سیستم حافظ‌اندازه، SZ است.

فصل اول

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی ارگودیک

۱.۱ تعاریف و قضایای اولیه

در این بخش، مقدماتی از نظریه‌ی ارگودیک بیان می‌شود. درواقع نظریه‌ی ارگودیک مطالعه‌ی سیستم‌های حافظ‌اندازه است. تغییرات سیستم وقتی که انتقالی خاص به‌طور مکرر انجام می‌شود، موضوعی است که در این فصل بررسی می‌شود. به‌عنوان مثال هنگامی که یک انتقال به تعداد دفعات زیاد تکرار شود، آیا سیستم به نقطه‌ی آغازین حرکتش نزدیک می‌شود؟

نظریه‌ی ارگودیک، بسیار عمیق‌تر از آن است که در این پروژه‌ی کوتاه بتوانیم تمامی مطالب آن‌را پوشش دهیم. در این زمینه کتاب‌های متعددی موجود است که برای آشنایی بیشتر با نظریه‌ی ارگودیک می‌توان به آن‌ها مراجعه کرد، به‌عنوان مثال مراجع [۷] و [۸] را ببینید.

هدف ما از بیان تعاریف و قضایای ارگودیک، فراهم کردن پیش‌نیازهایی است که بتوان قضیه‌ی زمردی را بررسی کرد.

۱.۱.۱ سیستم های دینامیکی

یک سیستم دینامیکی زوجی مانند (X,T) است که در آن، X یک مجموعه و $T : X \to X$ یک نگاشت است که معمولا به نگاشت انتقال، ارجاع داده می‌شود. در اینجا همواره فرض بر این‌است که نگاشت T، وارونپذیر است. برای هرعدد صحیح نامنفی n، نگاشت مکرر $T^n : X \to X$ به‌صورت

$$T^n x = \underbrace{T(T(\dots(T(x))))}_{n \text{ بار}}$$

تعریف می‌شود.

از آنجایی که نگاشت T وارونپذیر در نظر گرفته شده، پس می‌توان نگاشت T^{-1} را به‌عنوان وارون نگاشت T معرفی کرد و نیز نگاشت مکرر T^n را برای همه‌ی اعداد صحیح n، بیان نمود که برای عدد صحیح منفی n به‌صورت $T^n = (T^{-1})^{-n}$ معرفی شود.

مثال ۱.۱.۱. *در زیر چند مثال از سیستم‌های دینامیکی بیان شده است.*

الف) *(سیستم متناهی). اگر X یک مجموعه‌ی متناهی و نگاشت $T : X \to X$ یک جایگشت از مجموعه‌ی X باشد. پس (X,T) یک سیستم دینامیکی است.*

ب) *(عمل گروه). اگر گروه G روی مجموعه‌ی X اثر کند، آن‌گاه برای هر عضو گروه G مانند g یک سیستم دینامیکی مانند (X,T_g) تعریف می‌شود که $T_g x = gx$.*

ج) *(گروه چرخشی). اگر G یک گروه و $a \in G$ و نگاشت T به‌صورت $T(x) = ax$ تعریف شود، آن‌گاه زوج (G,T) یک سیستم دینامیکی است.*

د) *(سیستم‌های برنولی). اگر Ω یک مجموعه باشد و $\Omega^{\mathbb{Z}}$ مجموعه‌ی همه دنباله‌های با اندیس صحیح و Ω-مقدار فرض شود و نگاشت T نیز اپراتور انتقال به راست باشد یعنی تحت نگاشت T جمله‌ی x_n به جمله‌ی x_{n-1} منتقل شود، آن‌گاه زوج $(\Omega^{\mathbb{Z}},T)$ یک سیستم دینامیکی*

است.

ه) (سیستم‌های برنولی دودویی). به‌عنوان حالت خاص مثال قسمت قبل، اگر $2^{\mathbb{Z}}$ گردایه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های $\mathbb{Z}$ فرض شود و T نگاشت انتقال باشد که هر زیرمجموعه از $\mathbb{Z}$ مانند مجموعه‌ی A را به مجموعه‌ی $A+1$ انتقال دهد که $A+1=\{a+1, a\in A\}$ پس زوج $(2^{\mathbb{Z}},T)$ یک سیستم دینامیکی است.

تاکنون T^n به‌عنوان یک نگاشت که روی نقاط مجموعه‌ی X عمل می‌کند، در نظر گرفته شده است. اما با استفاده از این نماد و تأثیر آن بر مجموعه‌ی $E\subseteq X$ می‌توان تعریف کرد

$$T^nE:=\{T^nx : x\in E\}$$

و اگر f یک تابع روی مجموعه‌ی X باشد، آن‌گاه نگاشت T^nf به‌صورت $T^nf(x):=f(T^{-n}x)$ تعریف می‌شود و در بخش‌های بعد که اندازه‌ی μ روی مجموعه‌ی X تعریف می‌شود، نگاشت $T^n\mu$ به‌صورت $T^n\mu(E):=\mu(T^{-n}E)$ بیان می‌گردد. طبق قراردادهای علامت، تساوی‌های زیر برقرار است

$$T^n1_E=1_{T^nE} \qquad \text{و} \qquad T^n\delta_x=\delta_{T^nx}.$$

که تابع 1_E تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی $E\subset X$ و تابع δ_x، یک تابع اندازه است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_x(E)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

تا اینجا بدون اینکه ساختاری به سیستم‌های دینامیکی اضافه شود، مطلب زیادی درباره‌ی آن‌ها نمی‌توان گفت. اما نگاشت T درصورت وارونپذیری، یک جایگشت روی مجموعه‌ی X است بنابراین فضای

X را می‌توان به مدارهایی تجزیه کرد، هم در حالتی که X یک سیستم متناهی است و یا وقتی که به‌صورت یک سیستم نامتناهی تعریف شود. به منظور دست‌یابی به نتایج جالب‌تر ساختارهایی بر سیستم دینامیکی X وارد می‌شود. در اینجا دونوع سیستم دینامیکی سازمان‌بندی شده معرفی می‌شود، که در این پژوهش نوع دوم آن بیشتر مدنظر قرار گرفته است.

تعریف ۲.۱.۱. الف) (سیستم دینامیکی توپولوژیک). سیستم دینامیکی مانند (X,T)، یک سیستم دینامیکی توپولوژیک است هرگاه X فضای متریک فشرده و نگاشت $T : X \to X$ یک همانریختی باشد. (به‌این معنی که T، نگاشتی یک‌به‌یک و پوشا و پیوسته و دارای وارون پیوسته باشد.)

ب) (سیستم دینامیکی حافظ اندازه). سیستم دینامیکی به‌فرم $(X,\mathcal{B},\mu,T)$، یک سیستم دینامیکی حافظ اندازه نامیده می‌شود هرگاه فضای $(X,\mathcal{B},\mu)$ یک فضای احتمال باشد، که X یک فضای فشرده و $\mathcal{B}$، σ-جبر مجموعه‌های اندازه پذیر و μ یک اندازه‌ی احتمال است. در این سیستم نگاشت T یک یکریختی فضای احتمال است، یعنی نگاشت‌های T و T^{-1} اندازه‌پذیر و حافظ‌اندازه هستند.

حافظ‌اندازه بودن نگاشت T به معنی این است که برای هر مجموعه‌ی $E \subset \mathcal{B}$ و عدد $n \in \mathbb{Z}$، رابطه‌ی $\mu(T^n E) = \mu(E)$ برقرار باشد. در واقع، نظریه‌ی ارگودیک به مطالعه‌ی این‌گونه سیستم‌ها می‌پردازد.

در اثبات قضیه‌ی زمردی به‌طور جداگانه با سیستم‌های حافظ‌اندازه، که معمولا به اختصار فقط سیستم نامیده می‌شوند، سروکار داریم. تابع اندازه، نقش مهمی در این سیستم‌ها دارد. رابطه‌ی تساوی در توابع، به معنی تقریبا همه‌جا مساوی است. به‌عنوان مثال، وقتی‌که درباره‌ی توابع ثابت صحبت می‌شود منظور توابع تقریبا همه‌جا ثابت است.

مثال ۳.۱.۱. *در اینجا چند مثال از سیستم‌های حافظ‌اندازه بیان شده است. مجموعه‌های اندازه‌پذیر را می‌توان σ-جبر مجموعه‌های بورل انتخاب کرد. همچنین هریک از مثال‌های زیر یک سیستم دینامیک*

توپولوژیک نیز است.

الف) (سیستم متناهی). اگر مجموعه‌ی متناهی X با توپولوژی گسسته به همراه . اندازه‌ی شمارشی μ ، درنظر گرفته شود و نگاشت T یک جایگشت روی مجموعه‌ی X باشد آن‌گاه، $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک سیستم حافظ‌اندازه است.

ملاحظه ۴.۱.۱. در مثال قبل، درواقع تابع μ اندازه‌ی شمارشی است، اما برای اینکه اندازه‌ی احتمال باشد، برای مجموعه‌ی دلخواه $A_i \subset X$ ، $\mu(A_i)$ را به‌صورت $\mu(A_i) := \left|\frac{A_i}{X}\right|$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $\mu(X) = ۱$. بررسی مشخصات دیگر سیستم حافظ‌اندازه به‌راحتی امکان‌پذیر است.

ب) (سیستم چرخش دایره‌ای). اگر مجموعه‌ی X دایره‌ی واحد باشد، که با $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ نمایش داده می‌شود، همراه با اندازه‌ی استاندارد لبگ و نگاشت $T : X \to X$ با تعریف $Tx = x + a \ (mod ۱)$ که $a \in [۰, ۱)$ عدد ثابتی است، تشکیل سیستم حافظ‌اندازه می‌دهند.

ملاحظه ۵.۱.۱. در مثال (ب)، داریم

$$T(x) = x + a \quad (mod\ ۱) \iff T(x) = \begin{cases} x + a & ۰ \leq x + a \leq ۱ \\ x + a - ۱ & x + a > ۱ \end{cases}$$

که بنا بر تعریف بالا، T نگاشتی یک‌به‌یک و پوشا و پیوسته است.

اندازه‌ی μ باتعریف $\mu(A_i) = \frac{|A_i|}{۲\pi}$ ، یک اندازه‌ی احتمال است، که در اینجا A_i قوسی دلخواه روی دایره‌ی واحد است. از آنجایی که با چرخاندن قوس A_i در دایره طولش همواره ثابت می‌ماند. پس اندازه‌ی μ ، $T-$ پایاست.

ج) (سیستم کرونکر). گروه فشرده و متریک‌پذیر G با اندازه‌ی هار μ و نگاشت $Tx = ax$ که $a \in G$ و $X = G$ ، یک تشکیل یک سیستم حافظ‌اندازه می‌دهند.

ملاحظه ۶.۱.۱. اندازه‌ی هار به‌این صورت تعریف می‌شود که اگر G یک گروه موضعا فشرده باشد، آن‌گاه اندازه‌ی مثبت بورل λ موجود است که برای هر مجموعه‌ی باز ناتهی مانند $U \subseteq X$ ،

$\lambda(U) > 0$ و به‌علاوه

$$\lambda(gB) = \lambda(B) \qquad \forall B\ ,\ \forall g \in G\cdot$$

یعنی اندازه‌ی λ از چپ $T-$پایاست. به همین صورت می‌توان دید که λ، از راست نیز $T-$پایا است. درنتیجه λ، $T-$پایاست.

د) (سیستم‌های برنولی). اگر سیستم برنولی مثال (۱.۱.۱) قسمت (د)، با فرض متناهی بودن مجموعه‌ی Ω در نظر گرفته شود با تعریف اندازه‌ی حاصلضربی روی مجموعه‌ی $X = \Omega^{\mathbb{Z}}$، بنا بر قضیه‌ی تیخونوف[۱] فضای X فشرده است. همچنین با تعریف $d(x,y) = \dfrac{1}{|m|+1}$ برای $x \neq y \in \Omega^{\mathbb{Z}}$ به‌عنوان متریکی روی فضای X، که m اندیس کوچک‌ترین مقدار قدرمطلقی باشد که $x_m \neq y_m$ ، آن‌گاه سیستم $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ یک سیستم حافظ‌اندازه است که در آن $\mathcal{B}$، σ-جبر بورل است.

ملاحظه ۱.۱.۷. بنا بر تعریف، اندازه‌ی حاصلضربی اندازه‌ی منحصربفردی است که به مجموعه‌ی $A_1 \times A_2$، عدد $\mu(A_1 \times A_2)$ را نسبت می‌دهد ($A_i \subset X_i$ $i = 1,2$). به همین ترتیب اندازه‌ی حاصلضربی برای مجموعه‌های $A_i \subset X_i$ که $i = 1,2,\ldots,n$، به مجموعه‌ی $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ عدد منحصربفرد $\mu(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$ را نسبت می‌دهد.

اندازه‌ی حاصلضربی به حاصلضرب نامتناهی $\ldots \times A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times X_{n+1} \times X_{n+2}$ عدد یکتای $\mu(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$ را نسبت می‌دهد. درواقع به مجموعه‌های A_i، $i > n$ عدد $\mu(X_i)$ منسوب می‌شود (که $\mu(X_i) = 1$).

قضیه‌ی تیخونوف بیان می‌کند که حاصلضرب هر تعداد فضای فشرده، با توپولوژی حاصلضربی، فشرده است.

[۱] Tychonoff

۲.۱.۱ قضیه‌های مقدماتی بازگشت

در این بخش برخی نتایج بازگشت در سیستم‌های دینامیک، مطرح می‌شود. این نتایج تضمین می‌کند که یک سیستم دینامیکی همواره انتقال می‌یابد تا اینکه بعد از گذشت زمانی، در نقطه‌ای نزدیک به نقطه‌ی شروعش قرار بگیرد. بحث با سیستم‌های دینامیک توپولوژیک آغاز می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱. در یک سیستم دینامیکی توپولوژیک مانند (X, T)، نقطه‌ی $x \in X$ نقطه‌ی بازگشتی نامیده می‌شود هرگاه دنباله‌ای مانند $n_j \to \infty$ موجود باشد که $T^{n_j}x \to x$.

قضیه ۹.۱.۱. (*قضیه‌ی بازگشت بیرهوف*[۱]). *هر سیستم دینامیک توپولوژیک مانند* (X, T)، *دارای نقطه‌ی بازگشتی است.*

توجه شود که شرط فشردگی فضای X بسیار مهم است، زیرا مثلا در سیستم $(\mathbb{R}, x \to x + ۱)$ واضح است که خصوصیت بازگشتی وجود ندارد.

برای اثبات قضیه‌ی بیرهوف به مفهوم سیستم مینیمال نیاز است.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر (X, T) یک سیستم دینامیکی توپولوژیک باشد، یک زیرسیستم آن، سیستمی مانند (Y, T) است که Y، زیرمجموعه‌ی بسته‌ی T-پایای X باشد (T-پایا بودن مجموعه‌ی Y، بدین معنی است که $TY = Y$) و در این‌حالت عمل نگاشت T، به مجموعه‌ی Y محدود می‌شود.

همچنین یک سیستم دینامیک توپولوژیک، مینیمال است هرگاه $X \neq \emptyset$ و نیز تنها زیرسیستم‌های آن، X و $\emptyset$ باشند.

مثال ۱۱.۱.۱. *بار دیگر سیستم چرخش دایره‌ای* $X = (\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}, x \to x + \alpha)$ *را مورد توجه قرار می‌دهیم. اگر α عددی گویا باشد پس مدار یک نقطه، زیرمجموعه‌ای گسسته از فضای* $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ *است و بنابراین یک زیرسیستم X است. اما اگر α عددی گنگ باشد مدار هر نقطه، همواره در مجموعه‌ی X چگال است و بنابراین در این‌حالت، سیستم X مینیمال است. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که در حالتی که α عددی*

---

[۱] Birkhof

گنگ باشد، مجموعه‌ی انتقال‌های هر نقطه در فضای X چگال است.

ملاحظه ۱.۱.۱۲. *در توضیح مینیمال بودن سیستم X در مثال قبل، فرض کنید سیستم X، ناتهی باشد و نیز فرض کنید مجموعه‌ی انتقال‌های هر عدد در صورت گنگ بودن عدد α در فضای X چگال باشد. اکنون اگر $Y \neq \emptyset$ زیرسیستم دلخواهی از X باشد پس Y، $T-$پایا و بسته است.*

برای نقطه‌ی دلخواه $y_\circ \in Y$ داریم

$$Ty_\circ \in Y\ ,\ T(Ty_\circ) \in Y\ ,\ \ldots\ ,\ T^n y_\circ \in Y\cdot$$

پس Y در فضای X چگال است، یعنی $\overline{Y} = X$ و بنا بر بسته بودن فضای Y، داریم $Y = X$. پس سیستم X، مینیمال است.

مثال ۱.۱.۱۳. *برای هر سیستم (X, T) و هر عضو $x \in X$ بستار مدار نقطه‌ی x، یعنی مجموعه‌ی $\overline{\{T^n x\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}}$، همواره یک زیرسیستم X است.*

وجود زیرسیستم‌های مینیمال نتیجه‌ای از لم زورن است که در لم زیر به اثبات می‌رسد.

لم ۱.۱.۱۴. *هر سیستم دینامیکی توپولوژیک مانند (X, T)، شامل یک زیرسیستم مینیمال است.*

اثبات. اگر مجموعه‌ی $\{Y_\alpha\}$ گردایه‌ای از زیرسیستم‌های ناتهی و T-پایا همراه با ترتیب جزئي باشد، مجموعه‌ی جزئا مرتب S را با رابطه‌ی شمول درنظر بگیرید به‌طوری که

$$S = \{Y_\alpha \neq \emptyset\ ;\ \text{یک زیر سیستم } X \text{ باشد } Y_\alpha\}\cdot$$

پس هر زنجیر $\{Y_\beta\}_{\beta\in B}$ در مجموعه‌ی جزئامرتب $(S, \subseteq)$ دارای کران پایین $Y' = \bigcap_{\beta\in B} Y_\beta$ است. درواقع اولا $Y' \neq \emptyset$ زیرا از آنجایی که برای هر β داریم $Y_\beta \subset X$، پس $\{Y_\beta\}_{\beta\in B}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های فشرده است که دارای خاصیت اشتراک متناهی است درنتیجه $Y' = \bigcap_{\beta\in B} Y_\beta \neq \emptyset$.