بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

مروری بر ویژگی های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم

استاد راهنما:

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

الناز کریمیان

مهرماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش ریاضی

خانم الناز کریمیان

تحت عنوان

مروری بر ویژگی های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم

در تاریخ ۸۸/۷/۱۳ توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

۲ – استاد داور داخل گروه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء ۸۸-۷-۱۳

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر علی زینل همدانی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

امضای مدیر گروه

سپاسگزاری:

مراتب سپاس و امتنان خود را از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر مجید اسدی که در تدوین این پایـان نامـه مرا یاری نمودند، ابراز می دارم. از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر علی همدانی و جناب آقای دکتر محمد حسین علامت ساز که داوری این پایان نامه را پذیرفته و با پیشنهادات خود موجب ارتقـای آن گردیدنـد نیـز صـمیمانه تشکر می نمایم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تنها امید و تکیه گاه من پس از خداوند متعال

و به ویژه

مادرم

اسوه مادری دلسوز و فداکار

که زبان در سپاس از فداکاریش عاجز است.

و

تقدیم به

همسرم

نمونه همسری مهربان و صبور

چکیده:

موضوع این پایان نامه مروری بر ویژگی های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم است. سیستم های منسجم از متداولترین سیستم ها در مبحث قابلیت اعتماد می باشند که امروزه مطالعات بسیاری بر روی آنها صورت گرفته است. یکی از مطالعات اخیر در این زمینه بررسی ویژگی های آن با استفاده از بردار علامت است که در فصل دوم به آن پرداخته شده است. از دیگر سیستم ها در قابلیت اعتماد که ممکن است منسجم نباشند ولی در هر صورت می توان سیستم منسجم هم ارز آنها را به دست آورد، سیستم با مولفه های موزون است که در فصل سوم به آن پرداخته شده است.

سیستم های k از n شکست متوالی نیز یکی دیگر از سیستم های منسجم معروف هستند که در فصل چهارم این پایان‌نامه به طور مفصل مورد بررسی قرار گرفته اند.

کلیدواژه ها: سیستم k از n شکست متوالی، تابع نرخ خطر، تابع میانگین باقیمانده عمر، قابلیت اعتماد سیستم، سیستم با مولفه های وزن دار.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان | **صفحه**

عنوان **صفحه**

فهرست شکل ها

فهرست جدول ها

فصل اول

مقدمات و کلیات

مقدمه

مبحث قابلیت اعتماد یکی از مباحث علم آمار است که امروزه در بسیاری از عرصه های زندگی بشر مانند صنعت نقش بسیار مهمی را در جهت بهبود کیفیت ایفا می کند. از نیم قرن گذشته قابلیت اعتماد با کاربردهایی در زمینه های پزشکی و مهندسی مورد مطالعه قرار گرفته است.

قابلیت اعتماد از نقطه نظر آماری عبارت استِ از استفاده از فنون مختلف آماری در تحلیل متغیرهای نامنفی که نوعا نشانگر زمان شکست یک مولفه ی فیزیکی (مکانیکی یا الکتریکی) یا زمان مرگ یک واحد زنده (انسان، سلول، ...) است.

معیار موجود زنده (واحد زنده) در مبحث قابلیت اعتماد، داشتن طول عمر است. در این صورت، یک قطعه‌ی الکتریکی، یک سیستم متشکل از چندین قطعه و ... موجود زنده محسوب می شوند.

۱-۱ مفاهیم طول عمر

در بسیاری از موارد که با موجود زنده سروکار داریم علاقمندیم که از نقطه نظر احتمالی بررسی کنیم که در هر لحظه از زمان با چه احتمالی از زمان $t > 0$، بیشتر عمر می کند و یا هنگامیکه به یک موجود زنده وظیفه ای را محول می کنیم علاقمندیم قابلیت انجام چنین وظیفه ای را از نقطه نظر احتمالی اندازه گیری کنیم. این امر منجر به تعریف متغیر تصادفی T که بیانگر طول عمر یک موجود زنده است می شود (بدیهی است که T یک متغیر تصادفی نامنفی است که می تواند پیوسته یا گسسته باشد). در تئوری قابلیت اعتماد و آنالیز بقا به بررسی خواص این متغیر تصادفی می پردازند. برای مطالعه روی طول عمر، چندین شاخص در این مقوله مطرح می گردد که در این بین تابع قابلیت اعتماد، تابع نرخ مخاطره، تابع میانگین باقیمانده عمر و ... نقش مهمی ایفا می کنند.

در ادامه به تعریف شاخص های مذکور می پردازیم.

۱-۱-۱ تابع قابلیت اعتماد (تابع بقا)

فرض کنید متغیر تصادفی T نشانگر طول عمر یک موجود، پیوسته و دارای تابع توزیع $F(t)$ و تابع چگالی $f(t)$ باشد. آنگاه تابع قابلیت اعتماد آن به صورت زیر تعریف می شود.

$$\bar{F}(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(x)dx = 1 - F(t).$$

واضح است که تابع قابلیت اعتماد، تابعی غیر صعودی از t است. به عبارت دیگر با گذشت زمان قابلیت اعتماد موجودی با طول عمر T افزایش پیدا نمی کند.

۱-۱-۲ تابع نرخ مخاطره (تابع نرخ خطر)

تابع نرخ مخاطره یکی از معیارهای مهم و مورد توجه در مطالعات مربوط به طول عمر است. به صورت نه چندان دقیق تابع نرخ مخاطره عبارت است از احتمال اینکه فرد بر اثر یک حادثه در یک فاصله زمانی کوتاه از بین برود مشروط بر اینکه در ابتدای آن فاصله‌ی زمانی زنده بوده است. به عبارت دیگر تابع خطر نشان دهنده ی نرخ شکست موجود زنده در فاصله ی زمانی مشخص است مشروط بر اینکه تا قبل از آن از بین نرفته باشد. فرض کنید T متغیر تصادفی پیوسته طول عمر با تابع چگالی f و تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}$ باشد. تعریف دقیق تابع

مخاطره که آن را در سراسر این پایان نامه با $h(t)$ نمایش می دهیم، به صورت زیر است (بارلو[1] و پارشان[2] ((۱۹۸۱).

$$h(t)=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{P(t<T<t+\delta\,|\,T\geq t)}{\delta}=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}.$$

تابع نرخ مخاطره در حالت پیوسته مقادیر بزرگتر از یک را نیزمی تواند اختیار کند، پس یک احتمال نیست. از طرفی نمی تواند کوچکتر از صفر باشد و ممکن است در طول زمان ثابت بماند، افزایش یا کاهش پیدا کند و یا روند پیچیده تری به خود بگیرد.

تابع نرخ مخاطره، توزیع T را به طور منحصر بفرد مشخص می کند.

فرض کنید T یک متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع F و تابع نرخ مخاطره $h(t)$ باشد.

تعریف ۱-۱ گوییم توزیع F متعلق به کلاس توزیع های با نرخ مخاطره ی صعودی (IFR) (نزولی (DFR)) است هرگاه $h(t)$ تابع صعودی (نزولی) از t باشد($0<t$).

توزیعهای مختلفی در آمار وجود دارند که نرخ مخاطره ی آنها صعودی است. مثلا توزیع وایبل با پارامتر شکل بزرگتر از ۱. همچنین توزیع هایی وجود دارند که نرخ مخاطره ی آنها نزولی است مثلا توزیع های وایبل و گاما با پارامتر شکل کوچکتر از یک و یا توزیع آمیخته از دو توزیع نمایی.

۱-۱-۳ میانگین باقیمانده ی عمر

فرض کنید T نشان دهنده ی طول عمر یک موجود زنده باشد. اگر چنین موجودی در زمان t هنوز زنده باشد، آنگاه باقیمانده ی عمر شرطی آن عبارتست از

$$\left(T-t\,\middle|\,T>t\right),$$

که تابع قابلیت اعتماد آن برابر است با

---

[1] Barlow
[2] Proschan

$$\bar{F}\left(x \,\middle|\, t\right)=\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}, \qquad x>0, \quad t>0.$$

میانگین باقیمانده ی عمر T که یکی از معیار های مهم در مطالعات طول عمر است و آنرا با $m(t)$ نشان می دهیم به شکل زیر تعریف می شود.

$$m(t)=\mathrm{E}\left(T-t \,\middle|\, T>t\right).$$

$m(t)$ عبارت است از متوسط زمان باقیمانده طول عمر موجود، با فرض این که تا زمان t زنده بوده است. به راحتی می توان نشان داد به شرط $0<\bar{F}(t)$ داریم

$$m(t)=\int_0^{\infty} \bar{F}\left(x \,\middle|\, t\right)dx$$

$$=\frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)}.$$

همچنین می توان نشان داد در حالتی که متغیر تحت بررسی نامنفی است، رابطه‌ی زیر بین تابع بقا و میانگین باقیمانده ی عمر برقرار است.

$$\bar{F}(t)=\frac{m(0)}{m(t)}\exp\left\{-\int_0^t \frac{1}{m(x)}dx\right\}, \qquad t>0.$$

بنابراین تابع میانگین باقیمانده ی عمر، تابع توزیع F را مشخص می کند. براحتی رابطه ی بین $m(t)$ و $h(t)$ به صورت زیر به دست می آید.

$$h(t)=\frac{m'(t)+1}{m(t)}.$$

۲-۱ ترتیب تصادفی بر اساس معیارهای قابلیت اعتماد

در شاخه های مختلف آمار، روشهای متنوعی برای مقایسه‌ی دو جامعه ی آماری وجود دارد که در مبحث قابلیت اعتماد برای مقایسه‌ی دو متغیر تصادفی طول عمر از معیارهای قابلیت اعتماد مانند تابع قابلیت اعتماد، تابع نرخ مخاطره، میانگین باقیمانده‌ی طول عمر و ... استفاده می شود.

اینگونه مقایسه ها معمولاً یک ترتیب جزئی (تصادفی) است که برای جزئیات بیشتر در این مورد می توان به متون آماری در قابلیت اعتماد مانند بارلو و پروشان (۱۹۸۱) و شیکد[1] و شانتیکومار[2] (۲۰۰۷) مراجعه کرد. در ادامه به طور خلاصه چند ترتیب تصادفی را به طور اختصار معرفی و رابطه ی بین آنها را بررسی می کنیم.

فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی پیوسته ی طول عمر به ترتیب با توابع توزیع F_1 و F_2، توابع بقای $\bar{F}_1$ و $\bar{F}_2$، توابع نرخ مخاطره ی h_1 و h_2 و توابع میانگین باقیمانده ی عمر m_1 و m_2 باشند (تعاریف برای متغیر های تصادفی گسسته مشابه است).

تعریف ۱-۲ گوییم متغیر تصادفی T_1 به طور تصادفی کوچکتر از T_2 است و با علامت $T_1 \underset{st}{\leq} T_2$ نمایش می دهیم هرگاه به ازای هر $t>0$،

$$\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t).$$

تعریف ۱-۳ گوییم متغیر تصادفی T_1 در نرخ مخاطره کوچکتر از T_2 است و با علامت $T_1 \underset{hr}{\leq} T_2$ نمایش می دهیم هرگاه به ازای هر $t>0$،

$$h_1(t) \leq h_2(t).$$

به راحتی می توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای $T_1 \underset{hr}{\leq} T_2$ آن است که $\frac{\bar{F}_1(t)}{\bar{F}_2(t)}$ بر حسب t صعودی باشد.

نتیجه ۱-۱ اگر $T_1 \underset{hr}{\leq} T_2$ آنگاه $T_1 \underset{st}{\leq} T_2$.

تعریف ۱-۴ گوییم متغیر تصادفی T_1 در میانگین باقیمانده ی عمر کوچکتر از T_2 است و با علامت $T_1 \underset{mr}{\leq} T_2$ نمایش می دهیم هرگاه به ازای هر $t>0$،

---

[1] Shaked
[2] Shanthikumar

$$m_1(t) \le m_2(t).$$

شرط لازم و کافی برای اینکه $T_1 \underset{mr}{\le} T_2$ آن است که $\dfrac{\int_t^\infty \bar{F}_1(t)dx}{\int_t^\infty \bar{F}_2(t)dx}$ تابعی نزولی از t باشد.

نتیجه ۱-۲ اگر $T_1 \underset{hr}{\le} T_2$ آنگاه $T_1 \underset{mr}{\le} T_2$.

ترتیب برمبنای نسبت درستنمایی نیز از ترتیب های جزئی مهم است که در ادامه به تعریف آن می پردازیم.

تعریف ۱-۵ دو متغیر تصادفی T_1 و T_2 را با توابع چگالی f_1 و f_2 در نظر بگیرید. گوییم T_1 در نسبت درستنمایی کوچکتر از T_2 است و با علامت $T_1 \underset{lr}{\le} T_2$ نمایش می دهیم هرگاه نسبت $\dfrac{f_1}{f_2}$ بر روی اجتماع تکیه‌گاههای T_1 و T_2 نزولی باشد.

نتیجه ۱-۳ اگر $T_1 \underset{hr}{\le} T_2$ آنگاه $T_1 \underset{lr}{\le} T_2$.

برای جزئیات بیشتر به شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) مراجعه نمایید.

۱-۳ متغیرهای تصادفی وابسته

در بسیاری از مطالعات قابلیت اعتماد به ویژه در مبحث سیستم ها، متغیر های مورد بررسی وابسته هستند و استقلال ندارند.

برای مثال،

الف) معمولا مولفه ها در معرض تنش یکسان هستند.

ج) در مولفه هایی از سیستم که بار وارد شده بر سیستم را به طور مشترک تحمل می کنند شکست یک مولفه باعث افزایش بار بر دیگر مولفه ها می شود.

در هریک از دو حالت فوق مشاهده می شود که نوعی وابستگی بین مولفه ها وجود دارد. یعنی از بین رفتن (کار کردن) یک مولفه باعث افزایش احتمال از بین رفتن (کارکردن) دیگر مولفه ها می شود.

دو متغیر تصادفی T و S را در نظر بگیرید، طبیعی ترین معیار برای آنکه وابستگی آن دو را نشان دهد آنست که $Cov\,(T,S) \geq 0$. یک شرط قویتر آنست که برای هر تابع صعودی f و g داشته باشیم $Cov(f(T), g(S)) \geq 0$. حتی اگر $Cov\,(f\,(T,S), g\,(T,S)) \geq 0$، آنگاه یک معیار قویتر برای نشان دادن وابستگی بین دو متغیر را خواهیم داشت. تعمیم قویترین معیار یعنی سومین معیار به حالت چند متغیره، به عنوان تعریف وابستگی میان متغیر های تصادفی ارائه می شود.

تعریف ۱-۶ متغیر های تصادفی $T_1, \ldots, T_n$ را وابسته گوییم هرگاه

$$Cov\,(\mathrm{P}(\boldsymbol{T}), \Delta(\boldsymbol{T})) \geq 0,$$

برای تمام توابع دو مقداری و صعودی Δ و P، که در آن $\boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ است.

متغیرهای تصادفی وابسته در خواص چند متغیره زیر صدق می کنند.

- هر زیر مجموعه از متغیر ها ی وابسته ، وابسته اند.
- توابع صعودی از متغیر های تصادفی وابسته، وابسته اند.
- اگردو مجموعه از متغیر های وابسته از هم مستقل باشند آنگاه اجتماع آنها یک مجموعه از متغیرهای تصادفی وابسته خواهد بود.
- مجموعه ی متغیر های تصادفی مستقل، وابسته هستند.

۱-۴ سیستم های منسجم

یکی از مفاهیم مهم در قابلیت اعتماد، سیستم منسجم است که در این بخش به معرفی آن می پردازیم.

فرض کنید سیستمی از n قطعه تشکیل شده است. متغیر تصادفی دومقداری X_i، وضعیت هر قطعه را به صورت زیر نشان می دهد.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر قطعه ی } i \text{ام کار کند} \\ 0, & \text{اگر قطعه ی } i \text{ام کار نکند} \end{cases}$$

همچنین اگر وضعیت سیستم را با ϕ نمایش دهیم، واضح است که می توان ϕ را به صورت

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{اگر سیستم کار کند} \\ 0, & \text{اگر سیستم کار نکند} \end{cases}$$

تعریف کرد.

طبیعی است که وضعیت یک سیستم به وضعیت مولفه های آن وابسته است. لذا اگر $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ بردار وضعیت مولفه های یک سیستم را نشان دهد، آنگاه

$$\phi = \phi(\boldsymbol{x})$$

را تابع ساختار[1] سیستم گوییم و احتمال این که سیستم کار کند را قابلیت اعتماد سیستم گوییم و آن را با r نمایش می دهیم یا به عبارت دیگر

$$r = \mathrm{P}\{ \text{سیستم کار کند} \}$$

یا به طور معادل

$$r = \mathrm{P}\left\{ \phi\left(X_1,\ldots,X_n\right) = 1 \right\}$$

همانطور که گفتیم سیستم منسجم یکی از مفاهیم مهم در قابلیت اعتماد است که کاربرد وسیعی در طراحی‌های صنعتی دارد.

قبل از تعریف سیستم منسجم به معرفی مولفه ی مرتبط و نامرتبط می پردازیم. بدین منظور بردار های $(\cdot_i,\boldsymbol{x})$، $(0_i,\boldsymbol{x})$ و $(1_i,\boldsymbol{x})$ را تعریف می کنیم.

$$(1_i,\boldsymbol{x}) \equiv (x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$(0_i,\boldsymbol{x}) \equiv (x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$(\cdot_i,\boldsymbol{x}) \equiv (x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

[1] Structure function