دانشگاه شهید باهنر کرمان

**دانشکده ریاضی و رایانه**

**گروه آمار**


**پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته آمار ریاضی**

# توزیع بیرنبام ساندرز


**استاد راهنما :**

**دکتر احد جمالیزاده**

**مؤلف:**

**مهسا صعصعی**


**تیر ماه ۱۳۸۹**

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به همه ی آن هایی که

می خواهند بیشتر بدانند

# سپاس گزاری

**دل هرچه یافت از نظر رحمت تو یافت　　　بیچاره آنکه از نظرت افتاده است**

پروردگارا

به کدام نام ترا بخوانم که هرچه در جهان نام است ز تو و هرچه نامی شود از توست، نه در جهانی توانمت یافت و نه جهانی خالی از توست، فقط این دانم که، هستی بی تو نیست.

ای هستی بخش وجود، مرا به نعمات بی کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و قرب به تو می تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی و تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دستمایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو.

تو را سپاس می گویم که زیادت خواه نعمت تو و گردن نهاده عزت توام و بوسه می زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، **مادر** عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدسش را که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من است.

وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای **دکتر جمالیزاده** صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. هم چنین از جناب آقای دکتر ماشین چی و جناب آقای دکتر امیرزاده که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند، سپاس گزارم.

مهسا صعصعی

**چکیده**

در این پایان نامه یک خانواده از توزیع های طول عمر را مورد توجه قرار می دهیم که برای مدل-سازی زمان خستگی به کار می رود.

در فصل اول مختصراً در مورد توزیع بیرنبام ساندرز یک بعدی بحث می کنیم. فصل دوم این پایان نامه به مطالعه برآوردهای نقطه ای پارامترهای توزیع بیرنبام ساندرز و مقایسه کارایی برآوردهای پیشنهاد شده در این فصل اختصاص یافته است. در فصل سوم شکل تابع مخاطره را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم و نشان می دهیم که تابع مخاطره این توزیع یک تابع تک مدی می باشد. تعیین نقطه ای که تابع مخاطره به ماکزیمم مقدار خود می رسد و نتایج مربوط به آن از مطالب دیگر این فصل می باشد. در فصل چهارم به معرفی توزیع بیرنبام ساندرز دو بعدی و خواص متفاوتی از این توزیع می پردازیم. در نهایت فصل پنجم آماره های ترتیبی از توزیع بیرنبام ساندرز دو بعدی را مورد بررسی قرار می دهد.

کلمات کلیدی: توزیع بیرنبام ساندرز ($BS$)، برآورد درستنمایی ماکزیمم، میانگین میانگین، برآورد گشتاوری تعدیل یافته، برآورد گشتاوری تعدیل یافته اصلاح شده از لحاظ اریبی، تابع مخاطره، نقطه تغییر تابع مخاطره، خاصیت کاملاً مثبت از مرتبه دو، توزیع نرمال چوله، توزیع $BS$ با هسته نرمال چوله، آماره های ترتیبی.

مطالبی که ساخته ذهن نگارنده است با [*] نشان داده شده است.

## فهرست مطالب

**عنوان** **صفحه**

## فصل چهارم: توزیع بیرنبام ساندرز دوبعدی



## فصل پنجم*: آماره های ترتیبی از توزیع بیرنبام ساندرز دوبعدی

# پیشگفتار

از سال ۱۸۵۰ معلوم شده است که فلز تحت تنش تکراری یا نوسانی، در تنشی به مراتب کمتر از تنش لازم برای شکست در اثر یک مرتبه اعمال بار، خواهد شکست. شکست هایی که در شرایط بارگذاری دینامیک رخ می دهند شکست های خستگی نامیده می شوند که این نامگذاری احتمالاً مبتنی بر این دلیل است که به طور کلی مشاهده می شود شکست ها فقط پس از یک دوره کار زیاد رخ می دهند. هیچ گونه تغییر واضحی در ساختار فلزی که به علت خستگی می شکند وجود ندارد تا بتوان به عنوان مدرکی برای شناخت دلایل شکست خستگی از آن استفاده کرد. با پیشرفت صنعت و افزایش تعداد وسایلی از قبیل خودرو ، هواپیما، کمپرسور، پمپ، توربین و ... که تحت بارگذاری تکراری و ارتعاشی هستند، خستگی بیشتر متداول شده و اکنون چنین برداشت می شود که عامل حداقل ۹۰ درصد شکست های ناشی از دلایل مکانیکی حین کار خستگی باشد.

دلیل عمده خطرناک بودن شکست خستگی این است که بدون آگاهی قبلی و قابل رویت بودن رخ می دهد. سه عامل عمده برای وقوع شکست خستگی ضروری هستند. این عوامل عبارتند از:

۱- تنش کششی حداکثری به مقدار بسیار زیاد

۲- تغییرات به حد کافی زیاد یا نوسانی در تنش وارده

۳- زیاد بودن چرخه های تنش وارده.

علاوه بر این متغیرهای دیگری مانندتمرکز تنش، خوردگی، دما، بار اضافی، ساختار متالورژیکی و ... هم وجود دارند که شرایط را برای ایجاد خستگی تقویت می کنند.

در مطالعات تغییرات ساختار اصلی در فلزی که به آن تنش چرخه ای اعمال می شود، فرآیند خستگی برای سهولت درک به مراحل زیر تقسیم شده است:

۱- شروع ترک: شامل ایجاد اولیه عیب خستگی می شود.

۲- رشد ترک: عبارت است از عمیق شدن ترک اولیه، این مرحله غالباً رشد ترک مرحله ۱ نامیده می شود.

۳- شکست نهایی : هنگامی رخ می دهد که طول ترک به اندازه کافی (مقدار بحرانی) برسد، طوری که سطح مقطع باقیمانده نتواند بار وارده را تحمل کند. به این مرحله از فرآیند، بسط نهایی ترک نیز گفته می شود.

توزیع بیرنبام ساندرز[1] $(BS)$ که با نام توزیع عمر خستگی نیز شناخته می‌شود، به طور گسترده برای مدل سازی زمان خستگی به کار می‌رود. زمان خستگی همان زمان شروع ترک تا رسیدن به شکست نهایی می باشد.

به علت کاربرد فراوانی که این توزیع در علم و صنعت دارد از اهمیت ویژه ای برخوردار می باشد. در این پایان نامه به معرفی و بررسی ویژگی های این توزیع می پردازیم.

[1] Birnbaum Saunders distribution

# فصل اول:

## توزیع بیرنبام ساندرز یک بعدی

## ۱-۱ مقدمه

در زمینه طول عمر خستگی تحقیقات گسترده ای صورت گرفته و توزیع های زیادی از جمله لگ نرمال[1]، وایبل[2]، گاما[3] و... [۱۴،۲۷،۴۱] به دنیای علم عرضه شده اند. در این فصل یک خانواده از توزیع های طول عمر را که برای برازش داده های عمر خستگی بکار می رود مورد توجه قرار می‌دهیم. پس از بیان تاریخچه ای از این توزیع و معرفی آن در بخش۱-۲ به بررسی برخی از خواص این خانواده در بخش ۱-۳ می پردازیم. اساس مطالب این فصل از مرجع [۱۰] گردآوری شده است.

## ۱-۲ توزیع *BS*

در کارهای کاربردی با داده های عمر خستگی که دارای چولگی از راست نیز می باشند، روبرو هستیم. یکی از توزیع هایی که برای مدل بندی این گونه داده ها مفید می باشد توزیع بیرنبام ساندرز می باشد. برای نخستین بار در سال ۱۹۶۹، بیرنبام و ساندرز [۱۰] توزیع عمر خستگی معرفی کردند که از فرسودگی ناشی از خستگی ایجاد شده تحت بارگذاری چرخه ای نتیجه شده است. در مدل سازی توزیع عمر خستگی، جسمی را در نظر بگیرید که به طور پیوسته در یک فرآیند بار گذاری چرخه ای تحت تنش های تکراری یا نوسانی قرار گرفته است. در طول هر چرخه ترکی در جسم ایجاد می شود و شروع به رشد می کند تا به مقدار بحرانی خود برسد یعنی زمانی که سطح مقطع جسم باقیمانده نتواند بار وارده را تحمل کند و منجر به شکست در جسم می شود.

[1] Log normal

[2] Weibull

[3] Gamma

بسط نهایی ترک ایجاد شده پس از $n$ چرخه از بارگذاری به صورت زیر نوشته می شود:

$$W_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

به طوری که $Y_j$ها ( $Y_j$: طول ترک ایجاد شده در هر چرخه) برای $j = 1, 2, ...$ متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و هم توزیع با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ می باشند.

فرض کنید شکست در $n$ امین چرخه ایجاد می شود یعنی زمانی که طول کلی ترک از مقدار بحرانی ثابت $w$ تجاوز کند. آنگاه در صورتی که $n$ بزرگ باشد با استفاده از قضیه حد مرکزی[۱] داریم [۲۴]:

$$\mathrm{P}\left(N \leq n\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j \leq w\right) = \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{w}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

از آن جایی که تعداد چرخه ها زیاد می باشد و هر چرخه مدت زمان کوتاهی طول می کشد، بنابراین متغیر تصادفی گسسته $N$ (تعداد چرخه های مورد نیاز برای رسیدن به شکست) را توسط متغیر تصادفی $T$ (مدت زمان مورد نیاز تا رسیدن به شکست) جانشین می کنیم. بنابراین تابع توزیع تجمعی توزیع بیرنبام ساندرز به صورت زیر بدست می آید:

$$F\left(t; \alpha, \beta\right) = \Phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right]\right\}$$

که در آن $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu w}}$ و $\beta = \frac{w}{\mu}$ می باشد.

**تعریف ۱-۱** متغیر تصادفی $T$ را دارای توزیع بیرنبام ساندرز یک بعدی با پارامترهای $\mu$، $\alpha$ و $\beta$ گویند هر گاه تابع چگالی احتمال آن به شکل زیر باشد:

[1] Centeral limit theorem

$$f\left(t;\mu,\alpha,\beta\right)=\frac{\sqrt{\frac{t-\mu}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{t-\mu}}}{2\alpha\left(t-\mu\right)}\phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{t-\mu}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{t-\mu}}\right]\right\}\quad t>\mu;\ \alpha,\beta>0 \qquad (۱–۱)$$

به طوری که $\mu$ پارامتر مکان[1]، $\beta$ پارامتر مقیاس[2]، $\alpha$ پارامتر شکل[3] و $\phi$ تابع چگالی احتمال توزیع نرمال استاندارد می باشد. حالتی را در نظر بگیرید که $\mu=0$ و $\beta=1$ باشد آنگاه متغیر تصادفی $T$ را دارای توزیع بیرنبام ساندرز استاندارد گویند و تابع چگالی احتمال آن به شکل زیر می باشد:

$$f\left(t;\alpha\right)=\frac{\sqrt{t}+\sqrt{\frac{1}{t}}}{2\alpha t}\phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{t}-\sqrt{\frac{1}{t}}\right]\right\}\qquad t>0;\ \ \alpha>0 \qquad (۲–۱)$$

در این پایان نامه با متغیر تصادفی $T$ سر وکار داریم که دارای توزیع بیرنبام ساندرز دو پارامتری با پارامترهای $\alpha$ و $\beta$ می باشد و تابع چگالی احتمال آن به شکل زیر نوشته می شود:

$$f\left(t;\alpha,\beta\right)=\frac{1}{2\alpha t}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{t}}\right]\right\}\qquad t>0;\ \ \alpha,\beta>0 \qquad (۳–۱)$$

با تعریف $\xi\left(\frac{t}{\beta}\right)=\sqrt{\frac{t}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{t}}$ تابع چگالی احتمال فوق به فرم زیر نیز نوشته می شود:

$$f\left(t;\alpha,\beta\right)=\frac{1}{\alpha}\xi'\left(\frac{t}{\beta}\right)\phi\left\{\frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{t}{\beta}\right)\right\}\qquad t>0;\ \ \alpha,\beta>0 \qquad (۴–۱)$$

هم چنین تابع توزیع تجمعی آن به شکل ساده زیر نوشته می شود:

$$F\left(t;\alpha,\beta\right)=\Phi\left\{\frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{t}{\beta}\right)\right\} \qquad (۵–۱)$$

---

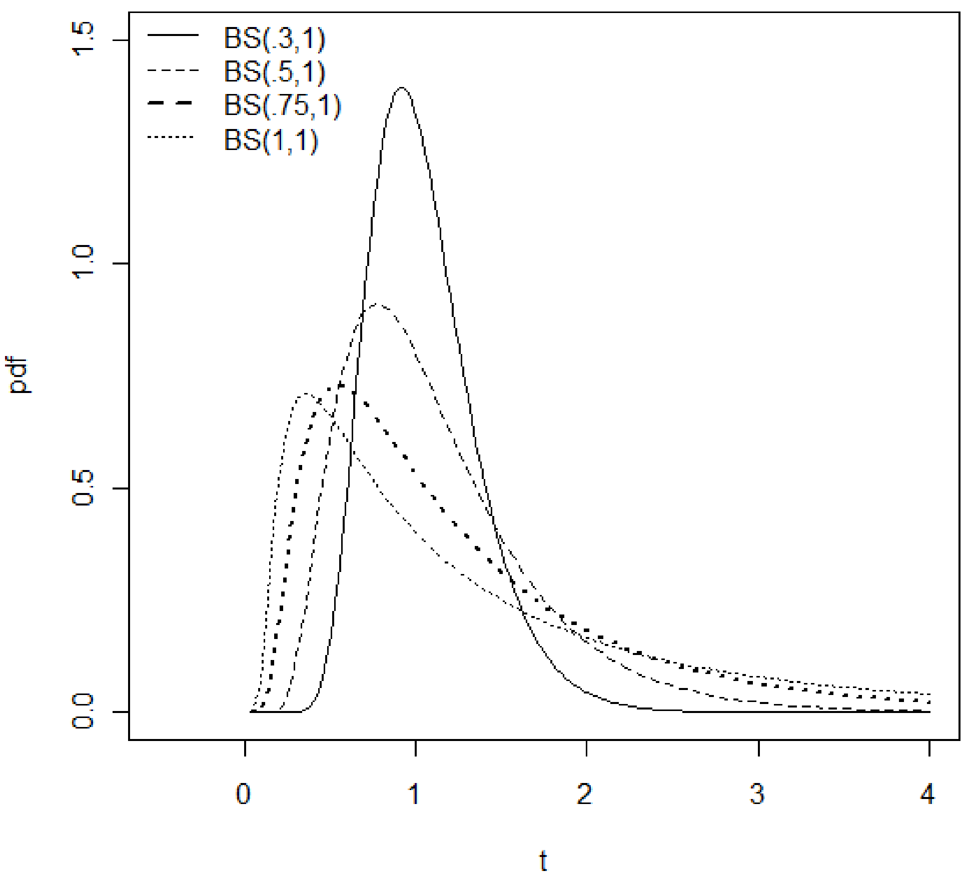
[1] Location

[2] Scale

[3] Shape

و از این پس با نماد $T \sim BS(\alpha,\beta)$ نمایش می دهند.

برای مشخص شدن نقش پارامتر شکل $\alpha$ در تعیین شکل تابع چگالی $BS$ نمودارهایی را به ازای مقادیر مختلف $\alpha$ رسم کرده ایم.

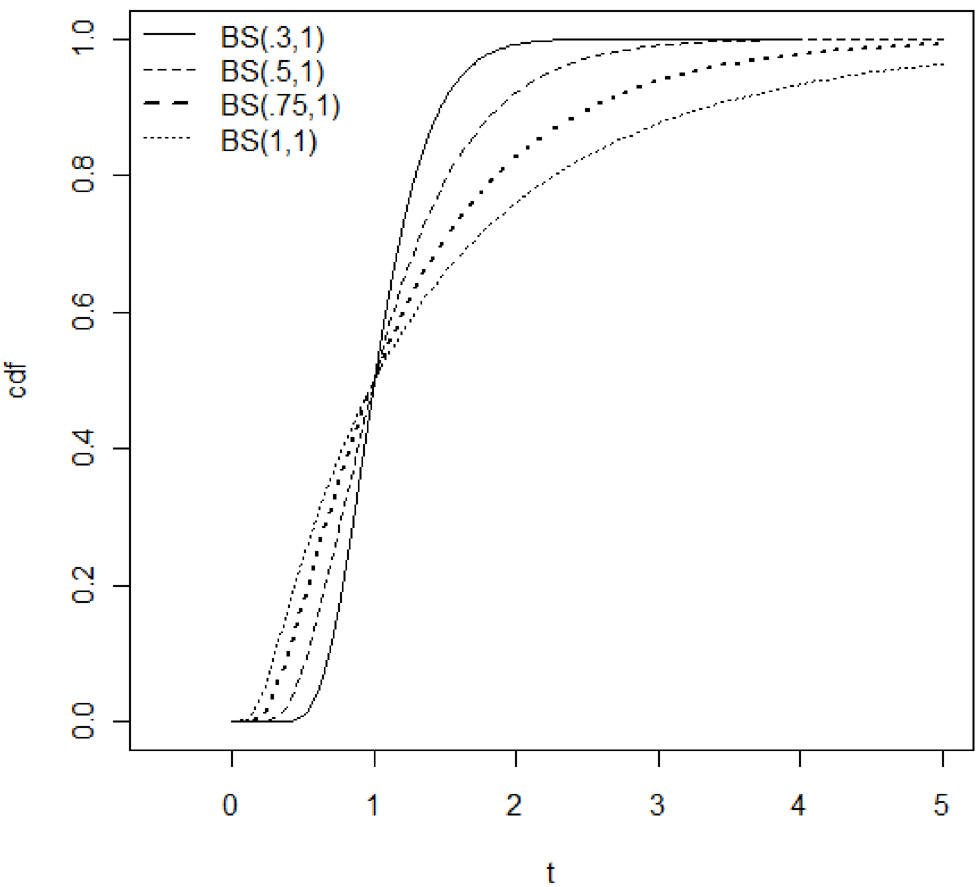



شکل ۱-۱ تابع چگالی $BS$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha$ و مقدار ثابت $\beta = ۱$

همان طور که در نمودار فوق دیده می شود تابع چگالی توزیع $BS$ یک تابع تک مدی می باشد [۲۹]. این تابع با نزدیک شدن $\alpha$ به صفر به سمت تقارن میل می کند و در صفر به یک توزیع تباهیده در $\beta$ تبدیل می شود. در این حالت پژوهشگر ترجیح می دهد از توزیع متقارن دیگری به

جای این توزیع استفاده کند. چون همان طور که قبلاً نیز گفتیم این توزیع در مدل سازی داده های چوله به کار می رود. بنابراین در عمل معمولاً $\alpha$ به سمت صفر میل نمی کند.

نمودار تابع توزیع $BS$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha$ در شکل زیر رسم شده است:




شکل ۱-۲ تابع توزیع $BS$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha$ و مقدار ثابت $\beta = ۱$

این خانواده دو پارامتری از توزیع های عمر خستگی را با $\mathcal{F}$ نشان می دهیم و قضیه مهمی را در رابطه با این خانواده بیان می کنیم.

**قضیه ۱-۲-۱:**

*i*) اگر T دارای توزیع طول عمر خستگی $F(\alpha,\beta)$ در $\mathcal{F}$ باشد آنگاه $\frac{1}{T}$ دارای توزیع $F\left(\alpha,\frac{1}{\beta}\right)$ در $\mathcal{F}$ می باشد.

*ii*) هم چنین برای هر مقدار حقیقی $a>0$ ، $aT$ دارای توزیع $F(\alpha,a\beta)$ در $\mathcal{F}$ می باشد.

*iii*) فرض کنید $Z$ متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشد آنگاه

$$1+\frac{1}{2}\alpha^2Z^2+\alpha Z\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2Z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

دارای توزیع $F(\alpha,1)$ در خانواده $\mathcal{F}$ می باشد.

**اثبات.**

*i*) با استفاده از تعریف تابع توزیع داریم:

$$P\left(\frac{1}{T}\le t\right)=P\left(T>\frac{1}{t}\right)=1-P\left(T\le\frac{1}{t}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{\beta t}}-\sqrt{\beta t}\right)\right)$$

باتوجه به این نکته که $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ می باشد داریم:

$$=\Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\beta t}-\sqrt{\frac{1}{\beta t}}\right)\right)\sim BS\left(\alpha,\frac{1}{\beta}\right)$$

*ii*) با استفاده از تعریف تابع توزیع داریم:

$$P(aT\le t)=P\left(T\le\frac{t}{a}\right)=F_T\left(\frac{t}{a}\right)=\Phi\left(\frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{t}{a\beta}\right)\right)\sim BS(\alpha,a\beta)$$

*iii*) از تعریف تابع توزیع $BS$ پیداست که اگر $T\sim BS(\alpha,\beta)$ باشد آنگاه

$\frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{T}{\beta}\right) \sim N(0,1)$ خواهد بود، بنابراین با فرض اینکه $Z$ متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد داریم:

$$Z = \frac{1}{\alpha}\xi\left(\frac{T}{\beta}\right) \;\Rightarrow\; \alpha Z = \xi\left(\frac{T}{\beta}\right) = \sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \;\Rightarrow\; \alpha^2 Z^2 = \frac{T}{\beta} + \frac{\beta}{T} - 2$$

حال با تغییر متغیر $y = \frac{T}{\beta}$ داریم:

$$\alpha^2 Z^2 + 2 = y + \frac{1}{y} \;\Rightarrow\; y^2 - y\left(\alpha^2 Z^2 + 2\right) + 1 = 0$$

$$\Delta = \left(\alpha^2 Z^2 + 2\right)^2 - 4 = 4\alpha^2 Z^2\left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2 Z^2\right)$$

بنابراین:

$$y = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 Z^2 + \alpha Z\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2 Z^2}$$

با جایگذاری $y = \frac{T}{\beta}$ در عبارت فوق داریم:

$$\frac{T}{\beta} = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 Z^2 + \alpha Z\sqrt{1 + \frac{1}{4}\alpha^2 Z^2} \qquad (۱-۶)$$

از آن جایی که $T \sim BS(\alpha,\beta)$ می باشد بنابراین با استفاده از گزاره قبل $\frac{T}{\beta} \sim BS(\alpha,1)$ و اثبات کامل می شود.

□

بنابراین هرگاه $T \sim BS(\alpha,\beta)$ باشد آنگاه متغیر تصادفی $T$ به صورت زیر می باشد:

$$T = \beta\left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 + 1}\right)^2 \qquad (۱-۷)$$

به طوری که $Z=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{t}}\right]\sim N(0,1)$ می باشد.

## ۱-۳ برخی از خواص توزیع $BS$

**قضیه ۱-۳-۱:** توزیع $BS(\alpha,\beta)$ دارای خواص زیر می باشد:

۱) $n$ امین گشتاور مرکزی حول صفر:

$$\mathrm{E}\left[T^n\right]=\beta^n\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{(2(n-j+i))!}{2^{n-j+i}(n-j+i)!}\left[\frac{\alpha}{2}\right]^{2(n-j+i)} \qquad (۱-۸)$$

۲) میانگین:

$$E(T)=\beta\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2\right) \qquad (۱-۹)$$

۳) واریانس:

$$\mathrm{var}(T)=(\alpha\beta)^2\left(1+\frac{5}{4}\alpha^2\right) \qquad (۱-۱۰)$$

۴) ضریب چولگی[۱]:

$$\beta_1(T)=\frac{16\alpha^2(11\alpha^2+6)}{\left(5\alpha^2+4\right)^3} \qquad (۱-۱۱)$$

۵) ضریب کشیدگی[۲]:

$$\beta_2(T)=3+\frac{6\alpha^2(93\alpha^2+41)}{\left(5\alpha^2+4\right)^2} \qquad (۱-۱۲)$$

۶) تابع چندک[۳]:

[1] Cofficient skewness

[2] Cofficient kurtesis

[3] Quantile function

$$t(q)=\frac{\beta}{4}\left[\alpha Z_q+\sqrt{\alpha^2 Z_q^2+4}\right]^2 \qquad 0<q<1 \tag{۱۳-۱}$$

که در آن $Z_q$ چندک $q$ ام $N(0,1)$ می باشد. اگر $q=0.5$ باشد آنگاه $t(0.5)=\beta$ و در نتیجه پارامتر مقیاس $\beta$ میانه توزیع $BS$ می باشد.

**اثبات.**

۱) از رابطه (۱-۷) می دانیم که:

$$T=\beta\left(\frac{\alpha Z}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2+1}\right)^2$$

با استفاده از بسط دو جمله ای داریم:

$$E\left[T^n\right]=\beta^n E\left[\left(\frac{\alpha Z}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2+1}\right)^2\right]^n$$

$$=\beta^n\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}E\left[\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^{2n-2j}\left(\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2+1\right)^j\right]$$

با استفاده مجدد از بسط دو جمله ای داریم:

$$=\beta^n\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}E\left[\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^{2n-2j+2i}\right]$$

$$=\beta^n\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{(2(n-j+i))!}{2^{n-j+i}(n-j+i)!}\left[\frac{\alpha}{2}\right]^{2(n-j+i)}$$

اثبات گزاره های (۲)، (۳)، (۴) و (۵) با استفاده از گزاره (۱) به راحتی قابل اثبات می باشد. گزاره (۶) با استفاده از رابطه (۱-۷) بدیهی می باشد.

□

# فصل دوم:

## روش های برآوردیابی