دانشگاه اراک

دانشکده علوم— گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش آنالیز ریاضی)

تحت عنوان:

نگاشت‌های ضربی — محیطی جبرهای لیپشیتس و نگاشت‌های پوشای ضعیفاً ضربی محیطی جبرهای لیپشیتس برجسته

استاد راهنما:

دکتر داود علیمحمدی

استاد مشاور:

دکتر سیروس مرادی

توسط:

نرگس ساکی دزفولی

تابستان ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی جبرهای لیپشیتس $Lip(X, d^{\alpha})$ برای $0 < \alpha \leq 1$ می‌پردازیم و برخی از خواص آن‌ها را بیان می‌کنیم که در آن (X, d) یک فضای متریک فشرده است. در ادامه نگاشت‌های ضربی — محیطی بین جبرهای لیپشیتس $Lip(X, d_X)$ و $Lip(Y, d_Y)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و ثابت می‌کنیم هر نگاشت ضربی — محیطی بین جبرهای لیپشیتس $Lip(X, d_X)$ و $Lip(Y, d_Y)$ یک عملگر ترکیبی موزون است. در پایان نگاشت‌های پوشای ضعیفاً ضربی محیطی بین جبرهای لیپشیتس برجسته‌ی $Lip_0(X, d_X)$ و $Lip_0(Y, d_Y)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم هر نگاشت پوشای ضعیفاً ضربی محیطی بین جبرهای $Lip_0(X, d_X)$ و $Lip_0(Y, d_Y)$ یک عملگر ترکیبی موزون است.

واژه‌های کلیدی:

برد محیطی، تابع قله‌ای، جبرهای‌لیپشیتس، جبرهای لیپشیتس برجسته، طیف محیطی، نقطه‌ی پایه‌ای، نگاشت حافظ طیف، نگاشت ضربی — محیطی، نگاشت ضعیفاً ضربی محیطی.

پیش گفتار

جبرهای لیپشیتس[1] اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط دی. آر. شربرت[2] معرفی شدند و خواصی از آن‌ها در [۱۲] و [۱۳] مورد بررسی قرار گرفت.

در سال ۲۰۰۲ مولنر[3] در [۸] ثابت کرد که اگر $C(X)$ جبر باناخ همه‌ی توابع مختلط مقدار بر فضای فشرده‌ی هاسدورف و شمارای نوع اول X باشد که به نرم یکنواخت مجهز شده است و $\Phi : C(X) \longrightarrow C(X)$ یک نگاشت پوشا باشد که به طور ضربی طیف را حفظ می‌کند(به طور معادل به صورت ضربی برد را حفظ می‌کند)، دارای فرمی به صورت زیر است:

$$\Phi(f) = \tau \cdot (fo\varphi), \qquad \forall f \in C(X).$$

که در آن $\tau : X \longrightarrow \{-1,1\}$ یک تا بع پیوسته و $\varphi : X \longrightarrow X$ یک همانریختی است.

رائو[4] و روی[5] در سال ۲۰۰۴ در[۹] نتایج مولنر رابرای جبرهای یکنواخت طبیعی بر فضاهای فشرده‌ی هاسدورف بدست آوردند. در سال ۲۰۰۶ هاتوری[6]، میورا[7] و تاکاجی[8] در[۲] نتایج رائو و روی را برای یک جبر یکنواخت A بر فضای فشرده‌ی هاسدورف دلخواه X، با جایگزین کردن برد $Ran(f) = f(X)$ به جای طیف $\sigma(f)$ و شرط ،

$$Ran(\Phi(f)\Phi(g)) = Ran(fg), \qquad (f, g \in A).$$

ثابت کردند. مشابه همین نتایج را در [۳] برای جبرهای باناخ تعویض پذیر نیمه ساده واحددار نیز بدست آوردند. در سال ۲۰۰۷ لوتمن[9] و تونف[10] در[۷]، یک دیدگاه جدید را با جایگزین

Lipschitz[1]

D. R. Sherbert[2]

Molnar[3]

Rao[4]

Roy[5]

Hatori[6]

Miura[7]

Takagi[8]

Luttman[9]

Tonev[10]

کردن برد محیطی به جای برد یا به طور معادل با جایگزین کردن طیف محیطی به جای طیف، بدست آوردند.

در سال ۲۰۰۸ هاتوری، میورا، اوکا و تاکاجی در[۱] نگاشت‌های ضربی محیطی جبرهای یکنواخت بسته‌ی توابع پیوسته‌ی مختلط مقدار که در بی‌نهایت به صفر میل می‌کنند را بررسی کردند. به‌علاوه در سال ۲۰۰۸ وارگاس [1] و والسیلوس [2] در [۴] نگاشت‌های ضربی محیطی را برای جبرهای توابع لیپشیتس مختلط مقدار بررسی کردند.

در سال ۲۰۰۷ لمبرت [3]، لوتمن و تونف در[۶] نشان دادند که هر نگاشت ضعیفاً ضربی محیطی بین جبرهای یکنواخت (که لزوماً پوشا نیست)،تحت این شرط که توابع قله‌ای را به توابع قله‌ای تصویر کند، یک عملگر ترکیبی موزون است. هم‌چنین در سال ۲۰۱۰ وارگاس، لوتمن و والسیلوس در[۵] نشان دادند که هر نگاشت پوشای ضعیفاً ضربی محیطی مانند $\Phi : Lip_0(X,d_X) \longrightarrow Lip_0(Y,d_Y)$ یک عملگر ترکیبی موزون است، که در آن $Lip_0(X,d_X)$ یک جبر لیپشیتس برجسته و نوع خاصی از جبرهای تعویض‌پذیر بدون واحد است.

در این پایان نامه مقالات [۴] و [۵] را به طور کامل باز نموده و مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند. در فصل دوم جبرهای $Lip(X,d^{\alpha})$ را معرفی نموده و برخی از ویژگی‌های اساسی این جبرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم نگاشت‌های ضربی — محیطی بین جبرهای لیپشیتس $Lip(X,d_X)$ و $Lip(Y,d_Y)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل چهارم نگاشت‌های پوشای ضعیفاً ضربی محیطی بین جبرهای $Lip_0(X,d_X)$ و $Lip_0(Y,d_Y)$ را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

---

[1] Vargas

[2] Vallecillos

[3] Lambert

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل که مشتمل بر پنج بخش است، به بیان مباحثی از فضاهای توپولوژیکی، فضاهای برداری توپولوژیکی، جبرهای باناخ، همریختی‌های مختلط و خواص اساسی طیف‌ها و جبرهای تابعی باناخ می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز است.

۱.۱ فضاهای توپولوژیکی

در این بخش به بیان برخی تعاریف و قضایا درباره‌ی فضاهای توپولوژیکی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد نیاز است.

تعریف ۱.۱.۱ . فرض کنیم X یک مجموعه باشد. یک توپولوژی بر مجموعه‌ی X، گردایه‌ای مانند τ از زیر مجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می کند،

(الف) X و $\emptyset$ به τ تعلق دارند.

(ب) اجتماع هر زیر گردایه‌ی τ، به τ تعلق دارد.

(ج) اشتراک اعضای هر زیر گردایه‌ی متناهی τ، به τ تعلق دارد.

در این صورت X را به همراه توپولوژی τ، فضای توپولوژیک می‌نامیم و عضوهای مجموعه‌ی τ را مجموعه‌های باز می‌نامیم. هم‌چنین اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، همسایگی نقطه‌ی

$x \in X$، مجموعه‌ی بازی است که شامل نقطه‌ی x می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱ . فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متریک بر X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند،

(الف) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq 0$. هم‌چنین $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

(ب) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$.

(ج) به ازای هر $x, y, z \in X$،

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

تعریف ۳.۱.۱ . فضای توپولوژیکی X را یک فضای هاسدورف می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$، همسایگی‌های U و V به ترتیب از x و y موجود باشند، به طوری که

$$U \cap V = \emptyset.$$

تعریف ۴.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. در این صورت

(الف) $p \in X$ را یک نقطه‌ی حدی مجموعه‌ی E می‌نامیم، هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه‌ای مانند $q \in E$ باشد که $q \neq p$.

(ب) هرگاه $p \in E$ و p یک نقطه‌ی حدی E نباشد، آن‌گاه p را یک نقطه‌ی تنهای E می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. هم‌چنین فرض کنیم E' مجموعه‌ی تمام نقاط حدی E در X باشد. در این صورت بستار E عبارت است از $E \cup E'$ و آن را با نماد $\overline{E}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶.۱.۱ . فرض کنیم f یک نگاشت یک به یک و پیوسته از فضای متریک و فشرده‌ی X بروی فضای متریک Y باشد. در این صورت نگاشت معکوس f^{-1}، یک نگاشت پیوسته است.

برهان . [11; 4.17] □

تعریف ۷.۱.۱ . فضای توپولوژیکی X را یک فضای مترپذیر می‌نامیم هرگاه متریکی مانند d بر X وجود داشته باشد، به طوری که توپولوژی القایی توسط متریک d با توپولوژی مفروض بر X یکی باشد.

قضیه ۸.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی مترپذیر و Y یک فضای توپولوژیکی باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را در نظر می گیریم، در این صورت احکام زیر معادلند:

(الف) f یک نگاشت پیوسته است.

(ب) برای هر $x \in X$، اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای از نقاط X باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

قضیه ۹.۱.۱ . فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. هم‌چنین فرض کنیم $x \in X$، در این صورت $x \in \overline{E}$ اگر و فقط اگر $d(x, E) = 0$.

برهان . ابتدا فرض کنیم $x \in \overline{E}$ باشد در این صورت

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad B_d(x, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \quad &\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in E \quad : \quad d(x, y) < \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \inf\{d(x, y) : \quad y \in E\} = 0 \\ &\Rightarrow \quad d(x, E) = 0. \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنیم $d(x,E)=0$، در این صورت

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0 \quad d(x,E)<\varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \forall\varepsilon>0 \quad \inf\{d(x,y) \ : \ y\in E\}<\varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists y\in E \ : \ d(x,y)<\varepsilon \\ &\Rightarrow \quad \forall\varepsilon>0 \quad E\cap B_d(x,\varepsilon)\neq\emptyset \\ &\Rightarrow \quad x\in\overline{E}.\end{aligned}$$

□

تعریف ۱۰.۱.۱ . فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی فشرده‌ی هاسدورف باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی توابع مختلط پیوسته بر X را با $C(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ . گوییم خانواده‌ی F از توابع بر مجموعه‌ی X، نقاط X را جدا می‌کند هرگاه به ازای هر $x,y\in X$ که $x\neq y$، عضوی از F مانند f موجود باشد به طوری که،

$$f(x)\neq f(y).$$

تعریف ۱۲.۱.۱ . گردایه‌ای مانند ξ از زیر مجموعه‌های X را گوییم در شرط مقطع متناهی [1] صدق می‌کند در صورتی که به ازای هر زیر گردایه‌ی متناهی از آن، مانند $\{C_1,...,C_n\}$، **مقطع** $C_1\cap...\cap C_n$ ناتهی باشد.

قضیه ۱۳.۱.۱ . هرگاه $\{K_\alpha\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده‌ی فضای متریک X باشد به طوری که در شرط مقطع متناهی صدق کند، آن‌گاه $\bigcap K_\alpha$ ناتهی خواهد بود.

برهان . $[11; 2.36]$ □

---

[1] Finite Intersection Property

تعریف ۱۴.۱.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را یک همانریختی می‌نامیم هرگاه f دوسویی بوده و f و f^{-1} هردو پیوسته باشند.

۲.۱ فضاهای برداری توپولوژیکی

در این بخش به معرفی فضاهای برداری توپولوژیکی و فضاهای باناخ می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱ . فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ مجموعه‌ای مانند X است که عناصرش را بردار می‌نامیم و در آن دو عمل دوتایی به نام‌های جمع و ضرب اسکالر (تابعی از $\mathbb{K} \times X$ بتوی X) تعریف شده است به طوری که از خواص زیر برخوردار می‌باشد،

(الف) عمل جمع جابه جایی و شرکت پذیر است، یعنی برای هر $x, y, z \in X$ ،

$$x + y = y + x \quad , \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

(ب) X شامل بردار منحصر به فردی مانند 0(بردار صفر یا مبدا X) است به طوری که به ازای هر $x \in X$، $x + 0 = x$.

(ج) به ازای هر $x \in X$، بردار منحصر به فردی مانند $-x$ موجود است به طوری که

$$x + (-x) = 0.$$

(د) به ازای هر $x \in X$، $1x = x$.

(ه) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$، $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

(و) دو قانون توزیع پذیری

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \qquad \forall x, y \in X, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

و

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \qquad \forall x \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},$$

برقرارند.

تعریف ۲.۲.۱ . فضای برداری مختلط X را یک فضای نرمدار می‌گوییم هرگاه به ازای هر عضو x از X، یک عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$ (نرم x) نظیر شود به طوری که

(الف) $(x, y \in X)$ $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(ب) $(x \in X, \alpha \in \mathbb{C})$ $\quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

(ج) $(x \in X)$ $\quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

در این صورت $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرمدار(مختلط) می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱ . فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متر بر X است که آن را متریک حاصل از $\|.\|$ بر X می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ . یک فضای باناخ عبارت است از یک فضای نرمدار که تحت متریک حاصل از نرمش تام باشد، به عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

در این قسمت یک شرط کافی برای آن‌که یک فضای نرمدار یک فضای باناخ باشد ارائه می‌دهیم.

قضیه ۵.۲.۱ . فرض کنیم $(E, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. در این صورت $(E, \|.\|)$ یک فضای باناخ است اگر هر دنباله‌ی $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ در E که در شرط

$$\|y_n - y_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

صدق می‌کند، یک دنباله‌ی همگرا در این فضا باشد.

برهان . فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی کوشی در $(E, \|.\|)$ باشد. در این صورت

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m \;\; \forall n \;\; \Big(m \geq N, n \geq N \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon\Big).$$

لذا

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{2} \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall m \;\; \forall n \;\; \Big(m \geq N_1, n \geq N_1 \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2}\Big),\\
\varepsilon &= \frac{1}{2^2} \quad \exists N_2 > N_1 \quad \forall m \;\; \forall n \;\; \Big(m \geq N_2, n \geq N_2 \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^2}\Big).\\
&\vdots
\end{aligned}$$

با ادامه‌ی این روند دنباله‌ی اکیداً صعودی $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathbb{N}$ بدست می آید به طوری که

$$\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| < \frac{1}{2^k}.$$

لذا طبق فرض دنباله‌ی $\{x_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ در E همگرا است. پس $x \in E$ی موجود است به طوری که $\lim_{n\to\infty} \|x_{N_k} - x\| = 0$. نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$، یعنی،

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \; \Big(n \geq N \Longrightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon\Big).$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ انتخاب شده باشد. چون $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی کوشی است داریم

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall m \;\; \forall n \;\; \Big(m \geq N_1, n \geq N_1 \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{۱.۱}$$

به علاوه از این که $\lim_{n\to\infty} \|x_{N_k} - x\| = 0$ نتیجه می گیریم

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \;\; \Big(k \geq N_2 \Longrightarrow \|x_{N_k} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{۲.۱}$$

حال قرار می‌دهیم $N := \max\{N_1, N_2\}$ و فرض کنیم $n \geq N$. در این صورت چون $N_n \geq n$ لذا با توجه به (۱.۱) و (۲.۱) داریم

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\| &= \|x_n - x_{N_n} + x_{N_n} - x\|\\
&\leq \|x_n - x_{N_n}\| + \|x_{N_n} - x\|\\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. در نتیجه دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است و لذا $(E, \|.\|)$ یک فضای باناخ است. $\square$

قضیه ۶.۲.۱ . فرض کنیم $(E, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. در این صورت $(E, \|.\|)$ یک فضای باناخ است هرگاه هر سری مطلقاً جمع‌پذیر در E، جمع‌پذیر باشد. به عبارت دیگر اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از نقاط E بوده و $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ همگرا باشد آن‌گاه $x \in X$ی هست به طوری که $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} x_k - x\| = 0$.

برهان . فرض کنیم که هر سری مطلقاً جمع‌پذیر در E، جمع‌پذیر باشد.برای اثبات باناخ بودن $(E, \|.\|)$ با توجه به قضیه‌ی ۵.۲.۱، کافی است نشان دهیم اگر $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از نقاط E باشد به طوری که

$$\|y_n - y_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{۳.۱}$$

آن‌گاه $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی همگرا در $(E, \|.\|)$ است. فرض کنیم $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاط E باشد به طوری که در شرط (۳.۱)، صدق کند. دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از نقاط E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\begin{aligned} x_1 &:= y_1, \\ x_n &:= y_{n+1} - y_n, \qquad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| &= \|y_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} \|y_{n+1} - y_n\| \\ &\leq \|y_1\| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \|y_1\| + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

در نتیجه سری $\sum_{n+1}^{\infty} x_n$ مطلقاً جمع‌پذیراست. بنابراین طبق فرض یک سری جمع‌پذیر است. لذا $x \in E$ی موجود است به طوری که $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n &= x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n = x_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} x_k \\ &= x_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} (y_{k+1} - y_k) \\ &= x_1 + \lim_{n\to\infty} (y_{n+1} - y_2). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1} = x - x_1 + y_2 = x + y_2 - y_1.$$

لذا

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x + y_2 - y_1.$$

بنابراین دنباله‌ی $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است. □

تعریف ۷.۲.۱ . فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط و τ یک توپولوژی بر X باشد به طوری که

(الف) به ازای هر $x \in X$، مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد.

(ب) اعمال جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

در این صورت τ را یک توپولوژی برداری بر X و X را یک فضای برداری توپولوژیکی می‌نامیم.

به عنوان مثال فضاهای نرمدار، فضاهای برداری توپولوژیکی هستند.

تعریف ۸.۲.۱ . متریک d بر فضای برداری مختلط X را پایا می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

$$d(x+z, y+z) = d(x, y).$$

تعریف ۹.۲.۱ . فضای برداری توپولوژیکی مختلط X را یک $F-$ فضا می‌گوییم هرگاه توپولوژی τ آن به وسیله‌ی یک متر پایای تام مانند d القا شده باشد.

قضیه ۱۰.۲.۱ . هر فضای برداری توپولوژیکی یک فضای هاسدورف است.

برهان. [10; 1.12]. □

تعریف ۱۱.۲.۱ . نگاشت T از فضای برداری X بتوی فضای برداری Y را یک تبدیل خطی (نگاشت خطی) گوییم، هرگاه

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \qquad (x, y \in X \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}).$$

هر تبدیل خطی از فضای برداری X بتوی میدان $\mathbb{K}$ را یک تابعک خطی می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱ . فرض کنیم (X, d) و (Y, ρ) دو فضای متریک باشند. نگاشت $h : X \longrightarrow Y$ را طولپای (یکمتری) می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in X$، داشته باشیم

$$\rho(h(x_1), h(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

قضیه ۱۳.۲.۱ . فرض کنیم $(X, \|.\|)$ و $(Y, |||.|||)$ دو فضای نرمدار باشند و d متریک حاصل از $\|.\|$ بر X و ρ متریک حاصل از $|||.|||$ بر Y باشند. هم‌چنین فرض کنیم $T : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت T یک نگاشت طولپای از فضای متریک (X, d) به فضای متریک (Y, ρ) است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$،

$$|||T(x)||| = \|x\|.$$

برهان . واضح است. $\square$

تعریف ۱۴.۲.۱ . زیر مجموعه‌ی E از فضای برداری توپولوژیکی X را کراندار می‌گوییم هرگاه به ازای هر همسایگی V از 0 در X، عددی مانند $s > 0$ چنان نظیر باشد که به ازای هر $t > s$، $E \subseteq tV$.

تعریف ۱۵.۲.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای برداری توپولوژیکی مختلط باشند. نگاشت خطی $\Lambda : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت خطی کراندار می‌نامیم هرگاه تصویر هر مجموعه‌ی

کراندار در X، مجموعه‌ای کراندار در Y باشد. به عبارت دقیق‌تر اگر $E \subseteq X$ یک مجموعه‌ی کراندار در X باشد آن‌گاه $\Lambda(E)$ یک مجموعه‌ی کراندار در Y باشد.

قضیه ۱۶.۲.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند، نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ کراندار است اگر و فقط اگر عدد مثبت ثابتی مانند M موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$،

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

تعریف ۱۷.۲.۱ . فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. مجموعه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم. اگر $X = Y$، آن‌گاه $B(X,X)$ را به اختصار با $B(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۸.۲.۱ . فرض کنیم $(X, \|.\|)$ و $(Y, |||.|||)$ دو فضای نرمدار باشند.

(الف) به هر $\Lambda \in B(X,Y)$ عدد $\|\Lambda\| = \sup\{|||\Lambda(x)||| \ : \ x \in X, \|x\| \leq 1\}$ را مربوط می‌کنیم و آن را نرم عملگری Λ می‌نامیم. این تعریف فضای $B(X,Y)$ را به یک فضای نرمدار تبدیل می‌کند. اگر Y فضای باناخ باشد آن‌گاه $B(X,Y)$ نیز فضایی باناخ است.

(ب) اگر $\Lambda \in B(X,Y)$، آن‌گاه $|||\Lambda x||| \leq \|\Lambda\|\|x\|$.

برهان .$[10; 4.1]$. $\square$

قضیه ۱۹.۲.۱ . (قضیه‌ی نگاشت معکوس) فرض کنیم X و Y دو F — فضا باشند و Λ یک نگاشت خطی پیوسته و یک به یک از X بروی Y باشد. در این صورت $\Lambda^{-1} : Y \longrightarrow X$ یک نگاشت پیوسته است.

برهان . $[10; 2.12]$ $\square$

قضیه ۲۰.۲.۱ . (قضیه‌ی گراف بسته) فرض کنیم

(الف) X و Y دو F — فضا باشند؛

(ب) $\Lambda : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد؛

(ج) $G_\Lambda = \{(x, \Lambda x) \ : \ x \in X\}$ یک مجموعه‌ی بسته در $X \times Y$ با توپولوژی حاصل ضربی باشد.

در این صورت Λ پیوسته است.

برهان. $[10; 2.15]$. □

تبصره۲۱.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو F — فضای مختلط بوده و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:

(الف) مجموعه‌ی $G_\Lambda = \{(x, \Lambda x) \ : \ x \in X\}$ یک مجموعه‌ی بسته در $X \times Y$ با توپولوژی حاصل‌ضربی است.

(ب) اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از نقاط X باشد به طوری که $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X همگرا به $x \in X$ و $\{\Lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در Y همگرا به $y \in Y$ باشند، آن‌گاه $y = \Lambda x$.

۳.۱ جبرهای باناخ

در این بخش با معرفی جبرهای باناخ به بیان مقدماتی درباره‌ی این جبرها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱ . فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد و یک عمل ضرب روی آن تعریف شده باشد به طوری که در خواص زیر صدق کند:

(الف) عمل ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر باشد، یعنی، برای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad (a+b)c = ac + bc.$$

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{K}$ و هر $a, b \in A$،

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b).$$

(ج) عمل ضرب شرکت‌پذیر باشد.

در این صورت A را یک جبر روی میدان K می‌نامیم.

اگر $\mathbb{K}$ میدان اعداد مختلط باشد، A را جبر مختلط می‌نامیم.

تعریف ۲.۳.۱ . فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، در این صورت

(الف) جبر A را تعویض‌پذیر می‌گوییم، هر گاه عمل ضرب در A تعویض‌پذیر (جابه جایی) باشد، یعنی به ازای هر $a, b \in A$،

$$ab = ba.$$

(ب) جبر A را واحد دار می‌گوییم، هرگاه عضوی از A مانند 1 وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$،

$$a1 = 1a = a.$$

در این صورت عنصر $1 \in A$ را واحد جبر می‌نامیم.

(ج) عضو a از A را وارون‌پذیر می‌گوییم، هرگاه عضو a^{-1} در A موجود باشد به طوری که

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

(د) زیر مجموعه B از A را یک زیر جبر A می‌نامیم، هر گاه B تحت همان اعمال جمع و ضرب و ضرب اسکالر روی A، خود یک جبر باشد.

به آسانی دیده می‌شود $B \subseteq A$ زیر جبری از A است اگر و فقط اگر B تحت اعمال جمع، ضرب و ضرب اسکالر بسته باشد.

تعریف ۳.۳.۱ . فرض کنیم A یک جبر مختلط باشد و $\|.\| : A \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نرم بر فضای برداری مختلط A باشد به طوری که به ازای هر $a, b \in A$،

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$