دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

آرنز منظم اعمال مدولی
ومراکز توپولوژیکی دوگان دوم جبرهای باناخ

تدوین

یاسر مرادی

استاد راهنما

دکتر جواد لاآلی

خرداد۸۸

Fuculty of Mathematical Sciences and Computer

Pure Mathematics (Analysis)

Title

Arens Regularity of Module Action and Topological Centers of the Second dual Banach Algebras

A thesis submitted in partial fulfilment of the Requirements for the Degree of Master of Science (MSc)

By

Yaser Moradi

Supervisor

Dr. J. Laali

June 2009

فهرست مطالب

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم

فصل ششم

فصل هفتم

چکیده

فرض کنید جبر باناخ A دارای همانی تقریبی کراندار باشد. $Z(A^{**})$ و $Z^t(A^{**})$ را مراکز توپولوژیکی چپ وراست A^{**} در نظر می گیریم. در اینجا، مفهوم آرنز منظم از عملهای مدول چپ یا راست را روی جبرهای باناخ در نظر می گیریم. نشان می دهیم که، اگر A دارای همانی تقریبی راست (چپ)باشد آنگاه، عمل مدول راست(چپ) A روی A^* ، آرنز منظم است اگر وتنها اگر A انعکاسی باشد .

همچنین، مفهوم آرنز منظم را با استفاده از تجزیه A^* یا A^{**} (به عاملها)، وقتی که A ایده ال راست یاچپ A^{**} است، مورد بررسی قرار می دهیم. در نهایت، نشان می دهیم که،

۱) تساوی $A^*A = AA^*$ برای برقراری تساوی $Z^t(A^{**}) = \mathrm{Z}(\mathrm{A}^{**})$ کافی نیست .

۲) جبر باناخ A ای موجود است که $\hat{A}Z(A^{**}) \subseteq \hat{A}$ ، ولی $Z^t(A^{**})\hat{A} \nsubseteq \hat{A}$.

۳) جبر A ای موجود است که A قویاً نامنظم است اما با توپولوژی ضعیف کامل دنباله ای نیست .

۴) تساوی $AA^* = A^*$ و $A^*A = A^*$ برای برقراری تساوی $Z^t(A^{**}) = \mathrm{Z}(\mathrm{A}^{**})$ کافی نیست .

که اینها جوابهای چهار پرسشی است که در مقاله اولگر ولائو [۱۷]مطرح شده اند.

رده بندی موضوعی ریاضی 2000 : 43A10,46H25

واژه های کلیدی . ضرب آرنز، مراکز توپولوژیکی، قویاً آرنز نامنظم، اعمال مدولی

پیشگفتار

یکی از مفاهیم بسیار اساسی، در دوگان دوم جبرهای باناخ، مفهوم آرنز منظم است. این مفهوم توسط آرنز در سال ۱۹۵۱ارائه شد. این پایان نامه براساس مقالات

(i) F. Ghahramani, J. P. Mc Clure and M. Meng, *On asymmetry of topological centers of the second dual of Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 126(1998),1765-1768.*
(ii) *M. Eshaghi Gordji and M. Filali, Arens regularity of module action, Studia Math. 181 (2007), 237-254 .*

(iii) *A. T. -M. Lau and A. Ulger, Topological centers of certain dual algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 384 (1996),1191-1212.*

تدوین شده است که، مقالات (i)و(ii) بطور کامل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته اند واز مقاله (iii) نیز، در بخشهای ۴ و۵ ، استفاده شده است.

در بخش (۱)، به ارائه برخی تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیازمی پردازیم، که در بخش های بعدی از آنها استفاده خواهیم کرد .

در بخش (۲)، ابتدا مراحل مختلف توسیع یک نگاشت دو خطی از فضاهای باناخ به دوگان دوم آن را بیان نموده وزمینه را برای تعریف ضرب آرنز مهیا می کنیم. سپس، به کمک ضرب آرنز، مراکز توپولوژیک را تعریف می کنیم .

در بخش (۳)، ثابت می کنیم که اگر A دارای همانی تقریبی کراندار راست(چپ) باشد آنگاه عمل مدول راست (چپ) A روی A^* آرنز منظم است اگر و تنها اگر A انعکاسی باشد . همینطور، این بخش شامل نتایج اثبات شده ای است که توسط اریکان در [۱]، اولگردر [۲۴]، دیلز و رودریگز و ولاسکو در [۶] بیان شده است .

در بخش (۴)، ثابت می شود که اگر Aکه دارای یک همانی تقریبی راست(چپ) کراندارباشد به طوری که عمل مدول چپ (راست) از Aروی $A^{(2k)}$ (یا $A^{(2k-1)}$) آرنز منظم گردد آنگاه A آرنز منظم است .

همینطور، اگر A دارای همانی تقریبی راست کراندار و قویاً نامنظم چپ (راست) باشد آنگاه عمل مدول چپ (راست) از A روی $A^{(2k)}$ (یا$A^{(2k-1)}$) برای هر $k \geq 1$ قویاً آرنز نامنظم است .

در بخش (۵)، ثابت می کنیم که A آرنز منظم است در صورتی که A^* عامل و A ایده ال چپی در A^{**} باشد .

حال اگر A^{**} تجزیه شود و A ایده ال راستی درA^{**} باشد نتیجه ای مشابه بدست می آید .

همچنین، به ارتباط نقطه های حدی –ضعیف ستاره در A^{**} از یک همانی تقریبی کرانداردر A وتجزیه A^* به عاملها می پردازیم .

در بخش(۶)، دوباره مثالهایی را، که توسط قهرمانی در [۱۴]پاسخ داده شده، بررسی می کنیم و در قضیه۱.۶ رده ای از جبرهای باناخ ارائه می دهیم که قویاً نامنظم آرنز چپ هستند ولی قویاً نامنظم آرنز راست نیستند. این رده شامل آخرین مثالی است که توسط دیلز و لائو در [۷] ارائه شده است . نوع دیگر از این مثالها، توسط نئوفانگ، در [۱۹] پاسخ داده شده است .

قضیه ۱.۶ ما را قادر می سازد که مثالی از جبرهای باناخ که نه ارنز منظم است و نه قویاً آرنز نامنظم چپ، ارائه دهیم. یک مثال ساده تر از این نوع جبرها توسط خانم سقفی در [۲۱] ارائه شده است .

در بخش (۷)، مراکز توپولوژیکی جبرهای باناخ مثلثی را ارائه می دهیم به طوری که در [۱۲]، فارست و مارکس آرنز منظم را در این جبرها را مورد بررسی قرار دادنده اند. از این مراکز توپولوژیکی برای نشان دادن احکام زیر استفاده می کنیم .

i) تساوی $A^*A = AA^*$ برای برقراری تساوی$Z^t(A^{**}) = Z(A^{**})$ کافی نیست .

ii) تساوی $Z^t(A^{**}) = Z(A^{**})$ و $A^*A = A^*$ برای برقراری تساوی $AA^* = A^*$ کافی نیست .

iii) جبر A ای موجود است که A قویاً نامنظم است اما با توپولوژی ضعیف یک فضای کامل دنباله ای نیست .

فصل اول

تعاریف وقضایای مقدماتی

۱.۱ تور

تور توسیعی است از مفهوم دنباله، این مفهوم در سال ۱۹۲۲ توسط *مور*[1] *و اسمیت*[2] معرفی شده اند. از آنجایی که از دنباله برای بررسی مفاهیم آنالیز استفاده می کنیم، از تورنیز می توان درهر فضای توپولوژیک دلخواه استفاده کرد.

تعریف.۱.۱.۱. مجموعه Γ با رابطه $\leq$را یک مجموعه جزئاً مرتب گوییم هرگاه دارای خواص انعکاسی، پادتقارنی و ترایایی باشد. حال مجموعه جزئاً مرتب $(\Gamma,\leq)$ جهت دار نامیده می شود در صورتی که به ازای هرβ وα ازΓ عضوی مانند γ از Γ موجود باشد به طوری که$\beta \leq \gamma$ و $\alpha \leq \gamma$.

تعریف ۲.۱.۱. زیر مجموعه ای مانند K ازمجموعه Γ را همپایان در Γ گوییم هرگاه، به ازای هر γ از Γ عضوی ازK مانندα موجود باشد که $\gamma \leq \alpha$.

تعریف ۳.۱.۱.یک تور، درX، تابعی مانند x از مجموعه جهت داری مانند I بتوی X است، که به

[1] Moor
[2] Smith

ازای $\alpha \in \mathrm{I}$، معمولا $x(\alpha)$ را با x_α نمایش می دهیم. خود تور x را با نماد $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ نمایش می دهیم.

گوییم تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در X به x همگراست در صورتی که به ازای هر همسایگی x، مانند U، عضوی از I مانند β موجود باشد که به ازای هر $\alpha \in \mathrm{I}$ که $\alpha > \beta$، $x_\alpha \in U$.

قضیه ۴.۱.۱. فرض کنید که X و Y دو فضای توپولوژی باشند و $f: X \to Y$. دراین صورت، f پیوسته است اگر وتنها اگر به ازای هر توری مانند $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ که در X همگرا به x باشد، تور $(f(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ به $f(x)$ در Y همگرا شود .

اثبات. ابتدا فرض کنیدتابع f درنقطه x پیوسته باشد وتور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در X به xهمگرا باشد. نشان می دهیم تور $(f(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ به $f(x)$ در Y همگراست. فرض کنید، Vیک همسایگی از $f(x)$ در Yباشد. چون f پیوسته است پس همسایگی مانند U از x در X موجود است به طوری که $U \subseteq f^{-1}(V)$. از طرفی چون تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ همگرا به x است و $x \in U$، بنابراین، β ای موجود است که به ازای هر $\alpha > \beta$ ، $x_\alpha \in U \subseteq f^{-1}(V)$. از اینجا نتیجه می شودکه به ازای هر $\alpha > \beta$داریم، $f(x_\alpha) \in V$. در نتیجه، تور$(f(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ به $f(x)$ همگرا می شود .

بالعکس. برای پیوستگی f تنها کافیست ثابت کنیم که، اگر A زیر مجموعه دلخواهی از X باشد آنگاه، $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. (برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به [۱۸؛ ۷.۱])

بنابراین، $x \in \bar{A}$. بنابراین توری چون $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ در A موجود است که همگرا به x است (برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۸]صفحه ۱۸۷ مراجعه کنید). بنا بر فرض تور $(f(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ به $f(x)$ همگراست. از طرفی به ازای هرα ، $f(x_\alpha) \in f(A)$. بنابراین$f(x) \in \overline{f(A)}$.

لذا، $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. ■

تعریف۵.۱.۱. $x \in X$ را نقطه حدی تور $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ گوییم هرگاه، به ازای هرهمسایگی U از x ، مجموعه $\Gamma = \{\alpha: x_\alpha \in U\}$ ، در I همپایان باشند. به عبارتی به ازای هر $\beta \in I$ ، عضوی از Γ

مانند α موجود باشد به طوری که، $\beta \leq \alpha$.

۲.۱ فضای اندازه

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه و Ω گردایه ناتهی از زیرمجموعه های آن باشد. Ω را یک $\sigma-$ جبراز مجموعه ها نامیم، اگر دردو خاصیت زیر صدق کند

(۱) اگر $A\epsilon\Omega$ ، آنگاه $A^c\epsilon\Omega$.

(۲) اگر به ازای هر n که ... $n = ۱, ۲,$ ، $A_n\epsilon\ \Omega$ ، آنگاه $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ در Ω باشد .

تعریف ۲.۲.۱. اگر Ω یک σ–جبر باشد آنگاه (X, Ω) یک فضای اندازه پذیر نامیده می شود و اعضای Ω ، را مجموعه های اندازه پذیر می نامیم .

تعریف ۳.۲.۱. نگاشت مجموعه ای $\mu{:}\,\Omega \to [0, \infty]$ رایک اندازه می نامیم درصورتی که

(۱) $\mu(\emptyset) = o$.

(۲) فرض کنید به ازای هر $i, j \in \mathrm{I}$،که $i \neq \mathrm{j}$ است، $A_i \cap A_j = \emptyset$. دراین صورت،

$$\mu\left(\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

تعریف ۴.۲.۱. (X, Ω, μ) را یک فضای اندازه گوئیم.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، اعضای کوچکترین $\sigma-$ جبر شامل تمام مجموعه های بازدر X مجموعه بورل نامیده می شود. اندازه μ تعریف شده بر σ - جبر تمام مجموعه های بورل، درفضای هاسدورف و موضعا فشرده X ، اندازه بورل روی X نام دارد .

تعریف ۵.۲.۱ . μ را یک اندازه رادون نامیم در صورتی که

(۱) به ازای هر مجموعه فشرده چون K، داشته باشیم $\mu(K) < \infty$.

(۲) به ازای هر مجموعه باز چون A، داشته باشیم $\mu(A) = sup\left\{\mu(\mathrm{K}) : \mathrm{K} \subseteq \mathrm{A}, \text{فشرده } \mathrm{K}\right\}$.

(۳) اگر A مجموعه ای بورل باشدآنگاه، $\mu(A) = inf\left\{\mu(V) : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{V}, \text{باز } \mathrm{V}\right\}$ ،

اندازه رادون μ را اندازه هار نامیده می شوددر صورتی که، ثبه ازای هرعضو از گروه موضعا فشرده G ، مانند x ومجموعه بورل $E \subseteq G$، داشته باشیم، $\mu(xE) = \mu(Ex) = \mu(E)$.

توجه کنید که هر زیر مجموعه X یک مجموعه اندازه پذیر نیست. ما می توانیم اندازه ای را به گونه ای تعریف کنیم که بعضی از زیر مجموعه های X اندازه پذیر نباشند .

مثال. ۶.۲.۱.فرض کنید که $X = \{a, b, c\}$ و $\Omega = \{\phi, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. دراین صورت Ω یک $\sigma -$ جبربر رویX است. حال فرض کنید که$\mu : \Omega \to [0, \infty]$ به صورت ذیل تعریف می شود.

$$\mu(\phi) = 0 \text{ و } \mu(\{a\}) = \mu(\{b, c\}) = ۱ \text{ ، } \mu(X) = ۲$$

در این صورت μیک اندازه بر Ω است. می دانیم که اندازه خارجی μ به صورت ذیل تعریف می شود. بافرض $A \subseteq X$،

$$\mu^*(A) = inf\{\sum \mu(A_n) : \{A_n\} \subseteq \Omega, A \subseteq \cup A_n\}$$

واگر مجموعه A را نتوانیم با اعضایΩ بپوشانیم آنگاه، $\mu^*(A) = inf\phi = +\infty$.

$$\mu^*(\{b\}) = \mu^*(\{c\}) = ۱ \text{ و } \mu^*(\{a, b\}) = \mu^*(\{a, c\}) = ۲ \text{ .}$$

اما مجموعه های $\{a, b\}$و$\{a, c\}$نسبت به اندازه μ^* ، اندازه پذیر نیستند. زیرا، خاصیت $\sigma -$ جمعی μ^* برقرار نیست .

$$۲ = \mu^*(X) = \mu^*(\{a, b\} \cup \{c\}) \neq \mu^*(\{a, b\}) + \mu^*(\{c\}) = ۲ + ۱$$

مثال دیگر، مثال معروف وینالی است که ثابت می کند که اگر $X = [0, ۱]$ ، زیر مجموعه ای از X موجوداست که با اندازه لبگ، اندازه پذیرنیست .

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید X یک فضای اندازه و Y یک فضای برداری توپولوژیک و $f : X \to Y$

، یک نگاشت باشد. در این صورت، اگر به ازای هر مجموعه باز v در Y، $f^{-۱}(v)$ مجموعه اندازه پذیر باشد آنگاه f اندازه پذیر است .

می توان تابعی ارائه داد که اندازه پذیر نباشد. به عنوان مثال، فرض کنید که اگر χ_A تابع مشخصه بر A باشد؛ یعنی،

$$\chi_A = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

فرض کنید که $Y = [0, \infty]$ و $\mu : \Omega \to [0, \infty]$اندازه ای باشد که در **مثال ۶.۲.۱** تعریف شده است. اگر $A = \{a, b\}$ و $V = (0, ۲)$، آنگاه، $\chi_A^{-۱}(V) = A$. که A نسبت به اندازه μ، مجموعه ای اندازه پذیر نیست. بنابراین χ_A تابعی اندازه پذیر نیست .

فضای L^p

فرض کنید، X یک فضای اندازه دلخواه با اندازه مثبت μ باشد .

تعریف ۸.۲.۱ . فرض کنید، $۱ \leq p < \infty$ و f یک تابع اندازه پذیر مختلط بر X باشد .

در این صورت، تعریف می کنیم

$$\|f\|_p = \left(\int_x |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{۱}{p}}$$

و $L^p(\mu)$ از تمام f هایی تشکیل شده است که، $\|f\|_p < \infty$.

به عبارت دیگر

$$L^p(\mu) = \left\{ f: X \xrightarrow{\text{اندازه پذیر}} \mathbb{C}: \|f\|_p < \infty \right\}$$

اگر μ اندازه ی شمارشی بر مجموعه Aباشد، معمولا فضای L^p نظیر را با $l^p(A)$ و اگر A شمارش پذیر باشد فقط با l^p نمایش می دهیم .

به همین ترتیب تعریف می کنیم

$$L^{\infty}(A)=\left\{f\colon A\xrightarrow{\text{اندازه پذیر}}\mathbb{C} : \|f\|_{\infty}=\underset{x\in A}{ess\ Sup}|f(x)|<\infty\right\}$$

قضیه ۹.۲.۱. فرض کنید G یک گروه موضعا فشرده باشد و $1<p<\infty$ و q عددی است که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ، (واضح است که $p=1$ آنگاه $q=+\infty$) μ اندازه هار چپ باشداگر $\varphi\in L^p(G)$.
دراین صورت، عضومنحصر به فردی مانند، $g\in L^q(G)$ وجود دارد که $f\in L^p(G)$ و
$\varphi(f)=\int fgd\mu$.به علاوه $\|\varphi\|=\|g\|_q$. به عبارت دیگر، $L^q(G)$ بافضای دوگان $L^p(G)$ به طورطولپا یک ریخت است .

جهت اطلاع بیشتر می توانید به مرجع [۵؛۳.۳.۵] مراجعه کنید .

نتیجه ۱۰.۲.۱. $\left(L^1(\mathrm{G})\right)^*=L^{\infty}(\mathrm{G})$.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید که $\{x_n\}$ دنباله ای از اعداد مختلط باشد. در این صورت ،

$c_{00}=\{x=(x_n): \exists k\ \ \forall \mathrm{n}\quad (n>k=x_n=0)\}$ و $\|x\|=\|x\|_{\infty}$

$c_0=\{x=(x_n): \lim_n x_n=0\}$ و $\|x\|=\|x\|_{\infty}$

$c_0^*=l^1(\mathbb{N})=\{x=(x_n): \sum|x_n|<\infty\}$ و $\|x\|=\sum|x_n|$

$c_0^{**}=(l^1(\mathbb{N}))^*=l^{\infty}(\mathbb{N})$ و $\|x\|=\|x\|_{\infty}$

$c=\left\{x=(x_n): \text{دنباله}\{x_n\}\text{ همگراست}\right\}$ و $\|x\|=\|x\|_{\infty}$

بنابراین، رابطه ذیل برقرار است .

$$c_{00}\subseteq l^1(\mathbb{N})\subseteq c_0\subseteq c\subseteq l^{\infty}(\mathbb{N})$$

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم τوτ' دو توپولوژی روی مجموعه X باشند و $\tau\subseteq\tau'$. در این حالت می گوئیم τ درشتر (ضعیف تر) از τ'است ویا τ' قوی تر یا ظریفتر از τاست .

نکته. یادآوری می کنیم که هر زیر فضای بسته یک فضای فشرده ، فشرده است. هر زیر مجموعه فشرده ازیک فضای هاسدورف مجموعه ای بسته است. برای اطلاعات بیشتر به [۱۸ بخش۳]مراجعه کنید .

مثال۱.۲.۱۳. اگر τ, τ' دو توپولوژی بر X باشد و$\tau \subseteq \tau'$. اگر (X, τ) یک فضای هاسدورف و (X, τ') فشرده باشد آنگاه $\tau = \tau'$.

برای اثبات اینکه $\tau = \tau'$ ، کافی است نشان دهیم که $\tau' \subseteq \tau$.

فرض کنید$U \in \tau'$ پس $X - U$در τ' بسته است. چون هر زیر مجموعه بسته از یک فضای فشرده ، فشرده است. پس $X - U$ در τ' فشرده است. ازطرفی $\tau \subseteq \tau'$ ، پس$X - U$ در τ مجموعه ای فشرده است. چون (X, τ) هاسدورف است، پس $X - U$ در τ بسته است پس در نتیجه U ، درτ باز است .

قرارداد . می دانیم اگر X وY فضای برداری توپولوژیک باشند، آنگاه، $B(X, Y)$ نمایانگر مجموعه نگاشت های خطی، کرانداراز X بهY است. (اگر H یک فضای هیلبرت باشدو $X = Y = H$ آنگاه $B(X, Y)$ را بانماد $B(H)$ ، نشان می دهیم .)

۱.۳. توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره

فرض کنید Xیک فضای نرم دارو $X^* = B(X, \mathbb{C})$ دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده توسطX^* روی X را(یعنی، ضعیف ترین توپولوژی روی X که هر $x' \in X^*$ تحت آن پیوسته است.)توپولوژی ضعیف روی X می نامیم. آن را با نماد $\sigma(X, X^*)$ یاw–توپولوژی نمایش دهیم و نماد $\langle f, x \rangle$ رابرای $f(x)$ به کار می بریم .

تور (x_α) با توپولوژی ضعیف به x در X همگرا است، اگر و تنها اگر به ازای هر، $x' \in X^*$ داشته باشیم، $\lim\limits_{\alpha} \langle x', x_\alpha \rangle = \langle x', x \rangle$.

حال اگر برای هر x در X، نگاشت $f_x: X^* \to \mathbb{C}$ رابا ضابطه $f_x(x') = \langle x', x\rangle$ تعریف کنیم، بوضوح یک تابعک خطی روی X^* ایجاد می شود. گاهی به جای f_x از نماد $\hat{x}$ استفاده می کنیم .

توپولوژی تولید شده توسط X^{**} روی X^* در حقیقت همان توپولوژی ضعیف روی X^* است .

توپولوژی تولید شده توسط X روی X^* ،را که ضعیفترین توپولوژی روی X^* است که f_x نسبت به آن توپولوژی پیوسته است؛ توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می نامیم و آنرا با نماد $\sigma(X^*, X)$ یا w^*-توپولوژی نشان می دهیم .

تور (x'_α) در X^* باتوپولوژی ضعیف ستاره به x' در X^* همگرا است، اگر وتنها اگر، به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\lim_\alpha \langle x'_\alpha, x\rangle = \langle x', x\rangle$. در این صورت، می نویسیم $x'_\alpha \xrightarrow{w^*} x'$ یا $w^* - \lim_\alpha x'_\alpha = x'$.

قضیه.۱.۳.۱. اگر X یک فضای برداری نرم دار باشد و دنباله (x_α) در توپولوژی اولیه با نرم آن همگرا به x باشد آنگاه $x_\alpha \xrightarrow{w} x$.

برای دیدن برهانی از این قضیه می توانید به قضیه [۱؛۲۶ .۲ .۱۷] رجوع کنید .

باید توجه داشت که در حالت کلی $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ ایجاب نمی کند که (x_α) با نرم توپولوژی در X همگرا به x باشد .

قضیه. ۲.۳.۱ . (*باناخ – آلاغلو*)فرض کنید V، یک همسایگی صفر در فضای برداری توپولوژیک X باشد و $K = \left\{x' \in X^*: |\langle x', x\rangle| \le ۱, x \in V\right\}$. دراین صورت، K با توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است .

برا ی دیدن برهانی از این قضیه میتوانید به[A؛۵ .۳ .۲۰]رجوع کنید .

قضیه.۳.۳.۱. (*گلدشتاین*) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. در این صورت، به ازای هر $\nu \in X^{**}$، تور (x_α) در X با خواص زیر موجود است ؛

(۱) به ازای هر $\alpha \in I$، $\|x_\alpha\| \leq \|\nu\|$

(۲) $x_\alpha \xrightarrow{w^*} \nu$.

به بیان دیگر X در X^{**} چگال است .

برای اطلاعات بیشتر می توانید به [۵] صفحه ۸۱۸ رجوع کنید .

تعریف.۴.۳.۱. فرض کنید، X و Y فضاهای باناخ و $B_۱$ گوی یکه باز باشد. نگاشت خطی $T: X \to Y$ را فشرده گوئیم ، اگر بستار $T(B_۱)$ در Y فشرده باشد. واضح است که T کران دار است، بنابراین، $T \in B(X, Y)$.

حال نگاشت خطی T را، با توپولوژی ضعیف، فشرده خوانیم، در صورتی که بستار $T(B_۱)$ با توپولوژی ضعیف در Y فشرده باشد .

تعریف.۵.۳.۱. اگر $x \in X$ آنگاه x عضوی در فضای باناخ X^{**} مانند $\hat{x}$ را به صورت زیر تعریف می کند $\hat{x}: X^* \to \mathbb{C}$. به ازای هر $x' \in X^*$ داریم

$$\langle \hat{x}, x' \rangle = \langle x', x \rangle$$

به سادگی نتیجه می شود که به ازای هر $x \in X$ ، $\|x\| = \|\hat{x}\|$. نگاشت طبیعی $x \to \hat{x}$ از $X \to X^{**}$ را نگاشت طبیعی از X به توی X^{**} یا نشاننده ی طبیعی، خوانیم .

تعریف.۶.۳.۱. فضای نرم دار X را انعکاسی گوئیم. در صورتی که

$$X^{**} = \{\hat{x}: x \in X\} \cong X$$

فضای انعکاسی X نسبت به X^{**} بطور طولپایی یکریخت است و طولپایی یک شرط لازم است .

در سال ۱۹۵۱ جیمز در مقاله [۱۵]نشان دادند که فضایی مانند X وجود دارد که یک ریخت با X^{**} است ولی انعکاسی نیست .

مثال.۷.۳.۱ . اگر $۱ < p < \infty$ آنگاه $L^p(X, \Omega, \mu)$، انعکاسی است .

زیرا می دانیم طبق قضیه ۷.۲.۱ اگر q مزدوج p باشد. در این صورت، $(L^p)^* \cong L^q$. در نتیجه

$L^p \cong (L^q)^* \cong (L^p)^{**}$. پس L^p انعکاسی است .

مثال.۸.۳.۱ . c_0 انعکاسی نیست زیرا $c_0^* = l^۱$, $l^\infty = \left(l^۱\right)^*$ = c_0^{**} .

تعریف.۹.۳.۱ . فرض کنید EوF فضاهای نرمدار و T نگاشتی در $B(E,F)$باشد. نگاشت $T^*: F^* \to E^*$با ضابطه زیر را، عمگر الحاقی، یا ترانهاده T گوئیم .

$$\langle T^* y', x\rangle = \langle y', Tx\rangle \qquad (x \in E , y' \in F^*)$$

فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد. در این صورت، چون $X^* = B(X,\mathbb{C})$ و$\mathbb{C}$ یک فضای باناخ است پسX^* نیز یک فضای باناخ خواهد شد .

قضیه.۱۰.۳.۱ . فرض کنید که X یک فضای باناخ باشد. در این صورت، گزاره های زیر معادلند

(۱) X انعکاسی است .

(۲) X^* انعکاسی است .

(۳) $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$

(۴) گوی واحد در فضای X ، فشرده ضعیف است .

برای دیدن برهانی ازاین قضیه می توانیدبه[۴؛بخش۲.۵،۴] رجوع کنید .

تعریف.۱۱.۳.۱ . فضای نرم دار X را باتوپولوژی ضعیف، کامل دنباله ای گوئیم، هرگاه هر دنباله کوشی ضعیف در X، باتوپولوژی ضعیف در X همگرا باشد. همه فضاهای باناخ دارای چنین خاصیتی نیستند .

مثال ۱۲.۳.۱. $C[0,۱]$ فضای دنباله ای ضعیف کامل نیست .

فرض کنید که $f_n(t) = \begin{cases} ۱ - nt & 0 \le t \le \frac{۱}{n} \\ 0 & \frac{۱}{n} \le t \le ۱ \end{cases}$. در این صورت، $f_n \in C[0,۱]$.

اگر $\epsilon \mu M[0,۱]$. آنگاه، بنا بر قضیه همگرایی لبگ،