دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

بررسی ویژگی های یک تابع طبیعی در کوهمولوژی موضعی

از:

فهیمه ممشلو

استاد راهنما:

دکتر احمد عباسی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم

به کسانی که زندگیم را معنی بخشیدند

به همسر عزیزم

و خانواده ی مهربانم

تقدیر وتشکر

الحمدلله رب العالمین

حمد و سپاس مخصوص پروردگار جهانیان است.

با تقدیر و تشکر فراوان از زحمات استاد محترم و بزرگوارم جناب آقای دکتر احمد عباسی که در طول این مدت همواره مرا یاری نموده اند.

همچنین از اساتید محترمی که داوری پایان نامه اینجانبه را بعهده گرفته اند کمال تقدیر و تشکر را دارم.

فهرست مطالب

فهرست عنوان

چکیده

بررسی ویژگی های یک تابع طبیعی در کوهمولوژی موضعی

فهیمه ممشلو

فرض می کنیم R یک حلقه ی نوتری و I یک ایده آل از R، M یک R مدول و n یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این پایان نامه اولاً ویژگی های متناهی از هسته و شبه هسته ی نگاشت طبیعی $f : Ext_R^n\left(\frac{R}{I}, M\right) \to Hom\left(\frac{R}{I}, H_I^n(M)\right)$ را مطالعه می کنیم، سپس بعضی شرایط را روی مدول های کوهمولوژی اخیر بررسی می کنیم.

آنگاه نتایجی در مورد ایده آل های اول وابسته و آرتینی بودن مدول های کوهمولوژی موضعی بدست خواهیم آورد و در قسمت آخر رفتارهای مجانبی هسته و شبه هسته از نگاشت طبیعی یاد شده را در شکل مدرج بررسی خواهیم نمود.

کلید واژه:

نگاشت طبیعی، مدول های کوهمولوژی موضعی، ایده آل های اولیه وابسته.

Abstract

A natural map in Local cohomology

Fahimeh mamashlo

Let R be a Noetherianrin ring , I an ideal of R , M an R- module and nonnegative integer. In this paper we first study the finiteness properties of the Kernel and the Cokernel of the natural map $f: Ext_R^n\left(\frac{R}{I}, M\right) \to Hom_R\left(\frac{R}{I}, H_I^n(M)\right)$, under some condition on the previous local cohomology modules . Then we collect some results about the associated primes and artiniancess of local cohomology modules . Finally we will study the assymptotic behavior of the Kernel and the Cokernel of the natural map in the graded case.

Key words:

Natural map, local cohomology modules, associated primes.

مقدمه

اصطلاحات علمی این پایان نامه از[4] گرفته شده است. هونیکه[1] در[14] چندین مساله ی مهم در مورد مدول کوهمولوژی موضعی $H_I^n(M)$ وقتی M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد، مطرح و فرمول بندی کرده است. بعنوان مثال چه زمانی مجموعه ی ایده آل های اول وابسته آن متناهی است و یا چه زمانی آرتینی هستند.

گروتندیک[2] در [12] حدسی را به صورت زیر بیان نموده است.

حدس: برای هر ایده آل $I \subseteq R$ و هر $R-$ مدول متناهی مولد M و برای $n \geq 0$ مدول $Hom_R\left(\frac{R}{I}, H_I^n(M)\right)$ متناهی مولد است.

حدس گروتندیگ در حالت کلی درست نبود. هارت شورن[3] در [13] نشان داد که تحت بعضی از شرایط و برای بعضی از مقادیر n، مدول $Hom_R\left(\frac{R}{I}, H_I^n(M)\right)$ متناهی مولد است.

وقتی I یک ایده آل ماکزیمال روی حلقه ی موضعی R باشد حدس بالا جانشینی برای آرتینی بودن مدول $H_I^n(M)$ است. بعلاوه متناهی مولد بودن مدول $Hom_R\left(\frac{R}{I}, H_I^n(M)\right)$، متناهی بودن مجموعه ی ایده آل های اول وابسته $H_I^n(M)$ را نتیجه

می دهد.

در این پایان نامه سعی شده است که با بیان تعاریف و قضایایی مهم در فصل اول به بررسی قضایا و نتایج [1] بپردازیم.

در فصل دوم قضیه ای در رسته های آبلی بیان واثبات می گردد. همچنین قضیه ای بیان می شود که نشان می دهد تحت شرایطی معین هسته و شبه هسته ی یک نگاشت طبیعی بین دو دنباله ی مرتبط از تابع گون ها به زیر رسته ی سر S از رسته ی R - مدول ها تعلق دارند.

درفصل سوم به مطالعه ی ویژگی های متناهی از هسته و شبه هسته ی نگاشت طبیعی

$$f : Ext_R^n\left(\frac{R}{I}, M\right) \to Hom_R\left(\frac{R}{I}, H_I^n(M)\right)$$

می پردازیم. شرایطی را روی $Kerf$ و $Co\ker f$ بدست می آوریم که به زیر رسته ی سر S از رسته $R-$ مدول ها تعلق داشته باشند.

---

۱ Huneke
۲ Grothendiek
۳ Hartshorn

یکی از نتایج اصلی این پایان نامه ی این است که:

الف: اگر برای همه ی $j < n$ ، $Ext_R^{n-j}\left(\frac{R}{I}, H_I^j(M)\right) = 0$ باشد، آنگاه f یک به یک است.

ب: اگر برای همه ی $j < n$ ، $Ext_R^{n+1-j}\left(\frac{R}{I}, H_I^j(M)\right) = 0$ آنگاه f پوشاست.

ج: اگر برای همه ی $j < n$ و $t = n, n+1$ ، $Ext_R^{t-j}\left(\frac{R}{I}, H_I^j(M)\right) = 0$ باشد، آنگاه f یکریختی است.

در بخش آخر رفتار مجانبی هسته و شبه هسته ی نگاشت طبیعی بالا را در نمونه ی مدرج مطالعه خواهیم کرد.

فصل ۱

پیش نیازها و مطالب مورد نیاز

۱.۱پیش گفتار

در این پایان نامه R را یک حلقه نوتری جابجایی غیر صفر و $SpecR$ را مجموعه تمام ایده آل های اول حلقه R در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض می کنیم I یک ایده آل از حلقه R باشد. در این صورت واریته I را چنین تعریف می کنیم

$$V(I)=\{p\in SpecR \mid I\subseteq p\}.$$

تعریف ۲.۱.۱ زیر مجموعه S از حلقه R را زیر مجموعه ی بسته ی ضربی می نامیم هر گاه اولاً $1\in S$ باشد ثانیاً به ازای هر $s_1, s_2 \in S$ داشته باشیم $s_1s_2 \in S$.

اگر M یک $R-$ مدول باشد و $P\in SpecR$،آنگاه به آسانی دیده می شود که $S=R-P$ یک مجموعه ضربی بسته است. در این حالت مدول کسرهای $S^{-1}M$ را با M_P نشان می دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض می کنیم L و N زیر مدول هایی از $R-$ مدول M باشند. در این صورت

۱) $(N:_R L)=\{r\in R \mid \forall a\in L, ra\in N\}$.

۲) $Ann_R(I)=\{x\in M \mid \forall r\in I, rx=0\}$.

۳) $Ann_R(M)=\{r\in R \mid \forall x\in M, rx=0\}$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض می کنیم M یک $R-$ مدول باشد. $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Ass_R(M)=\{p\in SpecR \mid \exists 0\neq x\in M \ \ s.t \ \ Ann_R(x)=p\}$$

و

$$Supp_R(M)=\{P\in SpecR \mid M_P\neq 0\}.$$

به راحتی ثابت می شود که

$$Supp_R(M)=\{p\in SpecR \mid \exists 0\neq x\in M \ \ s.t \ \ Ann_R(x)\subseteq p\}.$$

$Ass_R(M)$ را مجموعه ی ایده آل های اول وابسته به M و $Supp_R(M)$ را تکیه گاه M می نامیم.

لم ۵.۱.۱ فرض می کنیم M، R - مدول متناهی مولد باشد. در این صورت

$$Supp_R(M)=\{p\in SpecR \mid Ann_R(M)\subseteq p\}=V(Ann_R(M)).$$

اثبات: رجوع شود به لم ۲۰.۹ از مرجع [۲۰]. ■

نکته ۶.۱.۱ برای هر ایده آل I از حلقه ی R همواره داریم $Supp_R\left(\frac{R}{I}\right)=V(I)$.

اثبات: با توجه به اینکه $\frac{R}{I}$ یک $R-$ مدول متناهی مولد می باشد لذا بنا به لم قبل داریم:

$$Supp_R\left(\frac{R}{I}\right)=\{p\in SpecR \mid I\subseteq p\}=V(I).$$

■

لم ۷.۱.۱ فرض می کنیم M یک $R-$ مدول روی حلقه جابجایی و نوتری R باشد. در این صورت $Ass_R(M)\neq\phi$ اگر و تنها اگر $M\neq 0$.

اثبات: ر جوع شود به نتیجه ۳۵.۹ از مرجع[۲۰] . ■

قضیه ۸.۱.۱ فرض می کنیم R حلقه ی نوتری و M یک R - مدول متناهی مولد باشد. در این صورت $Ass_R(M)$ مجموعه ای متناهی است.

اثبات: رجوع شود به گزاره G.7 از مرجع[۱۵] . ■

قضیه ۹.۱.۱ اگر $0 \to L \to M \to N \to 0$ یک دنباله دقیق از R–مدول ها باشد در این صورت

$$Ass_R(L) \subseteq Ass_R(M) \subseteq Ass_R(L) \cup Ass_R(N).$$

اثبات: رجوع شود به گزار F.7 از مرجع [۱۵] . ■

نکته ۱۰.۱.۱ اگر $M \cong N$ آنگاه $Ass_R(M) = Ass_R(N)$.

نکته ۱۱.۱.۱ اگر $0 \to L \to M \to N \to 0$ دنباله ای دقیق از $R-$مدول ها باشد، در این صورت

$$Supp_R(M) = Supp_R(L) \cup Supp_R(N).$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض می کنیم M یک $R-$مدول باشد. مقسوم علیه صفر R–مدول M به صورت زیر تعریف می شود و آن را با $Zd_R(M)$ نشان می دهیم.

$$Zd_R(M) = \{r \in R \mid \exists 0 \neq m \in M \ \ s.t \ \ rm = 0\}.$$

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض می کنیم M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد. دنباله ی $x_1 \ldots\ldots x_n$ از اعضای R را یک $M-$دنباله گوییم هر گاه

الف) $M \neq < x_1 \ldots\ldots x_n > M$

ب) برای هر $i = 1, \cdots\cdots, n$، x_i یک مقسوم علیه صفر از R–مدول $\dfrac{M}{< x_1 \ldots\ldots x_{i-1} > M}$ نباشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض می کنیم M یک $R-$مدول و I یک ایده آل از R باشد. درجه I نسبت به M را به صورت زیر تعریف کرده و با $grad_M(I)$ نشان می دهیم.

$$grad_M(I) = sup \{r \in N \mid \text{یک } M- \text{ دنباله به طول } r \text{ در } I \text{ وجود داشته باشد.}\}.$$

نکته ۱۵.۱.۱

الف) $grad_M(I)=0$ اگر و فقط اگر $I \subseteq Zd_R(M)$.

ب) اگر $M=0$ آنگاه $grad_M(I)=\infty$.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض می کنیم R یک حلقه ی نوتری و M یک $R-$مدول غیر صفر باشد. بعد M را با $dim_R(M)$ نشان داده و آنرا به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$dim_R M = sup\{n \in N_0 \ \ s.t \ \exists \ p_0, p_1, \dots p_n \in Supp_R(M) \ , \ P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_n\}.$$

یعنی سوپریمم طول تمام زنجیرهای از ایده آل های اول متعلق به $Supp_R(M)$. اگر سوپریمم فوق وجود نداشته باشد $dim_R(M)$ را ∞ تعریف می کنیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض می کنیم R یک حلقه ی موضعی نوتری با ایده آل ماکزیمال M باشد. در این صورت

$$dim R = Sup\{n \in N_0 \ \ s.t \ \exists p_0, p_1 \dots p_n \in Spec R, p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_n\}.$$

قضیه ۱۸.۱.۱ اگر M یک R- مدول متناهی مولد باشد در این صورت $dim_R(M) = dim\dfrac{R}{(0:_R M)}$.

اثبات: فرض می کنیم $p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_n$ یک زنجیر از ایده آلهای اول $Supp_R(M)$ باشد. چون M متناهی مولد است پس $Supp_R(M)=V((0:_R M))$. بنابراین $p_0, \dots\dots, p_n \in Supp_R(M)=V((0:_R M))$، پس $(0:_R M)$ مشمول در هر یک از ایده آلهای $p_0, p_1, \dots p_n$ است. این نتیجه می دهد که

$$\frac{p_0}{(0:_R M)} \subset \frac{p_1}{(0:_R M)} \subset \dots \subset \frac{p_n}{(0:_R M)}$$

که این یک زنجیر از ایده آلهای اول حلقه $\dfrac{R}{(0:_R M)}$ است. این نشان می دهد که

$$dim_R M \le dim\frac{R}{(0:_R M)} \qquad (*)$$

برعکس: فرض می کنیم $\dfrac{p_0}{(0:_R M)} \subset \dfrac{p_1}{(0:_R M)} \subset \dots \subset \dfrac{p_k}{(0:_R M)}$ یک زنجیر از ایده آلهای اول $\dfrac{R}{(0:_R M)}$ باشد.

چون M متناهی مولد است پس طبق تعریف $Supp_R(M)=\{p\in SpecR \mid (0:_R M)\subset p\}$،

$p_0,p_1,\dots,p_k\in Supp_R(M)$ خواهد بود.پس $p_0\subset p_1\subset\dots\subset p_k$ یک زنجیر از ایده آلهای اول در $Supp_R(M)$

می باشد. این نشان می دهد که

$$dim\frac{R}{(0:_R M)}\le dim_R M \qquad (**).$$

از $(*)$ و $(**)$ حکم اثبات می شود.

تعریف ۱۹.۱.۱ مجموعه جزئی مرتب $(D,\le)$ را جهت دار یا مستقیم می نامیم هر گاه برای هر $i,j\in D$، یک $k\in D$ یافت شود به طوریکه $k\ge i$ و $k\ge j$.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض می کنیم $(D,\le)$ یک مجموعه جزئی مرتب باشد. گردایه $\{M_i\}_{i\in D}$ از R– مدول ها به همراه خانواده R– همریختی های $\{\mu_{ji}:M_i\to M_j\}_{i\le j}$ یک دستگاه مستقیم نامیده می شود هر گاه دو شرط زیر بر قرار باشد:

۱) به ازای هر $i\in D$، μ_{ii} نگاشت همانی روی M_i باشد.
۲) برای هر $i,j,k\in D$ با شرط $i\le j\le k$ داشته باشیم $\mu_{ki}=\mu_{kj}o\mu_{ji}$.

دستگاه مستقیم فوق را با $\{M_i,\mu_{ji}\}_{i,j\in D}$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض می کنیم $\{M_i,\mu_{ji}\}_{i,j\notin D}$ یک دستگاه مستقیم روی مجموعه جزئی مرتب D باشد. حد مستقیم این دستگاه با $\lim\limits_{\overrightarrow{i\in D}} M_i$ نشان داده می شود برابر است با R– مدول M همراه با خانواده R– همریختی های $\{\mu_i:M_i\to M\}_{i\in D}$ به طوریکه برای هر $i,j\in D$ که $i<j$، $\mu_j o\mu_{ji}=\mu_i$ و برای هر خانواده دیگری چون $\{N,\{h_i\}_{i\in D}\}$ که دارای خاصیت فوق باشند، یعنی برای $i<j$، داشته باشیم $h_j\mu_{ji}=h_i$ همریختی یکتایی چون $f:M\to N$ موجود است که برای هر $i\in N$، $f\mu_i=h_i$.

نکته ۲۲.۱.۱ فرض می کنیم $f:M\to N$ و $g:N\to H$، همریختی R– مدول ها باشند. در این صورت

$$Ker(gf)=f^{-1}(Kerg) \text{ و } \mathrm{Im}(gf)=g\,\mathrm{Im}(f)$$

۲.۱ رسته ی آبلی

تعریف ۱.۲.۱ فرض می کنیم C یک رسته و $\{A_i \mid i \in I\}$ خانواده ای از اشیاء رسته ی C باشد. شی P در C با خانواده ی ریخت های $\{\pi_i : P \to A_i\}$ را یک ضرب در C می نامیم، هر گاه به ازای هر شی B و هر خانواده از ریخت های $\{f_i : B \to A_i \mid i \in I\}$ ریخت یکتای $f : B \to P$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $i \in I$ داشته باشیم، $\pi_i o f = f_i$.

به طور معمول، ضرب خانواده ی $\{A_i \mid i \in I\}$ را با $\Pi_{i\in I} A_i$ نشان دهیم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض می کنیم C یک رسته و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از نا تهی از اشیاء رسته ی C باشند. شی S از C را یک هم ضرب (جمع) برای خانواده ی $\{A_i\}_{i\in I}$ می خوانیم، هر گاه خانواده ی ریخت های $\{\sigma_i : A_i \to S\}$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر شی B از C و هر خانواده از ریخت های $\{f_i : A_i \to B \mid i \in I\}$ ریخت یکتای $f : S \to B$ وجود داشته باشد به طوریکه $fo\sigma_i = f_i$. گاهی S را با $\{S, \sigma_i\}_{i\in I}$ نشان می دهیم.

تعریف ۳.۲.۱ شی I از رسته ی C را یک شی آغازین می خوانیم هر گاه به ازای هر شی A از C یک و تنها یک ریخت به صورت $I \to A$ وجود داشته باشد. شی T از رسته ی C را یک شی پایانی می نامیم، اگر به ازای هر شی A یک و تنها یک ریخت به صورت $A \to T$ وجود داشته باشد.

تعریف ۴.۲.۱ رسته ی C جمعی است اگر

آ: برای هر شی B, A از رسته ی C، $Hom(A,B)$ گروه آبلی باشد.

ب: قوانین توزیع پذیری برقرار باشد یعنی اگر داشته باشیم $X \xrightarrow{a} A \xrightarrow{f,g} B \xrightarrow{b} Y$ آنگاه
$(f+g)a = fa + ga$ و $b(f+g) = bf + bg$

ج: رسته ی C شی صفر داشته باشد (شی صفر شیی است که هم عضو ابتدا و هم عضو انتها باشد).

د: برای هر خانواده متناهی در رسته ی C ضرب و هم ضرب وجود داشته باشد.

تعریف ۵.۲.۱ فرض می کنیم C و D رسته های جمعی باشند. تابع گون $T : C \to D$ جمعی است اگر به ازای اشیاء B, A از رسته ی C و ریخت های $f, g \in Hom(A,B)$، داشته باشیم

$$T(f+g) = T(f) + T(g).$$

نکته۶.۲.۱ اگر $T : C \to D$ تابع گون جمعی باشد آنگاه $T(0)=0$ که صفر هم می تواند شی صفر باشد و هم می تواند ریخت صفر باشد.

تعریف ۷.۲.۱ ریخت $f : B \to D$ در رسته ی جمعی C تکریختی است اگر f از سمت چپ حذف شود. یعنی اگر برای هر شی A و ریخت های $g, h : A \to B$ داشته باشیم $fh = fg$ آنگاه $h = g$.

نکته ۸.۲.۱ ریخت $f : B \to D$ در رسته ی جمعی C تکریختی است اگر و تنها اگر به ازای هر شی A نگاشت القایی

$$f_* : Hom(A,B) \to Hom(A,C)$$

یک به یک باشد.

نکته ۹.۲.۱ ریخت $f : B \to D$ در رسته ی جمعی C تکریختی است اگر و تنها اگر به ازای هر ریخت g، اگر $fg = 0$ آنگاه $g = 0$.

تعریف ۱۰.۲.۱ ریخت $t : B \to D$ در رسته ی جمعی C برویختی است اگر t از سمت راست حذف شود. یعنی به ازای هر شی F و ریخت های $k, \eta : D \to F$ اگر داشته باشیم $kt = \eta t$ آنگاه $k = \eta$.

نکته ۱۱.۲.۱ ریخت $t : B \to D$ برویختی است اگر و تنها اگر به ازای هر شی D نگاشت القایی

$$t^* : Hom(C,D) \to Hom(B,D)$$

یک به یک باشد.

نکته ۱۲.۲.۱ ریخت $t : B \to D$ در رسته ی جمعی C برویختی است اگر و تنها اگر به ازای ریخت k اگر داشته باشیم $kt = 0$ آنگاه $k = 0$.

نکته ۱۳.۲.۱ در رسته های جمعی یک نگاشت که هم برویختی و هم تکریختی است یکریختی می باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱ اگر $f : A \to B$ یک ریخت در رسته ی جمعی C باشد، آنگاه هسته ی این ریخت، یک ریخت به صورت $i : k \to A$ است به طوریکه در شرایط زیر صدق کند:

i) $fi = 0$.

ii) به ازای یک ریخت $g : X \to A$ که $fg = 0$ ریخت منحصر به فرد $\theta : X \to k$ وجود داشته باشد به طوریکه $i\theta = g$.

تعریف ۱۵.۲.۱ اگر $f : A \to B$ یک ریخت در رسته ی جمعی C باشد، آنگاه شبه هسته ی این ریخت، یک ریخت به صورت $\pi : B \to C$ است به طوریکه در شرایط زیر صدق می کند:

i) $\pi f = 0$.

ii) به ازای یک ریخت $g : B \to Y$ که $gf = 0$ ریخت منحصر به فرد $\theta : C \to Y$ وجود داشته باشد به طوریکه $\theta\pi = g$.

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض می کنیم $f : A \to B$ یک ریخت در رسته ی جمعی C باشد.

۱) اگر هسته ی ریخت f وجود داشته باشد، f تکریختی است اگر و تنها اگر $Kerf = 0$.

۲) اگر شبه هسته ی ریخت f وجود داشته باشد، f برویختی است اگر و تنها اگر $Co\ker f = 0$.

اثبات :

۱) فرض می کنیم $i : k \to A$ هسته ی ریخت $f : A \to B$ باشد و $i = Kerf = 0$ باشد. در این صورت طبق تعریف هسته اگر $g : X \to A$ یک ریخت در رسته ی جمعی C باشد به طوریکه $gof = 0$، آنگاه ریخت منحصر به فرد $\theta : X \to k$ وجود دارد به طوریکه $g = i\theta$. طبق فرض $i = Kerf = 0$ پس $i\theta = g = 0$. طبق تعریف هسته $fi = 0$ است.چون $i = 0$ است پس طبق نکته ۹.۲.۱، f تکریختی است.

برعکس: فرض می کنیم $f : A \to B$ تکریختی باشد. و $i : k \to A$ هسته f باشد. نمودار $k \xrightarrow{i,0} A \xrightarrow{f} B$ را در نظر می گیریم. در این صورت طبق تعریف ۷.۲۱ داریم $fi = f0$. چون f تکریختی است خواهیم داشت $i = 0$ یعنی $i = Kerf = 0$.

اثبات ۲) دوگان قسمت (۱) است. ■

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض می کنیم B یک شی در رسته ی جمعی C باشد. تمام زوج های (A, f) که $f : A \to B$ تکریختی است را در نظر می گیریم. در این صورت A یک زیر شی از B نامیده می شود. دو زوج (A, f) و (A', f') هم ارزند، اگر یکریختی $g : A' \to A$ وجود داشته باشد به طوریکه $f' = fg$.

تعریف ۱۸.۲.۱ فرض می کنیم B یک شی در رسته ی جمعی C باشد. تمام زوج های (f, C) که $f : B \to C$ بروریختی است را در نظر می گیریم. دو زوج (f, C) و (f', C') هم ارزند، اگر یکریختی $g : C \to C'$ وجود داشته باشد به طوریکه $f' = gf$.

نکته۱۹.۲.۱ رده ی هم ارزی $[(f, C)]$ یک خارج قسمت از B نامیده می شود. همچنین C شی خارج قسمتی از B است.

مثال ۲۰.۲.۱ شبه هسته ی هر همریختی یک شی خارج قسمتی است.

تعریف ۲۱.۲.۱ رسته ی جمعی C آبلی است اگر

i) هر ریخت در آن هسته و شبه هسته داشته باشد.

ii) هر تکریختی یک هسته و هر برووریختی، یک شبه هسته باشد.

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض می کنیم $f : A \to B$ یک ریخت در رسته ی آبلی C باشد. همچنین فرض می کنیم برای بعضی اشیاء D، $Co\ker f = \zeta : B \to D$ باشد آنگاه $\operatorname{Im} f = Ker(Co\ker f)$.

تعریف ۲۳.۲.۱ دنباله ی $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} D$ در رسته ی آبلی C دقیق نامیده می شود، اگر تساوی $Kerg = \operatorname{Im} f$ از زیر شی ها برقرار باشد.

نکته ۲۴.۲.۱ دنباله ی $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} D$ در رسته ی آبلی C دقیق است اگر تنها اگر $(A \to B \to C) = 0$ و $(Kerh \to B \to Co\ker f) = 0$.

تعریف ۲۵.۲.۱ شی p در رسته ی آبلی C پروژکتیو نامیده می شود، اگر برای هر برووریختی $g : B \to C$ و هر ریخت $f : p \to C$، یک ریخت به صورت $h : p \to B$ وجود داشته باشد به طوریکه $f = gh$.

تعریف ۲۶.۲.۱ شی E در رسته ی آبلی C انژکتیو نامیده می شود، اگر برای هر تکریختی $g : A \to B$ و هر ریخت $f : A \to E$، یک ریخت به صورت $h : B \to E$ وجود داشته باشد به طوریکه $f = hg$.

تعریف ۲۷.۲.۱ رسته ی آبلی C انژکتیو کافی نامیده می شود، اگر برای هر شی A از رسته ی آبلی C، شی انژکتیو E و تکریختی $f : A \to E$ وجود داشته باشد.

تعریف ۲۸.۲.۱ رسته ی آبلی C پروژکتیو کافی نامیده می شود، اگر برای هر شی A از رسته ی آبلی C، شی پروژکتیو p و بروریختی $f : p \to A$ وجود داشته باشد.

تعریف ۲۹.۲.۱ فرض می کنیم $f : A \to B$ یک ریخت در رسته ی آبلی C باشد. هم نگاره ی f شی خارج قسمتی از A مانند C است، به طوریکه بروریختی $g : A \to C$ و ریخت $h : C \to B$ وجود دارد که $f = hog$.

هم نگاره ی f را با $Coimf$ نشان می دهیم.

قضیه ۳۰.۲.۱ در رسته های آبلی $Coim(A \to B) = Co\ker(Ker(A \to B))$.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۲-۱۶ از مرجع [۱۹]. ■

نکته ۳۱.۲.۱ در رسته های آبلی

۱) ریخت $A \to B$ تکریختی است اگر $Coim(A \to B) = A$.
۲) ریخت $A \to B$ بروریختی است اگر $\mathrm{Im}(A \to B) = B$.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۲-17 و۲-* 17 از مرجع [۱۹]. ■

لم ۳۲.۲.۱ فرض می کنیم $A \to I'$ هم نگاره $A \to B$ باشد و $A \to I' \to B$ را در نظر می گیریم. در رسته های آبلی $I' \to B$ یک تکریختی است.

اثبات: رجوع شود به قضیه ۲-۱۸ از مرجع [۱۸]. ■

قضیه ۳۳.۲.۱ (تجزیه منحصر به فرد)

اگر $A \to B = A \to I \to B$ که $A \to I$ بروریختی و $I \to B$ تکریختی باشد آنگاه $A \to I$ هم نگاره ی $A \to B$ و $I \to B$ نگاره ی $A \to B$ است و اگر $A \to \bar{I} \to B$ تجزیه ی دیگری باشد که $A \to \bar{I}$ بروریختی و $\bar{I} \to B$ تکریختی باشد آنگاه یکریختی منحصر به فرد $I \to \bar{I}$ وجود دارد که نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & B \\ & \bar{I} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$