بسم الله الرحمن الرحیم

باسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب سعید نصیری فر متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

سعید نصیری فر

تهران– لویزان– کدپستی ۱۶۷۸۸– صندوق پستی ۱۶۳–۱۶۷۸۵ تلفن ۹–۲۲۹۷۰۰۶۰ (داخلی ۲۳۴۷) نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱ پست الکترونیکی sru@sru.ac.ir

دانشکده‌ی علوم پایه

جابجایی حلقه‌های نیم پریودیک و تعمیم حلقه‌های بولی

نگارش

سعید نصیری فر

استاد راهنما

دکتر علی زعیم باشی تاج‌آبادی

استاد مشاور

دکتر حمیدرضا میمنی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض

شهریور ماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

با سپاس فراوان از خداوند بی‌همتا که هر چه دارم از لطف و کرم اوست. اکنون که به حول و قوه الهی توانستم مرحله‌ای از مراحل تحصیل خود را پشت سر بگذارم جای آن دارد که از زحمات بی‌دریغ مربیان، معلمان و استادانی که در طول زندگیم به من کمک کرده‌اند تشکر و قدردانی نمایم. در ابتدا بر خود لازم می دانم از زحمات و راهنمایی‌های محققانه و دوستانه استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر علی زعیم‌باشی سپاسگزاری نمایم که تجربیات با ارزش خود را صادقانه در اختیارم نهاد. همچنین از استاد محترم مشاور جناب آقای دکتر حمید رضا میمنی که با مطالعه دقیق پایان‌نامه و با راهنمایی‌های داهیانه خود این حقیر را مستفیض نمودند و نیز از اساتید بزرگوار جناب آقای دکترمجتبی قربانی و آقای دکترعلیرضا اشرفی که داوری این پایان نامه را پذیرفتند تشکر و سپاسگزاری می‌نمایم.

پس از آن سپاس بی‌پایانم را نثار پدر و مادر دلسوز و مهربانم می‌نمایم که در تمام دوران تحصیل و زندگیم از هیچ کوششی درجهت رفاه و موفقیت بنده دریغ نکردند.

من این پایان‌نامه را تقدیم به تمام کسانی می‌کنم که در امر پیشرفت و ترقی علم، کوشش و فداکاری می‌کنند.

چکیده

در این پایان‌نامه هدف اصلی ما مطالعه و بررسی خاصیت جابجایی در حلقه‌های زیربولی و حلقه‌های نیم‌پریودیک است.

این پایان‌نامه از سه فصل تشکیل شده است که در فصل اول، به تعاریف، لم‌ها و قضایایی که در سایر فصل‌ها به آن‌ها نیاز داریم می‌پردازیم. در فصل دوم، حلقه زیربولی را تعریف می‌کنیم و با بیان و اثبات قضایایی به بررسی خاصیت جابجایی در حلقه‌های زیربولی می‌پردازیم و در پایان این فصل با بیان چند مثال نشان می‌دهیم که حلقه زیربولی لزوماً بولی یا حتی جابجایی نیست و همچنین تعریف حلقه زیر بولی در قضایای بیان شده یک شرط اساسی است. در فصل سوم، حلقه نیم‌پریودیک را تعریف می‌کنیم و با بیان و اثبات قضایایی به بررسی خاصیت جابجایی در حلقه‌های نیم‌پریودیک می‌پردازیم. در این فصل قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد حلقه نیم‌پریودیک و یکدار R جابجایی است یا پریودیک است و $(R,+)$ یک ۲ ـ گروه می‌باشد و در پایان این فصل مثال‌هایی از حلقه‌های نیم‌پریودیک و یکدار غیر جابجایی ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم که R پریودیک است و $(R,+)$ یک ۲ ـ گروه می‌باشد. در ضمن این قضیه در اثبات دو قضیه پایانی این فصل نیز مفید می‌باشد.

کلمات کلیدی: حلقه زیربولی، رادیکال ژاکوبسون، جابجایی، حلقه نیم‌پریودیک، حلقه پریودیک، حاصل جمع زیرمستقیم، حلقه به طور زیرمستقیم تحویل ناپذیر، ایده‌آل جابجاگر، شرط شاکرون.

فهرست مطالب

فهرست علائم و اختصارات

ایده‌آل پوچ ساز B .... $a(B)$

ایده‌آل جابجاگر حلقه R .... $C(R)$

رادیکال ژاکوبسون .... $J(R)$

مجموعه عناصر پوچ توان .... $N(R)$

مرکز حلقه .... $Z(R)$

مجموعه اعداد صحیح .... $\mathbb{Z}$

مجموعه اعداد صحیح به پیمانه m .... $\mathbb{Z}_m$

حلقه چند جمله‌ای‌ها روی $\mathbb{Z}$ .... $\mathbb{Z}[x]$

حلقه ماتریس‌های $n \times n$ روی R .... $Mat_n R$

زیرگروه دوری تولید شده به وسیله x .... $< x >$

حاصل‌جمع مستقیم گروه‌های جمعی G و H .... $G \bigoplus H$

پیش گفتار

فرض کنید R یک حلقه با مرکز Z، رادیکال ژاکوبسون J و مجموعه N از تمام عناصر پوچ توان باشد. می‌دانیم یک حلقه بولی در شرط $x^۲ = x$، صدق می‌کند و جابجایی است. بنابه این شرط داریم $x^۲y - xy^۲ = ۰$، با این انگیزه ما حلقه زیربولی را به‌عنوان تعمیمی از حلقه‌های بولی تعریف می‌کنیم.

حلقه R را که به‌ازای هر $x, y \in R\backslash(N \bigcup J \bigcup Z)$، داشته باشیم $x^۲y - xy^۲ \in N$ یک حلقه زیربولی است. این تعریف را عدیل یاکوب در مقاله خود در سال ۲۰۰۷ بیان کرد [۱] و به بررسی شرایطی پرداخت که حلقه زیربولی R تحت آن شرایط جابجایی است یا ایده‌آل جابجاگر پوچ دارد و بیان داشت که کلاس حلقه‌های زیربولی کاملاً بزرگ و شامل تمام حلقه‌های بولی، تمام حلقه‌های جابجایی و تمام حلقه‌های رادیکال و تمام حلقه‌های پوچ می‌باشد، ولی حلقه زیربولی لزوماً بولی یا حتی جابجایی نیست و تعریف حلقه زیربولی برای قضایایی که مطرح شده یک شرط اساسی می باشد.

عدیل یاکوب و هاورد بِل در مقاله خود در سال ۲۰۰۹ بیان داشتند که: حلقه R را که به‌ازای هر $x \in R\backslash(J \bigcup Z)$، اعداد صحیح مثبت m, n ی از زوجیت های مخالف وجود دارند به طوریکه $x^n - x^m \in N$، یک حلقه نیم‌پریودیک نامند.[۲]

آنها در مقاله خود بیان داشتند که اگر هر عضو حلقه R در شرط شاکرون صدق کند، حلقه پریودیک است و اگر هر $x \in R\backslash(J \bigcup Z)$ در شرط شاکرون صدق کند، حلقه نیم‌پریودیک است. کلاس حلقه‌های نیم پریودیک شامل تمام حلقه‌های جابجایی، تمام حلقه‌های رادیکال و تمام حلقه‌های پریودیک غیر پوچ و تمام حلقه‌های شبه پریودیک تعمیم یافته می‌باشد. آن‌ها با بیان و اثبات قضایایی

به بررسی خاصیت جابجایی در حلقه‌های نیم پریودیک پرداختند.

در این پایان‌نامه قضایای مربوط به این دو مقاله مورد بازنگری قرار می‌گیرد و اثبات آن‌ها در کمال دقت موشکافی می‌گردد. برای خواننده علاقه‌مند مطالعه این مطالب و درک اثبات قضایای مربوط به آن‌ها بسیار جالب است.

نکته دیگر که مورد توجه واقع شده است آن است که سعی شده با ارائه مثال‌هایی مناسب، نشان دهیم که مفروضات قضایا اساسی هستند . امید است مطالعه‌ی این پایان‌نامه رضایت خاطر صاحبان نظر را فراهم سازد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱—۱ مقدمه

در این فصل به همه تعاریف، لم‌ها و قضایایی که در سایر فصل‌ها به آنها نیاز داریم می‌پردازیم. اغلب مطالب در سطح دروس جبر در دورهٔ کارشناسی و یا جبر پیشرفته دوره کارشناسی ارشد می‌باشد و بعضی از قضایا از مقالات برداشته شده اند. در این فصل سعی شده تا نتایجی را که اغلب در دروس تخصصی ظاهر می‌شوند و اثبات آنها واضح نیست با اثبات ارائه دهیم تا مطالعه این فصل روان‌تر و قابل درک باشد. در تمام فصل‌های این پایان‌نامه R را حلقه‌ای نه لزوماً یکدار درنظر می‌گیریم و N را مجموعه تمام عناصر پوچ‌توان، Z را مرکز حلقه و J را، رادیکال ژاکوبسون حلقه R درنظر می‌گیریم.

۱—۲ تعاریف و قضایا

تعریف ۱—۲—۱ الف)به‌ازای هر x و y در R، عضو $xy-yx$ را جابجاگر y,x نامیده وآن را با نماد $[x,y]$ نمایش می‌دهیم. بدیهی است که R جابجایی است اگر و تنها اگر جابجاگر غیر صفری نداشته باشیم.

ب) ایده آل تولید شده توسط مجموعه همه جابجاگرهای حلقه R را ایده آل جابجاگر نامیده وبا $C(R)$ نمایش می‌دهیم.

ج) جابجاگرهای $[x,y]_k$ که $k \geq ۱$ را به‌طور استقرایی تعریف می‌کنیم.

به‌ازای $k=۱$ داریم

$$[x,y]_۱ = [x,y]$$

به ازای عدد طبیعی دلخواه k، $[x,y]_k = [[x,y]_{k-1}, y]$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
[x,y]_2 &= [[x,y],y] = [xy-yx,y] \\
&= (xy-yx)y - y(xy-yx) \\
&= xy^2 - yxy - yxy + y^2x \\
&= xy^2 - 2yxy + y^2x \\
&= \sum_{i=0}^{i=2}(-1)^i \binom{k}{i} y^i x y^{k-i}
\end{aligned}$$

و به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که $[x,y]_k = \sum_{i=0}^{i=k}(-1)^i \binom{k}{i} y^i x y^{k-i}$.

د) مرکز حلقه R، که با Z نمایش داده می‌شود زیرحلقه‌ای است از R که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$Z = \{x \in R \mid [x,y] = 0 \quad ; \quad \forall y \in R\}.$$

ه) نماد $((m,n))$ را یک زوج مرتب از اعداد صحیح مثبت با زوجیت های متفاوت درنظر می‌گیریم، یعنی یکی زوج و دیگری فرد.

تعریف ۱ــ۲ــ۲ گروه G را یک p ـ گروه می‌گوییم اگر مرتبه هر عضوش توانی از عدد اول p باشد. زیرگروه H از گروه G را یک pــزیرگروه G گوییم اگر H یک p ـ گروه باشد. بعنوان مثال گروه چهارتایی کلاین یک ۲ ـ گروه است.

تعریف ۱ــ۲ــ۳ الف) هر عضو a را که در تساوی $a^2 = a$ صدق کند خودتوان نامیم.

ب) عضو a در R پوچ توان نامیده می‌شود اگر عدد صحیح مثبتی مانند n وجود داشته باشد به‌طوریکه $a^n = 0$. ایده آل (چپ، راست، دو طرفه) I از R پوچ است اگر هر عضو I پوچ توان‌باشد؛ I پوچ توان است اگر به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، $I^n = 0$. لازم به ذکر است که هر حوزه صحیح فاقد عضو پوچ توان غیر صفر است.

قضیه ۱—۲—۴ حلقه بولی R جابجایی است و به‌ازای هر $a \in R$ داریم $a + a = 0$

$$\begin{aligned}
(a+a) \in R \quad &\Rightarrow \quad (a+a)^{2} = (a+a) \\
&\Rightarrow \quad (a+a)(a+a) = a+a \\
&\Rightarrow \quad a^{2} + a^{2} + a^{2} + a^{2} = a+a \\
&\Rightarrow \quad a+a+a+a = a+a \\
&\Rightarrow \quad a+a = 0 \\
&\Rightarrow \quad a = -a. \\
(x+y)^{2} = (x+y) \quad &\Rightarrow \quad x^{2} + xy + yx + y^{2} = x+y \\
&\Rightarrow \quad x + xy + yx + y = x+y \\
&\Rightarrow \quad xy + yx = 0 \\
&\Rightarrow \quad xy = -yx = yx \\
&\Rightarrow \quad xy = yx.
\end{aligned}$$

لم ۱—۲—۵ هرگاه در حلقه جابجایی R عناصر غیر صفر y, x پوچ‌توان باشند، دراین‌صورت هر یک از عناصر (الف) $x + y$، (ب) $x \cdot y$، (ج) $\forall r \in R;\ r \cdot x$ و (د) $\forall k \in \mathbb{Z}^{+};\ x^{k}$، نیز پوچ‌توانند.

تعریف ۱—۲—۶ الف)فرض کنید A یک گروه جمعی آبلی و R یک حلقه باشد. گروه جمعی A با یک عمل دوتایی موسوم به ضرب اسکالر $R \times A \longmapsto A$ با ضابطه $(r, a) \longmapsto ra$ یک $R-$مدول چپ گفته می‌شود، هر گاه به‌ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$ خواص زیر برقرار باشند:

۱) $(r+s)a = ra + sa$

۲) $r(a+b) = ra + rb$

۳) $(rs)a = r(sa)$

اگر R دارای واحد 1_R بوده و $1_R a = a$ برای هر $a \in A$، گوییم A یک $R-$مدول یکانی است. هر گاه R یک حلقه بخشی باشد، آنگاه A یک فضای برداری (چپ) نام دارد.

ب) $R-$مدول A را ساده (تحویل‌ناپذیر) گوییم هرگاه $RA \neq 0$ و A هیچ زیرمدولی بجز صفر و خودش نداشته باشد. مسلماً هر ایده آل چپ از حلقه R با همان اعمال جمع و ضرب R، یک $R-$مدول چپ می‌سازد. از این‌رو می‌توان گفت که حلقه R به‌عنوان یک $R-$مدول چپ ساده است اگر $R^2 \neq 0$ و R ایده آل چپی نداشته باشد. اما باید توجه داشته باشیم که حلقه ساده به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

ج) حلقه R را ساده نامیم هرگاه $R^2 \neq 0$ و R هیچ ایده آلی غیر از صفر و خودش نداشته باشد.

تمامی نتایجی را که در مورد $R-$مدول های چپ بیان می شود به سادگی قابل تعمیم به $R-$مدول‌های راست نیز می‌باشند.

تعریف ۱-۲-۷ اگر A یک $R-$مدول چپ بوده و $B \neq \phi$ زیرمجموعه‌ای از A باشد آنگاه مجموعه زیر را پوچ‌ساز B نامیده و با $a(B)$ نمایش می دهیم:

$$a(B) = \{r \in R \mid rb = 0 \quad ; \forall b \in B\}$$

لازم به ذکر است که $a(B)$ یک ایده آل چپ از R است. هر گاه B زیرمدول A باشد، آنگاه $a(B)$ یک ایده آل می‌باشد.

مدول (چپ) A باوفا است اگر پوچ ساز (چپ) آن یعنی $a(A)$ مساوی صفر باشد.

تعریف ۱-۲-۸ فرض کنیم K یک حلقه جابجایی و یکدار باشد. $K-$جبر (یا جبر روی K) A حلقه‌ای است که

الف) $(A, +)$ یک $K-$مدول (چپ) یکانی است؛

ب) به‌ازای هر $k \in K$ و $a, b \in A$، $k(ab) = (ka)b = a(kb)$.

$K-$جبر A در صورتی که K یک حلقه بخشی باشد را یک جبر بخشی می‌نامیم.

تعریف ۱—۲—۹ الف) حلقه R را اول نامیم اگرایده آل صفر یک ایده آل اول باشد (هرگاه I,J ایده آل هایی باشند به طوریکه $IJ=\circ$، آنگاه $I=\circ$ یا $J=\circ$).

ب)حلقه R را اولیه نامیم هرگاه دارای یک $R-$مدول ساده و با وفا باشد. لازم به ذکر است که هر حلقه ساده یکدار، اولیه می‌باشد و یک حلقه جابجایی R اولیه است اگر و تنها اگر R یک میدان باشد.

ج) ایده آل P از حلقه R را اولیه چپ (راست) گوییم اگر حلقه $\frac{R}{P}$ اولیه چپ (راست) باشد.

تعریف ۱—۲—۱۰ ایده آل چپ I از R را منظم چپ گویند هر گاه $e\in R$ ی وجود داشته باشد به‌طوری که $r-re\in I$ به‌ازای هر $r\in R$. بدیهی است اگر R حلقه‌ای یکدار باشد، با قرار دادن $e=۱$ هر ایده آل چپ آن، منظم چپ است. ایده آل منظم راست هم به طریق مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۱—۲—۱۱ عضو a از حلقه R را شبه‌منظم چپ (راست) نامیم اگر $r\in R$ ی وجود داشته باشد به‌طوری که $r+a+ra=\circ$ ($a+r+ar=\circ$) و عضو r را شبه معکوس چپ a می‌نامند. گوییم ایده آل I (چپ، راست، یا دو طرفه) از R شبه‌منظم چپ است اگرهر عضو I شبه منظم چپ باشد. هرگاه R حلقه‌ای یکدار باشد آنگاه a شبه منظم چپ (راست) است اگر و تنها اگر ۱_R+a معکوس‌پذیر چپ (راست) باشد. البته این مطلب را به‌صورت زیر می‌توان بررسی کرد.

فرض کنید a شبه منظم چپ در حلقه یکدار R باشد. پس $r\in R$ ی وجوددارد به طوریکه $r+a+ra=\circ$ حال اگر به طرفین تساوی ۱_R را اضافه کنیم داریم:

$$r+a+ra+۱_R=\circ+۱_R\Rightarrow(۱_R+r)(۱_R+a)=۱_R$$

پس ۱_R+a معکوس‌پذیر چپ است.

حال فرض کنید که ۱_R+a معکوس‌پذیر چپ باشد. پس $r\in R$ ی وجود دارد به‌طوریکه

$$r(۱_R+a)=۱_R\quad\Rightarrow\quad r(۱_R+a)-۱_R=\circ$$

$$\Rightarrow\quad r۱_R+ra-۱_R=\circ$$

$$\Rightarrow \quad (r - 1_R) + a + (r - 1_R)a = 0$$

پس a شبه‌منظم چپ است .

لازم به ذکر است که هر عضو پوچ توان شبه‌منظم چپ است زیرا اگر $a^n = 0$، قرار می دهیم $r = -a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$ آنگاه $r + a + ra = 0$.

عضو شبه معکوس چپ و راست در صورت وجود برابرند، زیرا اگر $r + a + ra = 0$ و $s + r + sr = 0$ از تساوی این دو نتیجه می شود که $s + sr = a + ra$. حال کافی است ثابت کنیم که $sr = ra$ اگر رابطه $s + r + sr = 0$ را از سمت راست در a ضرب کنیم و از این مطلب که $a + ra = -r$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$0 = sa + ra + sra = s(a + ra) + ra = s(-r) + ra.$$

بنابراین $sr = ra$ پس $a = s$ و عضو شبه‌معکوس چپ و راست برابر می‌شوند.

قضیه ۱—۲—۱۲ اگر R یک حلقه باشد آنگاه یک ایده آل $J(R)$ از R وجود دارد به‌طوریکه:

الف) $J(R)$ اشتراک تمام پوچ سازهای چپ R—مدول‌های چپ ساده می‌باشد.

ب) $J(R)$ اشتراک تمام ایده آل های منظم ماکزیمال چپ از R می‌باشد.

ج) $J(R)$ اشتراک تمام ایده آل‌های اولیه چپ از R می‌باشد.

د) $J(R)$ یک ایده آل شبه منظم چپ است که شامل هر ایده آل شبه منظم چپ از R می‌باشد.

ه) در عبارت (الف) تا(د) اگر به‌جای کلمه چپ کلمه راست را هم قرار دهیم، عبارت حاصل درست می‌باشد. ایده آل $J(R)$ را، رادیکال ژاکوبسون حلقه R می‌نامند. اگر R هیچ R—مدول چپ ساده‌ای نداشته باشد قرار داد می کنیم $J(R) = R$. لازم به ذکر است که هرگاه R یکدار باشد آنگاه:

$J(R) = \{r \in R \mid$ به‌ازای هر $s \in R$، $1_R + sr$ معکوس‌پذ یر چپ است $\}$

تعریف ۱—۲—۱۳ الف) حلقه R را نیم‌ساده نامیم هرگاه $J(R) = \circ$. هر حلقه بخشی و نیز حلقه اعداد صحیح مثال‌هایی از حلقه‌های نیم‌ساده می‌باشند.

ب) حلقه R را حلقه رادیکالی نامیم هرگاه $J(R) = R$.

قضیه ۱—۲—۱۴ فرض کنید R حلقه‌ای دلخواه باشد و $J(R)$ رادیکال ژاکوبسون آن باشد آنگاه $\frac{R}{J(R)}$ نیم‌ساده است.

اثبات: فرض کنید $\pi : R \longmapsto \frac{R}{J(R)}$ بروریختی کانونی باشد و $\pi(r)$ را با $\overline{r}$ برای هر $r \in R$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید M مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکزیمال چپ منظم از R باشد اگر $I \in M$ آنگاه بنا به قضیه ۱—۲—۱۲ (ب)، داریم $J(R) \subset I$ و نیز $\pi(I) = \frac{I}{J(R)}$ یک ایده‌آل چپ ماکزیمال از $\frac{R}{J(R)}$ می‌باشد. اگر $e \in R$ طوری باشد که $r - re \in I$ برای هر $r \in R$ آنگاه $\overline{r} - \overline{r}\ \overline{e} \in \pi(I)$ برای هر $\overline{r} \in \frac{R}{J(R)}$ بنابراین $\pi(I)$ برای هر $I \in M$ منظم است. چون $J(R) = \bigcap\limits_{I \in M} I$ به راحتی از $\overline{r} \in \bigcap\limits_{I \in M} \pi(I) = \bigcap\limits_{I \in M} \frac{R}{J(R)}$ نتیجه می‌شود که $r \in J(R)$. لذا بنابه قضیه ۱—۲—۱۲(ب)، (با به‌کار گیری $\frac{R}{J(R)}$) داریم:

$$J(\frac{R}{J(R)}) \subset \bigcap_{I \in M} \pi(I) \subset \pi(J(R)) = \circ.$$

بنابراین $\frac{R}{J(R)}$ نیم‌ساده است.□[۳]

لم ۱—۲—۱۵ فرض کنیم R حلقه بوده و $a \in R$

الف) هرگاه $a^{۲}-$ شبه منظم چپ باشد، آنگاه a نیز چنین است.

ب) $a \in J(R)$ اگر و تنها اگر Ra یک ایده آل شبه منظم چپ باشد.

اثبات: الف) اگر $r + (-a^{۲}) + r(-a^{۲}) = \circ$، قرار می دهیم $s = r - a - ra$. بنابراین

$$s + a + sa = r - a - ra + a + (r - a - ra)a = r - a^{۲} - ra^{۲} = \circ$$

که از آنجا a شبه‌منظم چپ است .

ب) هرگاه $a \in J(R)$، آنگاه $Ra \subset J(R)$. بنابراین، Ra شبه‌منظم چپ است. زیرا $J(R)$ چنین است. برعکس، فرض کنیم Ra شبه‌منظم چپ باشد دراین‌صورت $K = \{ra + na \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ یک ایده‌آل چپ R است که شامل a و Ra می‌باشد. هرگاه $s = ra + na$، آنگاه $-s^۲ \in Ra$ بنابراین طبق فرض $-s^۲$ شبه منظم چپ است و در نتیجه بنابه (الف)، s نیز چنین است. لذا K یک ایده‌آل چپ شبه منظم چپ است. پس طبق قضیه ۱—۲—۱۲ (د)، $a \in K \subset J(R)$.□[۳]

در قضیه زیر رادیکال ژاکوبسون یک ایده آل دلخواه R تعریف شده و خواص آن را می آوریم که اثبات آن در [۳] می‌باشد.

قضیه ۱—۲—۱۶ (الف) هرگاه ایده‌آل I حلقه R خود یک حلقه ملحوظ شود، آنگاه $J(I) = I \bigcap J(R)$.

(ب) هرگاه R نیم‌ساده باشد، آنگاه هر ایده‌آل R نیز چنین است.

(ج) $J(R)$ یک حلقه رادیکال است.

قضیه زیر همان قضیه معروف چگالی ژاکوبسون می‌باشد که نشان می‌دهد حلقه اولیه دلخواه R با نوع خاصی از زیرحلقه (به نام زیرحلقه چگال) ازحلقه درونریختی فضای برداری V روی حلقه بخشی D یکریخت است. که اثبات آن در [۳] بیان شده‌است.

قضیه ۱—۲—۱۷ فرض کنید R یک حلقه اولیه باشد، در این صورت برای حلقه‌ای بخشی چون D، یا R یکریخت با D_n (حلقه همه ماتریس‌های $n \times n$ روی D) است و یا برای هر عدد صحیح m، زیرحلقه‌ای مانند S_m از R و یک بروریختی حلقه هاوجود دارند که D_m تصویربروریختی زیرحلقه S_m از R است.

تعریف ۱—۲—۱۸ حلقه R را یک حاصلضرب زیرمستقیم از خانواده حلقه‌های $\{R_i \mid i \in I\}$ گویند، اگر R یک زیرحلقه از ضرب مستقیم $\prod_{i\in I} R_i$ باشد که $\pi_k(R) = R_k$ برای هر $k \in I$ که در آن $\pi_k : \prod_{i\in I} R_i \longmapsto R_k$ بروریختی کانونی است. به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت که S با یک حاصلضرب زیرمستقیم از خانواده حلقه‌های $\{R_i \mid i \in I\}$ یکریخت است اگر وتنها اگر یک تکریختی از حلقه‌ها مانند $\phi : S \longmapsto \prod_{i\in I} R_i$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $k \in I$، $\pi_k\phi(S) = R_k$.

حلقه‌های نیم‌ساده‌ی دلخواه به‌عنوان انواع خاص زیر حلقه‌های حاصل ضربهای مستقیم حلقه‌های اولیه مشخص می‌شوند بدین منظور قضیه زیر را بیان می‌کنیم که اثبات آن در [۳] می‌باشد.

قضیه ۱—۲—۱۹ حلقه‌ی غیر صفر R نیم‌ساده است اگر وتنها اگر R با حاصل ضرب زیرمستقیمی از حلقه‌های اولیه یکریخت باشد.

لازم به ذکر است که هر حلقه نیم‌ساده جابجایی ناصفر یک حاصل ضرب زیرمستقیم از میدان‌ها می‌باشد.

تعریف ۱—۲—۲۰ حلقه R را به‌طور زیرمستقیم تحویل ناپذیر گویند اگر اشتراک تمام ایده آل های ناصفر از R، ناصفر باشد.

مثلاً $\mathbb{Z}$ به‌طور زیرمستقیم تحویل ناپذیر نیست زیرا هر ایده آل $\mathbb{Z}$ به‌صورت $< m >$ است که m یک عدد صحیح می‌باشد بنابراین

$$\bigcap_{\circ \neq m\in\mathbb{Z}} < m > \subset \bigcap_{p\in\mathbb{Z}} < p > = \circ,$$

که در آن اشتراک دوم روی تمام ایده آل‌های تولید شده توسط یک عدد اول p گرفته می‌شود و قبلاً گفته شده که $\mathbb{Z}$ نیم‌ساده می‌باشد پس $\mathbb{Z}$ به‌طور زیرمستقیم تحویل ناپذیر نمی‌باشد. ولی $\mathbb{Z}_m$ ها برای حالتی که m توانی از یک عدد اول باشد به‌طور زیرمستقیم تحویل ناپذیر می‌شوند زیرا اگر $\mathbb{Z}_{p^n}$ را درنظر بگیریم اشتراک ایده آل‌های غیر صفرش $< p^{n-1} >$ می‌باشد که غیرصفر است .