بسم الله الرحمن الرحيم

[illegible]

١٥١٠٣٧-٢٠٢٥٢١٧

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

رشته:

ریاضی محض، گرایش توپولوژی

عنوان:

ایدآل‌های محدب در C(X)

نگارنده:

علیرضا الفتی

استاد راهنما:

دکتر فریبرز آذرپناه

استاد مشاور:

دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده

تیر ماه ۸۹

دانشگاه شهید چمران اهواز

مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمی تعالی

نتیجه ارزش یابی پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

بدین وسیله گواهی می شود پایان نامه آقای علیرضا الفتی، دانشجوی ریاضی محض ، گرایش توپولوژی از دانشکده ی علوم ریاضی و کامپیوتر ، به شماره دانشجویی۸۶۲۵۱۰۳ تحت عنوان:

ایدآل های محدب در C(X)

جهت اخذ درجه ی کارشناسی ارشد در تاریخ ۱۳۸۹/۴/۷ توسط هیأت داوران مورد ارزش یابی قرار گرفت و با درجه عالی تصویب شد.

۱. اعضای هیأت داوران	مرتبه ی علمی	امضا
الف)استاد راهنما : دکتر فریبرز آذرپناه	استاد	
ب)استادمشاور: دکتر امیدعلی شهنی کرم زاده	استاد	
پ)داور اول : دکتر منیره پیمان	استادیار	
ت)داور دوم : دکتر عبدالمحمد امین پور	دانشیار	
ث)نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر مهرداد نامداری	استادیار	
۲. مدیر گروه : هادی بصیرزاده	استادیار	
۳.معاون پژوهشی تحصیلات تکمیلی دانشکده : دکتر سراج	استادیار	
۴. مدیر کل تحصیلات تکمیلی : دکتر پیغان	استاد	

دانشگاه شهید چمران اهواز

مدیریت تحصیلات تکمیلی

چکیده

نام خانوادگی: الفتی نام: علیرضا

عنوان پایان‌نامه: ایدآل‌های محدب در $C(X)$

استاد راهنما: دکتر فریبرز آذرپناه استاد مشاور: دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد رشتهٔ: ریاضی محض گرایش: توپولوژی

محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۹/۴/۷ تعداد صفحه: ۷۹

واژه‌های کلیدی: ℓ ـ حلقه، f ـ حلقه، ایدآل محدب، ایدآل مطلقاً محدب، FP ـ ایدآل، ویژگی m ـ تحدب، ایدآل نیم‌اول، ایدآل شبه‌اول حلقه‌ی حسابی

چکیده: در این پایان‌نامه به بررسی و تعمیم مفهوم محدب و مطلقاً محدب بودن یک ایدآل در حلقه‌های خاصی تحت عنوان f ـ حلقه‌ها خواهیم پرداخت. قبلاً نشان داده شده است که در یک حلقه‌ی مرتب مشبکه‌ای مجموع دو ایدآل مطلقاً محدب، مطلقاً محدب است. در اینجا به بررسی مطلقاً محدب بودن حاصل‌ضرب دو ایدآل مطلقاً محدب خواهیم پرداخت. همچنین نشان می‌دهیم که مشبکه‌ی ایدآل‌های مطلقاً محدب، تشکیل یک قاب می‌دهد. در ارتباط z ـ ایدآل‌ها با ایدآل‌های مطلقاً محدب، حلقه‌های خاصی تحت عنوان حلقه‌های تابعی مطرح می‌شوند. یکی از اهداف این پایان نامه بررسی شرایطی روی ایدآل I است که $\frac{C(X)}{I}$ مرتب کلّی باشد. در ادامه برخی از معادل‌های F ـ فضاها مطرح می‌شوند و سرانجام به طور مستقیم نشان می‌دهیم که X یک F ـ فضا است اگر و تنها اگر مشبکه ایدآل‌های $C(X)$ توزیع‌پذیر باشد و یا اگر و تنها اگر $C(X)$ یک حلقه‌ی حسابی باشد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل که متشکل از دو بخش است، به مطالعه‌ی مطالبی می‌پردازیم که در فصول آینده مورد نیاز خواهند بود. در بخش اول پاره‌ای از مطالب که تماماً از مرجع [۱] گردآوری شده، به صورت اجمالی و بدون بیان برهان مطرح خواهند شد. در این بخش به یادآوری تعریف z ـ ایدآل خواهیم پرداخت و به معرفی بعضی ایدآل‌های خاص در حلقه $C(X)$ می‌پردازیم. در بخش دوم به تعمیم z ـ ایدآل‌ها در حلقه‌های تعویض‌پذیر و یکدار می‌پردازیم و کوشش می‌کنیم خواصی از z ـ ایدآل‌ها در $C(X)$ را برای این حلقه‌ها بیان و اثبات کنیم.

۱ــ۱ مروری بر حلقه‌ی توابع پیوسته

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته از X در $\mathbb{R}$ را با $C(X)$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه به همراه جمع و ضرب نقطه‌ای تشکیل یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یکدار می‌دهد. زیر مجموعه‌ای از $C(X)$ متشکل از توابع پیوسته و کراندار را با $C^*(X)$ نمایش می‌دهیم. $C^*(X)$ با اعمال جبری که از $C(X)$ به ارث می‌برد، تشکیل یک زیرحلقه می‌دهد.

در قسمت ۹ــ۳ از مرجع [۱] نشان داده شده است که برای فضای توپولوژیک X، فضای هاسدروف و کاملاً منظم Y چنان موجود است که $C(X)$ و $C(Y)$ یکریخت حلقه‌ای باشند. بنابراین

از این پس در سراسر این کتاب نیز به پیروی از این قضیه، فضای X را هاسدروف و کاملاً منظم می‌انگاریم.

تعریف ۱—۱.۱ : برای هر $f \in C(X)$، صفر مجموعه‌ی f را با $Z(f)$ نمایش می‌دهیم و به صورت $Z(f) = \{x \in X : f(x) = ۰\}$ تعریف می‌کنیم. همچنین $coz(f) = X - Z(f)$ را متمم صفر مجموعه‌ی f می‌نامیم.

مجموعه‌ی تمام صفر مجموعه‌های تعریف شده روی X را با $Z[X]$ نمایش می‌دهیم. یعنی $Z[X] = \{Z(f) : f \in C(X)\}$. در ادامه برخی ویژگی‌ها از صفر مجموعه‌ها را بدون بیان برهان آنها از نظر می‌گذرانیم.

گزاره ۱—۲.۱ : صفر مجموعه‌ها دارای ویژگیهای زیر می‌باشند

الف) هر صفر مجموعه بسته است.

ب) برای هر $f, g \in C(X)$ داریم: $Z(f^۲ + g^۲) = Z(|f| + |g|) = Z(f) \cap Z(g)$.

پ) برای هر $f, g \in C(X)$ داریم: $Z(f.g) = Z(f) \cup Z(g)$.

ت) برای هر $f \in C(X)$ و هر $۰ < r \in \mathbb{R}$، $Z(f) = Z(|f|^r)$ برقرار است.

ث) برای هر $f \in C(X)$، تابع $g \in C^*(X)$ وجود دارد، به طوری که $Z(f) = Z(g)$ و می‌توان فرض کرد $|g| \leq ۱$.

ج) $Z[X]$ تحت اشتراک شمارا بسته است.

چ) برای هر $f \in C(X)$، صفر ـ مجموعه‌ی $Z(f)$ یک G_δ ـ مجموعه است.

ح) دو زیر مجموعه در X کاملاً مجزا هستند اگر و تنها اگر در دو صفر مجموعه‌ی مجزا قرار گیرند.

خ) فضای X کاملاً منظم است اگر و تنها اگر $Z[X]$ یک پایه برای مجموعه‌های بسته‌ی فضای X، تشکیل دهد.

د) متمم صفر ـ مجموعه‌ها تشکیل یک پایه برای فضای کاملاً منظم X می‌دهند.

تعریف ۱ـ۱.۳ : زیر گردایه‌ی $\mathcal{F}$ از $Z[X]$ را یک z ـ پالایه روی X می‌نامیم، هر گاه شرایط زیر برقرار باشند.

الف) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

ب) اگر $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ آنگاه $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{F}$

پ) اگر $Z_1 \in \mathcal{F}$ و $Z_2 \in Z[X]$ و $Z_1 \subseteq Z_2$ آنگاه $Z_2 \in \mathcal{F}$.

یک z ـ پالایه که نسبت به رابطه‌ی شمول در مجموعه‌ی تمام z ـ پالایه‌ها روی X ماکسیمال باشد را یک z ـ فراپالایه گوییم. همچنین یک z ـ پالایه $\mathcal{F}$ را یک z ـ پالایه اول گوییم اگر از $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{F}$ نتیجه شود $Z_1 \in \mathcal{F}$ یا $Z_2 \in \mathcal{F}$. اگر I ایدآلی از $C(X)$ باشد، آنگاه خانواده $Z[I] = \{Z(f) : f \in I\}$ یک z ـ پالایه روی X است. همچنین اگر $\mathcal{F}$ یک z ـ پالایه روی X باشد آنگاه مجموعه‌ی $Z^{-1}(\mathcal{F}) = \{f \in C(X) : Z(f) \in \mathcal{F}\}$ یک ایدآل از $C(X)$ می‌باشد.

تعریف ۱ـ۱.۴ : ایدآل I از حلقه‌ی $C(X)$ را یک z ـ ایدآل گوییم، هر گاه $Z^{-1}Z[I] = I$. در بخش آینده به تعمیم این تعریف در حلقه‌های تعویض‌پذیر دلخواه خواهیم پرداخت. در نتیجه‌ی بعد به معادل‌های این تعریف می‌پردازیم.

گزاره ۱ـ۱.۵ : فرض کنیم I ایدآلی از $C(X)$ باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:

الف) I یک z ـ ایدآل است.

ب) اگر $f \in I$، $g \in C(X)$ و $Z(f) = Z(g)$، آنگاه $g \in I$.

پ) اگر $f \in I$، $g \in C(X)$ و $Z(f) \subseteq Z(g)$، آنگاه $g \in I$.

ت) اگر اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال شامل f را با M_f نمایش دهیم؛ و $f \in I$ آنگاه $M_f \subseteq I$.

گزاره ۱—۶.۱ :

الف) هر ایدآل ماکسیمال حلقه $C(X)$ یک z ـ ایدآل است.

ب) اگر $\mathcal{F}$ یک z ـ پالایه روی X باشد، آنگاه $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ یک z ـ ایدآل است.

پ) هر اشتراک دلخواه از z ـ ایدآل‌ها یک z ـ ایدآل است.

ت) برای هر $x \in X$؛ $M_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ یک ایدآل ماکسیمال و در نتیجه یک z ـ ایدآل است.

ث) برای هر $x \in X$؛ ایدآل $O_x = \{f \in C(X) : x \in int_X\ Z(f)\}$ یک z ـ ایدآل است.

قضیه ۱—۷.۱ : اگر I و J دو z ـ ایدآل از $C(X)$ باشند، $I + J$ یک z ـ ایدآل خواهد بود.

برهان: به قضیه [۱—۴] از مرجع [۱۱] مراجعه شود. ■

حال که برخی از اعمال جبری روی z ـ ایدآل‌ها بیان شد، به یادآوری برخی ویژگی‌های فضای توپولوژیک X و معرفی چند فضای خاص می‌پردازیم.

تعریف ۱—۸.۱ : زیر فضای $S \subseteq X$ را C ـ نشانده (C^* ـ نشانده) می‌گوییم، هر گاه هر تابع در $C(S)(C^*(S))$ قابل توسیع به تابعی در $C(X)(C^*(X))$ باشد. به بیان دیگر، برای هر $f \in C(X)$ $(f \in C^*(X))$ یک تابع $F \in C(X)(F \in C^*(X))$ موجود باشد به طوری که $F|_S = f$.

در توپولوژی، فضاهای فشرده و هاسدروف بعد از فضاهای متریک از جایگاه خاصی برخوردارند. به همین دلیل مطالعه‌ی زیرفضاهای فضاهای هاسدروف و فشرده از اهمیت خاصی برخوردار هستند. در اینجا به این مطلب علاقمندیم که برای فضای توپولوژیک X، فضایی هاسدروف و فشرده مثل T بیابیم که $X \subseteq T$ و $cl_T X = T$. در چنین شرایطی T را فشرده شده‌ی X گوییم. فرض کنیم X فضایی کاملاً منظم و هاسدروف باشد. به راه‌های مختلفی می‌توان X را در یک فضای فشرده نشاند. اما در میان فشرده شده‌های مختلف فضای X، پیش از همه فشرده شده‌ای چون T مدنظر است که علاوه بر اینکه X در T چگال باشد، هر تابع $f \in C^*(X)$ به

تابعی در $C(T)$ گسترش یابد. فضای فشرده‌ی T که در این ویژگی صدق کند را فشرده شده‌ی استون ـ چک فضای توپولوژیک X گوییم.

قضیه ۱—۹.۱ : اگر X در T چگال باشد، آن‌گاه احکام زیر معادلند:

الف) هر نگاشت پیوسته از X به فضای فشرده‌ی Y، دارای توسیعی پیوسته از T به Y است.

ب) X یک C^* ـ نشانده در T است.

پ) برای هر $Z_1, Z_2 \in Z[X]$، اگر $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ آنگاه $cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2 = \varnothing$.

ت) برای هر $Z_1, Z_2 \in Z[X]$، $cl_T(Z_1 \cap Z_2) = cl_T Z_1 \cap cl_T Z_2$.

ث) برای هر $p \in T$، یک z ـ فراپالایه $\mathcal{F}$ روی X وجود دارد که $\mathcal{F}$ به p همگراست.

قضیه ۱—۱۰.۱ : برای هر فضای کاملاً منظم و هاسدروف X، یک فضای فشرده و هاسدروف T وجود دارد که $X \subseteq T$ و $cl_T X = T$ و X در T، C^* ـ نشانده است. در ضمن هر فضای فشرده‌ی دیگر که در این ویژگی صدق کند، در رابطه‌ی یکریختی توپولوژیک با T می‌باشد. این فضا که با تقریب یکریختی یکتا است را با βX نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱—۱۱.۱ : ایدآل $M^p = \{f \in C(X) : \ p \in cl_{\beta X} Z(f)\}$، یک ایدآل ماکسیمال در $C(X)$ است همچنین برای هر $p \in \beta X$، تعریف می‌کنیم:

$$O^p = \{f \in C(X) : \ p \in int_{\beta X} cl_{\beta X} Z(f)\}.$$

قضیه ۱—۱۲.۱ : گلفاند ـ کولموگروف

ایدآل M از $C(X)$ ماکسیمال است اگر و تنها اگر $p \in \beta X$ موجود باشد که $M = M^p$.

برهان: به قسمت [۷.۳] از مرجع [۱] مراجعه شود. ■

قضیه ۱—۱۳.۱ : برای هر $p \in \beta X$، $O^p = \{f \in C(X) : \exists g \in C(X) - M^p \ni \ f.g = 0\}$.

برهان: به قسمت [۷.۱۲] از مرجع [۱] مراجعه شود. ■

قضیه ۱−۱۴.۱ : ایدآل I در $C(X)$ مشمول در ایدآل ماکسیمال یکتای M^p است، اگر و تنها اگر $O^p \subseteq I$.

برهان: به قسمت [۷.۱۳] از مرجع [۱] مراجعه شود. ■

قضیه ۱−۱۵.۱ : هر ایدآل اول p در $C(X)$، برای عنصر یکتای $p \in \beta X$، شامل O^p و مشمول در ایدآل ماکسیمال یکتای M^p می‌باشد.

برهان: به قسمت [۷.۱۵] از مرجع [۱] مراجعه شود. ■

مطالب این بخش را با معرفی دو فضای توپولوژیک خاص و یادآوری چند ویژگی مهم آنها به اتمام می‌رسانیم.

تعریف ۱−۱۶.۱ : فضای X را یک P ـ فضا گوییم، هر گاه هر ایدآل اول در $C(X)$ ماکسیمال باشد. معادل‌های فراوانی برای این تعریف وجود دارد که فقط به ذکر برخی از این نتایج اکتفا می‌کنیم.

برای یافتن تعدادی از این معادل‌ها می‌توان به تمرین [4J] و قضیه [۲۹−۱۴] از مرجع [۱] و همچنین به مرجع [۳] مراجعه کرد. در قضیه زیر به برخی از این معادل‌ها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱−۱۷.۱ : برای فضای توپولوژیک X، گزاره‌های زیر معادلند:

الف) X یک P ـ فضا است.

ب) برای هر $x \in X$، $O_x = M_x$.

پ) هر صفر مجموعه در X باز است.

ت) هر G_δ ـ مجموعه در X باز است.

ث) حلقه‌ی $C(X)$، منظم فون نویمان است. (یعنی برای هر $f \in C(X)$، $g \in C(X)$ وجود دارد که؛ $f = f^۲.g$).

ج) هر ایدآل در $C(X)$ یک z ـ ایدآل است.

چ) هر ایدآل در $C(X)$ نیم اول است. (یعنی $\sqrt{I} = I$).

ح) هر ایدآل در $C(X)$، اشتراکی از ایدآل‌های ماکسیمال خواهد بود.

خ) هر ایدآل اول در $C(X)$ یک z - ایدآل است.

لازم به یادآوری است که در قسمت (ث) می‌توان g را معکوس‌پذیر اختیار کرد.

تعریف ۱—۱۸.۱ : X یک F - فضا است، هر گاه هر ایدآل به طور متناهی تولید شده در $C(X)$ اصلی باشد. در زیر به برخی معادل‌های این فضا خواهیم پرداخت. برای مشاهده‌ی مطالب بیشتر می‌توان به مرجع [۲] مراجعه نمود.

قضیه ۱—۱۹.۱ : برای فضای توپولوژیک X، موارد زیر معادلند:

الف) X یک F - فضا است.

ب) βX یک F - فضا است.

پ) برای هر $f, g \in C(X)$؛ داریم: $(f) + (g) = (|f| + |g|)$.

ت) برای هر $f \in C(X)$؛ $P(f) = \{x \in X : \ f(x) > 0\}$ و $N(f) = \{x \in X \ : f(x) < 0\}$ کاملاً مجزا هستند.

ث) اگر $f.g = 0$ آنگاه $coz(f)$ و $coz(g)$ کاملاً مجزا هستند.

ج) برای هر $f \in C(X)$، f مضربی از $|f|$ است. (یعنی $k \in C(X)$ وجود دارد که $f = k.|f|$).

چ) برای هر $f \in C(X)$، ایدآل $(f) + (|f|)$، ایدآلی اصلی است.

ح) برای هر $p \in \beta X$؛ ایدآل O^p اول است.

خ) برای هر $p \in \beta X$، ایدآل‌های اول شامل O^p تشکیل یک زنجیر می‌دهند.

د) ایدآل‌های اولی که در یک ایدآل ماکسیمال قرار دارند تشکیل یک زنجیر می‌دهند.

۱—۲ z ـ ایدآل‌ها در حلقه‌های تعویض‌پذیر و یک‌دار

در سراسر این بخش فرض بر این است که R حلقه‌ای تعویض پذیر و یک‌دار است. فرض کنیم $\mathcal{M}$ فضای ایدآل‌های ماکسیمال R باشد. برای $a \in R$ قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{M}(a) = \{M \in \mathcal{M} \ : a \in M\}$$

همچنین برای ایدآل I در R قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{M}(I) = \{M \in \mathcal{M} : I \subseteq M\}$$

تعریف ۱—۱.۲ : ایدآل I در R را یک z ـ ایدآل گوییم اگر برای هر $b \in I$ و هر $a \in R$ از $\mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(b)$ نتیجه شود که $a \in I$. به طور معادل از آنجایی که $\mathcal{M}(b) \subseteq \mathcal{M}(a)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}(a) = \mathcal{M}(ab)$؛ I یک z ـ ایدآل است اگر و تنها اگر از $\mathcal{M}(b) \subseteq \mathcal{M}(a)$ و $b \in I$ نتیجه شود $a \in I$.

از تعریف بالا واضح است که هر ایدآل ماکسیمال حلقه‌ی R یک z ـ ایدآل است. همچنین اشتراک هر خانواده از z ـ ایدآل‌ها یک z ـ ایدآل می‌باشد.

تبصره: از نکات بالا در می‌یابیم که رادیکال جاکوبسن حلقه‌ی R یک z ـ ایدآل است. در حقیقت هر z ـ ایدآل شامل رادیکال جاکوبسن حلقه‌ی R می‌باشد. بنابراین ساختار z ـ ایدآلی R معادل است با ساختار z ـ ایدآلی حلقه‌ی خارج قسمتی $\frac{R}{J(R)}$. بنابراین از این پس فرض $J(R) = ۰$ در ادامه‌ی این گفتار لحاظ می‌گردد.

تعریف ۱—۲.۲ : اشتراک هر خانواده از ایدآل‌های ماکسیمال در حلقه‌ی R را یک z ـ ایدآل قوی گوییم.

قضیه ۱—۳.۲ : I یک z ـ ایدآل قوی است اگر و تنها اگر برای ایدآل‌های K و J در R که $J \subseteq I$ و $\mathcal{M}(J) \subseteq \mathcal{M}(K)$ آنگاه $K \subseteq I$.

برهان لزوم: فرض کنیم $I = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha$ و در آن هر M_α ایدآلی ماکسیمال است. همچنین $J \subseteq I$. پس برای هر $\alpha \in \mathcal{A}$، $M_\alpha \in \mathcal{M}(J)$ و بنابر فرض $M_\alpha \in \mathcal{M}(K)$. پس $K \subseteq \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha = I$.

برهان کفایت: حال فرض کنیم برای هر دو ایدآل J و K در R که $J \subseteq I$، $\mathcal{M}(J) \subseteq \mathcal{M}(K)$، آنگاه $K \subseteq I$ برقرار باشد. ادعا می‌کنیم که $I = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(I)} M$، اگر قرار دهیم $K = \bigcap_{M \in \mathcal{M}(I)} M$، در این صورت $\mathcal{M}(K) = \mathcal{M}(I)$ و در نتیجه $K \subseteq I$. ■

به استناد گفته‌های بالا هر z ـ ایدآل اصلی یک z ـ ایدآل قوی است.

هر ایدآل I مشمول در کوچکترین z ـ ایدآل شامل آن است. اگر این z ـ ایدآل را با نماد I_z نمایش دهیم خواهیم داشت $I_z = \cap\{I \subseteq J\ :\ J$ یک z ـ ایدآل است$\}$. در بین ویژگی‌های I_z به چند نکته اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱—۴.۲ :

الف) برای هر عدد طبیعی n، $(I^n)_z = I_z$.

ب) $I \subseteq \sqrt{I} \subseteq I_z$.

پ) هر z ـ ایدآل، نیم اول است. $(\sqrt{I} = I)$.

قضیه ۱—۵.۲ : فرض کنیم P ایدآل اول مینیمال شامل z ـ ایدآل I باشد. آنگاه P نیز یک z ـ ایدآل است.

برهان: فرض کنیم P یک z ـ ایدآل نباشد. پس بنابراین عناصر $a, b \in R$ موجودند که $b \in P$ و $\mathcal{M}(b) \subseteq \mathcal{M}(a)$ اما $a \notin P$. حال مجموعه ضربی ـ بسته زیر را تعریف می‌کنیم:

$$S = (R - P) \cup \{b^n.x\ :\ x \in R - P\ ,\ n = ۰, ۱, ۲, \cdots\}$$

ادعا می‌کنیم که $S \cap I = \varnothing$. زیرا در غیر این صورت عدد طبیعی m هست که $b^m.x \in I$.
اما $\mathcal{M}(a.x) \subseteq \mathcal{M}(b.x) \subsetneq \mathcal{M}(b^m.x)$. و چون I یک z ـ ایدآل است پس باید $a.x \in I$ و در نتیجه $a.x \in P$.

اما $x, a \in R - P$ که با فرض اول بودن P در تناقض است. پس باید داشته باشیم $S \cap I = \varnothing$ و در نتیجه مطابق لم تسورن ایدآل اول $I \subseteq Q$ وجود دارد به طوری که $S \cap Q = \varnothing$. و چون $b \notin Q$ به طور سره شامل Q است و $I \subseteq Q$، و این با کمین بودن ایدآل اول P که شامل I است در تناقض می‌باشد. ■

نتیجه ۱ــ۶.۲ : هر ایدآل اول مینیمال در حلقه‌ی R یک z ـ ایدآل است.

قضیه‌ی بعد حلقه‌هایی را مشخص می‌کند که هر ایدآل‌شان z ـ ایدآل باشد.

قضیه ۱ــ۷.۲ : در حلقه‌ی R موارد زیر معادلند

الف) هر ایدآل، یک z ـ ایدآل قوی است.

ب) هر ایدآل، یک z ـ ایدآل است.

پ) هر ایدآل اصلی یک z ـ ایدآل است.

ت) R منظم فون نویمان است.

برهان‌های (الف $\Leftarrow$ ب) و (ب $\Leftarrow$ پ) واضح هستند.

برهان (پ $\Leftarrow$ ت): فرض کنیم a عنصری معکوس‌ناپذیر از R باشد. پس $(a) = R.a$ یک z ـ ایدآل است. و بنابراین چون (a) نیم اول است، پس $Ra = Ra^۲$. و در نتیجه:

$$\exists r \in R \quad s.t \quad a = a^۲.r$$

برهان (ت $\Leftarrow$ الف): فرض کنیم R منظم فون نویمان باشد. ابتدا واضح است که هر ایدآل اول ماکسیمال است. زیرا اگر داشته باشیم $P \subseteq M$، که P ایدآلی اول و M ایدآلی ماکسیمال است و

$m \in M$، آنگاه $r \in R$ هست که $m = r.m^2$. و در نتیجه $m \in P$. پس داریم $P = M$.

حال ثابت می‌کنیم هر ایدآل یک z - ایدآل است. برای این کار کافی است ثابت کنیم $\sqrt{I} = I$. فرض کنیم $x \in \sqrt{I}$، پس عدد طبیعی m چنان موجود است که $x^m \in I$. اما چون R منظم فون نویمان است پس $r \in R$ هست که $x = x^2.r$ و باید $x^{m-1} \in I$. اگر این روش نزولی را ادامه دهیم خواهیم داشت: $x \in I$ و در نتیجه $I = \sqrt{I}$. در نتیجه هر z - ایدآل یک z - ایدآل قوی است. ■

اگر $S \subseteq R$ یک ایدآل باشد، تعریف می‌کنیم: $(J : S) = \{r \in R : r.S \subseteq J\}$. و اگر $J = (0)$ آنگاه $Ann(S) = (0 : S)$.

قضیه ۱—۸.۲ : فرض کنیم J یک z - ایدآل در R باشد و $S \subseteq R$. آنگاه $(J : S)$ یک z - ایدآل خواهد بود.

برهان: فرض کنیم $x \in (J : S)$ و $y \in R$ به طوری که $\mathcal{M}(x) \subseteq \mathcal{M}(y)$. برای هر $s \in S$ خواهیم داشت $\mathcal{M}(x.s) \subseteq \mathcal{M}(y.s)$ و چون J یک z - ایدآل است و $x.s \in J$ پس برای هر $s \in S$، $y.s \in J$ و در نتیجه $y \in (J : S)$. ■

نتیجه ۱—۹.۲ : برای هر $S \subseteq R$، $Ann(S)$ یک z - ایدآل است.

نتیجه ۱—۱۰.۲ : اگر $Ann(a)$ در بین تمام پوچسازهای R ماکسیمال باشد، $Ann(a)$ یک z - ایدآل اول است.

اگر P ایدآل اول دلخواهی باشد، P - مولفه صفر را با نماد O_P نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$O_P := \{a \in R \ : \ \exists\, b \in R - P \ \ni \ \ a.b = 0\}$$

از آنجا که $O_P = \bigcup_{b \in R-P} Ann(b)$، O_P یک z - ایدآل خواهد بود. این ادعا از آنجا نتیجه می‌شود که اگر اجتماع تعدادی z - ایدآل یک ایدآل باشد آنگاه یک z - ایدآل نیز خواهد بود.

توجه به این نکته ضروری است که وقتی M ایدآلی ماکسیمال از حلقه‌ی R باشد، O_M مشابه ایدآل O^p برای $p \in \beta X$ در $C(X)$ است. اما برای اینکه بتوانیم قضیه [۱—۱—۱۵] را در مورد حلقه‌ی تعویض‌پذیر R به کار بندیم به قضیه بعدی نیاز خواهیم داشت.

قضیه ۱۱.۲—۱ : فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد که $J(R) = 0$ و $\mathcal{M}$ مجموعه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال R باشد. در این صورت برای هر $M \in \mathcal{M}$، O_M مشمول در یک ایدآل ماکسیمال یکتا است اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ در توپولوژی زاریسکی، هاسدروف باشد.

برهان لزوم: فرض کنیم $M_1 \neq M_2$ دو ایدآل ماکسیمال متمایز باشند. از آنجایی که $O_{M_1} \nsubseteq M_2$ پس $x \in O_{M_1}$ هست که $x \notin M_2$. از طرفی چون $x \in O_{M_1}$، پس $z \in R - M_1$ موجود است که $x.z = 0$. و این نشان می‌دهد که $\mathcal{M}(x) \cup \mathcal{M}(z) = \mathcal{M}$ و در نتیجه $[\mathcal{M}(x)]^c \cap [\mathcal{M}(y)]^c = \varnothing$. بنابراین $M_2 \in [\mathcal{M}(x)]^c$ و $M_1 \in [\mathcal{M}(z)]^c$. این نشان می‌دهد که $\mathcal{M}$ فضایی هاسدروف است و این برهان این قسمت را به اتمام می‌رساند. (توجه به این نکته ضروری است که در برهان لزوم نیازی به شرط $J(R) = 0$ نیست).

برهان کفایت: فرض کنیم $\mathcal{M}$ هاسدروف باشد. باید نشان دهیم برای $M \in \mathcal{M}$، O_M در یک ایدآل ماکسیمال یکتا است. فرض کنیم $O_M \subseteq M_1$ و $M \neq M_1$. چون $\mathcal{M}$ هاسدروف است، پس $\mathcal{M}(x)$ و $\mathcal{M}(y)$ چنان وجود دارند که $M \in [\mathcal{M}(x)]^c$ و $M_1 \in [\mathcal{M}(y)]^c$ و $[\mathcal{M}(x)]^c \cap [\mathcal{M}(y)]^c = \varnothing$. در نتیجه $\mathcal{M} = \mathcal{M}(x.y) = \mathcal{M}(x) \cup \mathcal{M}(y)$. بنابراین چون xy متعلق به تمام ایدآل‌های ماکسیمال R است و با توجه به فرض ($J(R) = 0$)، $xy = 0$ و $y \in O_M$. پس $y \in M_1$ و این تناقض است و در نتیجه $M = M_1$ و حکم برقرار است. ■

گزاره ۱۲.۲—۱ : فرض کنیم P ایدآلی اول باشد و M ایدآلی ماکسیمال و $P \subseteq M$. در این صورت $O_M \subseteq P$.

برهان: فرض کنیم $x \in O_M$. پس $y \in R - M$ هست که $xy = 0$. بنابراین $xy \in P$ و $y \notin P$. با

توجه به اول بودن P خواهیم داشت $x \in P$ و از آنجا $O_M \subseteq P$. ■

دو نتیجه‌ی قبل نشان می‌دهند که وقتی M هاسدروف باشد، M شامل ایدآل اول غیرماکسیمال P است اگر و تنها اگر $M \neq O_M$.

سوال دیگری که در اینجا طبیعی به نظر می‌رسد این است که آیا بزرگترین ایدآل ماکسیمال مشمول در یک ایدآل دلخواه موجود است؟ پاسخ به این سوال مثبت است. زیرا اگر I ایدآلی از R باشد مجموعه‌ی $\mathcal{Z} = \{J : J \subseteq I$ و J یک z - ایدآل است و $\}$ در شروط لم تسورن صدق می‌کند و بنابراین I دارای حداقل یک z - ایدآل ماکسیمال می‌باشد. قضیه‌ی زیر در ارتباط با z - ایدآل‌های ماکسیمال مشمول در یک ایدآل اول می‌باشد.

قضیه ۱—۱۳.۲ : اگر P یک ایدآل اول باشد در این صورت یا P یک z - ایدآل است و یا z - ایدآل‌های ماکسیمال مشمول در P، z - ایدآل‌های اولند. ـ

برهان: فرض کنیم P ایدآلی اول باشد که z - ایدآل نیست. پس مطابق توضیحات قبل از قضیه، P حداقل دارای یک z - ایدآل ماکسیمال می‌باشد. اگر J یک z - ایدآل ماکسیمال مشمول در P باشد و $J \neq P$، J باید حتماً اول باشد. زیرا در غیر این صورت مطابق قضیه [۱—۲—۵] چون $P \in Min(I)$، P یک z - ایدآل خواهد بود و این با فرض ابتدای قضیه در تناقض است. پس J یک z - ایدآل اول می‌باشد. ■

قضیه بعدی در ارتباط با رابطه‌ی بین z - ایدآل‌ها و ایدآل‌های مینیمال حلقه‌ی R (در صورت وجود) می‌باشد.

قضیه ۱—۱۴.۲ : اگر R حلقه‌ای J - نیم ساده ($J(R) = 0$) و دارای ایدآل مینیمال ناصفر I باشد. در این صورت I یک z - ایدآل قوی است.

برهان: فرض کنیم I ایدآلی مینیمال از R باشد و $I \neq 0$. چون $J(R) = 0$، پس R دارای ایدآل پوچ‌توان ناصفر نیست و بنابراین عنصر خودتوان $e \in R$ ($e^2 = e$) موجود است که $I = R.e$.

بنابراین چون $I \subseteq Ann(1-e) \neq 0$ داریم $Ann(1-e) = I$. و این نشان می‌دهد که I یک z ـ ایدآل است و چون I اصلی است پس یک z ـ ایدآل قوی است. ■

در پایان این بخش با افزودن شرطی بر حلقه‌ی R، بر آنیم تا ایدآل I_z را به طور مشخص‌تری بیان کنیم. گوییم R در شرط $*$ صدق می‌کند، اگر برای هر ایدآل I در R مجموعه‌ی $\{\mathcal{M}(a) : a \in I\}$ تحت اشتراک متناهی بسته باشد. برای مثال حلقه‌ی $C(X)$ در شرط $*$ صدق می‌کند. زیرا برای ایدآل ماکسیمال M، از $a^2 + b^2 \in M$ خواهیم داشت که $a, b \in M$. پس در این حلقه برای هر $f, g \in C(X)$، $\mathcal{M}(f) \cap \mathcal{M}(g) = \mathcal{M}(f^2 + g^2)$.

قضیه ۱ــ۱۵.۲ : اگر حلقه‌ی R در شرط $*$ صدق کند، در این صورت:

الف) $I_z = \{a \in R : \exists b \in I \quad \ni \quad \mathcal{M}(b) \subseteq \mathcal{M}(a)\}$.

ب) $I_z \cap J_z = (I \cap J)_z$.

برهان: الف) به وضوح طرف راست مشمول در I_z است. و چون شامل I نیز می‌باشد، فقط کافی است که نشان دهیم طرف راست یک z ـ ایدآل است. اگر این مجموعه را J بنامیم و فرض کنیم $x, y \in J$ باشند پس $a, b \in I$ موجودند که $\mathcal{M}(a) \subseteq \mathcal{M}(x)$ و $\mathcal{M}(b) \subseteq \mathcal{M}(y)$. حال چون R در شرط $*$ صدق می‌کند، $c \in I$ وجود دارد که $\mathcal{M}(c) = \mathcal{M}(a) \cap \mathcal{M}(b)$. پس $\mathcal{M}(c) \subseteq \mathcal{M}(x+y)$ و این نشان می‌دهد که $x + y \in J$. برهان برای حالت ضربی واضح است. z ـ ایدآل بودن J نیز واضح است. پس $I_z \subseteq J$ و در نتیجه $I_z = J$.

برهان: ب) به وضوح $(I \cap J)_z \subseteq I_z \cap J_z$. حال فرض کنیم $x \in I_z \cap J_z$. پس مطابق قسمت (الف) $a \in I$ و $b \in J$ موجودند که $\mathcal{M}(a) \cup \mathcal{M}(b) = \mathcal{M}(a.b) \subseteq \mathcal{M}(x)$. اما $a.b \in I \cap J$ و بنابراین $x \in (I \cap J)_z$ و این نشان می‌دهد که $I_z \cap J_z = (I \cap J)_z$. ■

فصل ۲

ℓ ـ حلقه‌ها و ایدآل‌های محدب

شاخه‌ای از تحقیقات در حلقه‌ی توابع پیوسته، بررسی ویژگی‌هایی از آن به عنوان یک حلقه‌ی مرتب مشبکه‌ای است. در این فصل توجه خود را معطوف به ویژگی‌هایی از حلقه‌ی $C(X)$ خواهیم کرد که می‌توان در حلقه‌هایی با ساختاری مجردتر نیز به آنها پرداخت. لزوم ایجاد حلقه‌های مرتب خارج قسمتی که ترتیب خود را از حلقه‌ی اصلی به ارث می‌برند، مورد بحث ما در این بخش می‌باشد. همچنین نظر خود را معطوف ایدآل‌هایی از یک حلقه‌ی مرتب خواهیم نمود که در مرتب نمودن حلقه‌ی خارج قسمتی موثر خواهند بود.

۲ــ۱ ℓ ـ حلقه‌ها

تعریف ۲ــ۱.۱ : مجموعه‌ی مرتب جزئی $(\mathcal{L}, \leq)$ را یک مشبکه گوییم، هر گاه برای هر دو عنصر $a, b \in \mathcal{L}$، $sup\{a,b\}$ و $inf\{a,b\}$ موجود باشند. در این صورت قرار می‌دهیم: $a \vee b = sup\{a,b\}$ و $a \wedge b = inf\{a,b\}$.

تعریف ۲ــ۲.۱ : الف) فرض کنیم یک رابطه‌ی ترتیبی جزئی روی حلقه‌ی $(A, +, .)$ تعریف شده باشد. A را یک حلقه‌ی مرتب جزئی گوییم، در صورتی که موارد زیر برقرار باشند: