وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

یک روش طیفی بر اساس هم‌محلی لژاندر برای حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل ولترا

اساتید راهنما:

دکتر سعید عباس بندی

دکتر عزیز اله عزیزی

استاد مشاور:

دکتر داوود رستمی

تهیه و تنظیم:

مصطفی بهروزنژاد

اسفند ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیر و تشکر

با شکر و سپاس فراوان به درگاه الوهیت که مرا در نوشتن این پایان نامه توفیق بخشید صلوات می فرستم بر رحمة للعالمین فرستاده آخرین.

اینک بر خویشتن واجب می دانم از همه عزیزانی که در نوشتن این اثر مرا یاری نموده اند صمیمانه تشکر کنم.

نخست از پدر و مادرم که با صبر و بردباری بسیار در تمامی مراحل زندگیم همواره پشتیبان من بوده اند سپاسگزاری کرده و از خداوند متعال خواستار سلامت و عزت روز افزون ایشان هستم.

از استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای دکتر سعید عباس بندی که افتخار شاگردی ایشان را داشته ام تشکر فراوان می نمایم و از جناب آقای دکتر داوود رستمی، استاد مشاور خود نیز که با نظرات اصلاحی خویش سبب امتنان بنده بوده اند نیز قدردانی می کنم.

هم چنین از همه ی دوستان خوبم که در کنارشان لحظات خوشی داشته ام تشکر می کنم. از سرکار خانم عزیزی که در تایپ این اثر مرا یاری داده است، نیز سپاسگزارم.

گرچه مستیم و خرابیم چو شب های دگر   باز کن ساقی مجلس سر مینای دگر

امشبی را که درآنیم غنیمت شمریم   شاید ای جان نرسیدیم به فردای دگر

تقدیم به یگانه های عالم:

پدر مهربان و مادر عزیزم

چکیده

در این اثر روش‌های طیفی را برای معادلات انتگرال دیفرانسیلی از نوع ولترا بررسی می‌کنیم. ابتدا معادله انتگرال-دیفرانسیل از نوع ولترا را به صورت معادل با دو معادله انتگرال از نوع دوم نمایش می‌دهیم و سپس با استفاده از شرایط هم محلی هردو را حل می‌کنیم.

اینجا تابع هسته وسایر توابع بکار رفته در معادله اصلی به قدری هموار هستند که امکان بکار بردن روش های عددی از مرتبه بالا را فراهم می‌کنند. یک تحلیل خطا که به دشواری به‌دست می‌آید برای روش گفته شده نیز ارائه می‌کنیم. به نظر می رسد نتایج این تحقیق اولین تقریب طیفی موفق با دلایل نظری است. به علاوه نتایج عددی به دست آمده نیز تحلیل ما را تأیید می‌کند.

واژه های کلیدی: روش طیفی لژاندر ، فرمول انتگرال گیری گاوس**،** معادله انتگرال– دیفرانسیل ولترا

پیش‌گفتار

تاکنون کارهای کمی برای حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل از طریق روش‌های طیفی انجام شده‌است. یک دلیل آن را می‌توان نیاز به هموار‌ی از مرتبه‌های بالا در این روش‌ها دانست. برای نخستین بار تانگ[1] یک روش طیفی بر اساس هم‌محلی لژاندر برای حل مسائل انتگرال از نوع ولترا معرفی کرد. اگرچه اثبات همگرایی آن بسیار پیچیده به نظر می‌رسد، اما نتایج عددی تاحد زیادی نشان‌دهنده‌ی کارایی مناسب آن است. ما در این پایان‌نامه علاوه بر روش ذکر شده یک تعمیم از آن را برای معادلات انتگرال–دیفرانسیل بیان می‌کنیم. روند کار به شرح زیر است.

در فصل پس از تعریف معادلات انتگرال یک دسته‌بندی از انواع آن ارائه می‌دهیم. در فصل دوم بضی از روش‌های مقدماتی برای حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل بیان می‌شود. فصل سوم به تشریح روش هم‌محلی لژاندر برای حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل اختصاص دارد و در فصل چهارم به بررسی خطای روش می‌پردازیم و قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم که همگرایی روش ما را تأیید می‌کند.در فصل آخر برنامه‌های کامپیوتری و نتایج عددی ارائه می‌گردند.

در واقع این پایان‌نامه اثری است بر اساس مقاله‌ی ذیل:

[25] Ying-Jun Jiang, On pectral methods for Volterra-type integro-diffrential equations, J Comp. appl. Math. 230(2009) 33-340.

[1] Tang

فهرست

فهرست .... أ
فصل اول: ۱
آشنایی با معادلات انتگرال ۱
۱.۱ معادله انتگرال ۱
۲.۱ تقسیم بندی معادلات انتگرال ۲
۱.۲.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم ۲
۲.۲.۱ معادلات انتگرال خطی ولترا ۳
۳.۲.۱ معادلات انتگرالی منفرد ۵
۳.۱ معادلات انتگرال– دیفرانسیل ۶
۴.۱ پیدایش معادلات انتگرال و انتگرال – دیفرانسیل ۶
۵.۱ جواب یک معادله انتگرال ۸
۶.۱ تبدیل معادلات انتگرال ولترا به معادلات دیفرانسیل معمولی ۹
۷.۱ تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا ۱۱
فصل دوم: ۱۳
روش‌های حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل ۱۳
۱.۲ مقدمه ۱۳

۲.۲ معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل ولترای خطی ۱۴

۳.۲ روش جواب سری ۱۶

۴.۲ روش تجزیه‌ی آدومیان ۱۸

۵.۲ روش های تبدیل مسأله ۲۱

۶.۲ روش‌های مبتنی بر باقیمانده (روش‌های بسط) ۲۴

۱.۶.۲ روش هم‌محلی: ۲۶

۲.۶.۲ روش حداقل مربعات: ۲۷

۳.۶.۲ روش گالرکین: ۲۸

فصل سوم: ۳۱

یک روش طیفی بر اساس هم‌محلی لژاندر برای معادلات انتگرال‌ـ دیفرانسیل خطی از نوع ولترا ۳۱

۱.۳ مقدمه ۳۱

۲.۳ روش هم محلی طیفی برای معادلات انتگرال ۳۳

۱.۲.۳ تبدیل بازه ۳۳

۲.۲.۳ هم محلی لژاندر ۳۵

۳.۲.۳ درونیابی لاگرانژ از تابع مجهول ۳۶

۴.۲.۳ نمایش ماتریسی مسأله ۳۷

۳.۳ روش هم‌محلی طیفی برای معادلات انتگرال ـ دیفرانسیل از نوع ولترا ۳۹

۱.۳.۳ استاندارد سازی شرایط مسأله ۴۰

۲.۳.۳ روش هم‌محلی لژاندر ۴۱

۳.۳.۳ درونیابی لاگرانژ از تابع مجهول ۴۳
۴.۳.۳ نمایش ماتریسی مسأله ۴۵
کاربردهای دیگر ۴۷
فصل چهارم: ۴۹
تحلیل همگرایی ۴۹
۱.۴ مقدمه ۴۹
۲.۴ خطای قطع ۵۰
۳.۴ لم‌های کاربردی ۵۵
۴.۴ قضیه همگرایی روش هم محلی طیفی ۵۷
نتیجه‌گیری: ۶۳
فصل پنجم: ۶۴
نتایج عددی و برنامه‌های کامپیوتری ۶۴
۱.۵ مقدمه: ۶۴
۵.۲ مثال ۱: معادله انتگرال: ۶۵
۳.۵ مثال۲. معادله انتگرال–دیفرانسیل: ۷۰
۴.۵ برنامه های کامپیوتری ۸۱
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۰
منابع ومراجع ۹۴

فصل اول:

آشنایی با معادلات انتگرال

۱.۱ معادله انتگرال

تعریف: یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد. فرم کلی یک معادله انتگرال خطی که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر است:

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\, u(t)dt \qquad \mathrm{c} \le x \le d \tag{۱-۱}$$

$k(x,t)$ هسته‌ی معادله انتگرال نامیده می‌شود و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. باید توجه کرد که هسته‌ی معادله یعنی $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند.

۲.۱ تقسیم بندی معادلات انتگرال

تقسیم‌بندی معادلات انتگرالی را می‌توان به روش‌های مختلف انجام داد ولی معمولاً این تقسیم‌بندی‌ها را با توجه به حدود انتگرال‌گیری و خاصیت خطی بودن و همگن بودن آن انجام می‌دهند.

با این ویژگی‌ها ما می‌توانیم معادلات انتگرالی به انواع مختلف فردهلم، ولترا، خطی یا غیرخطی و هم چنین همگن و یا غیر همگن دسته بندی کنیم[۲۳].

۱.۲.۱ معادلات انتگرال خطی فردهلم[۱]

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$q(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۲)$$
$$a \le x \le b$$

که در آن $k(x,t)$ هسته‌ی معاله انتگرال و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم می‌باشد. معادله (۱-۲) را خطی می‌گویند زیرا تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال به طور خطی ظاهر شده است یعنی توان $u(x)$ یک است. بر حسب این‌که $q(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند، معادلات انتگرال خطی فردهلم به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

اگر $q(x)=0$ ، معادله (۱-۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۳-۱)$$
$$a \le x \le b$$

1- Fredholm

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

زمانی که $q(x)=1$ ، معادله (۱-۲) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۴)$$
$$a\le x\le b$$

به این معادله، معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.

۲.۲.۱ معادلات انتگرال خطی ولترا[1]

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا به صورت معادلاتی است که در آن‌ها حد بالا و پایین انتگرال‌گیری به جای این که عدد ثابتی باشد به صورت تابعی از x ظاهر می‌شود، به شکل زیر است:

$$q(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۵)$$
$$a\le x\le b$$

که در آن تابع مجهول یعنی $u(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر شده‌است.

باید توجه کرد که (۱-۵) را می‌توان به عنوان حالت خاصی از معادلات انتگرال فردهلم در نظر گرفت، به این صورت که اگر هسته $k(x,t)$ برای $x<t$ و $x\in[a,b]$ صفر فرض شود آن گاه (۱-۲) به (۱-۵) تبدیل می‌شود.

معادلات انتگرال ولترا را نیز می‌توان با توجه به مقادیر $q(x)$ به دو دسته تقسیم کرد.

۱- در حالتی که $q(x)=0$ معادله (۱-۵) به معادله

$$0=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۶)$$
$$a\le x\le b$$

1- Volterra

تبدیل خواهد شد که به آن معادله انتگرال ولترا نوع اول می‌گویند.

۲- اگر $q(x)=1$ آن گاه (۱-۵) به شکل

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۱-۷)$$
$$a\le x\le b$$

در خواهد آمد. این معادله را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می‌نامند.

با توجه به معادلات (۱-۲) و (۱-۷) می‌توانیم نکات زیر را داشته باشیم.

۱.در معادلات انتگرال خطی فردهلم و ولترای نوع اول، تابع مجهول فقط در زیر علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود. اما در معادلات انتگرال خطی فردهلم و ولترای نوع دوم، تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم در خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود.

۲. در معادلات انتگرال فردهلم، انتگرال‌گیری روی یک فاصله متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود. اما در انتگرال ولترا، حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری متغیر است و معمولاً همان حد بالای انتگرال‌گیری به عنوان متغیر انتخاب می‌شود.

۳. در معادلات انتگرال خطی فردهلم و ولترا تابع مجهول $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت توان یک ظاهر می‌شود. اگر به جای $u(x)$ تابعی غیر خطی بر حسب $u(x)$ داشته باشیم، معادلات انتگرال مورد نظر، معادلات انتگرال غیر خطی فردهلم یا ولترا نامیده می‌شود.

مثال‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات انتگرالی ولترای غیرخطی هستند:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)u^3(t)dt$$

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)e^{-u(t)}dt$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\ \cos(u(t))dt$$

در این مثال‌ها به جای $u(t)$ به ترتیب $\cos\ u(t)\ ,\ e^{-u(t)},\ u^3(t)$ ظاهر شده است.

۴. اگر در معادلات انتگرال نوع دوم (۱-۴) و (۱-۷)، شرط $f(x) = 0$ برقرار باشد، آنگـاه معادلـه‌ی حاصل را یک معادله انتگرال همگن می‌نامند. در غیر این صورت معادله‌ی مورد نظر را یک معادلـه‌ی غیر همگن می‌گویند.

۳.۲.۱ معادلات انتگرالی منفرد

معادلات انتگرالی را که در آن‌ها حد پایین، حد بالا یا هر دو این حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشـند، معادله انتگرال منفرد می‌نامند. به‌علاوه اگر هسته‌ی انتگرال در یک نقطه یـا نقـاط بیشـتری از دامنـه‌ی انتگرال‌گیری نامتناهی باشد باز هم این‌گونه معادلات را، معادلات انتگرال منفرد می‌نامند. مثال زیـر از معادلات انتگرال منفرد آورده شده است که علت منفرد بودن آن‌ها نامتناهی بودن حدود انتگرال‌گیـری می‌باشد.

$$u(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \cos(x+t)\ u(t)dt$$

معادله زیر مثالی از معادلات انتگرال منفرد است. در این مثال هسـته $k(x,t)$ وقتـی کـه $t \to -1$ نامتناهی می‌شود، لذا، این معادله انتگرال نیز منفرد است.

$$x^2 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt$$

۳.۱ معادلات انتگرال- دیفرانسیل

در این‌گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دو طرف ظاهر می‌شود، در یک طرف زیر علامت انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی. تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک و بیولوژی در قالب معادلات انتگرال- دیفرانسیل ظاهر می‌شوند. البته این‌گونه معادلات در هنگام تبدیل یک معادله انتگرال به یک معادله دیفرانسیل هم نمایان می‌گردند. دسته بندی معادلات انتگرال – دیفرانسیل همانند دسته‌بندی معادلات انتگرال می‌باشد.

مثال‌های زیر نمونه‌هایی از انواع معادلات انتگرال- دیفرانسیل هستند.

الف:
$$u''(x) = -x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$
$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

ب:
$$u'(x) = -\sin x - 1 - \int_a^x xu(t)dt$$
$$u(0) = 1$$

معادلات الف وب معادلات انتگرال – دیفرانسیل خطی ولترا هستند. این تقسیم بندی بر اساس حدود انتگرال‌گیری انجام شده است.

۴.۱ پیدایش معادلات انتگرال و انتگرال – دیفرانسیل

معادلات انتگرال و انتگرال – دیفرانسیل در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به‌کار می‌روند. به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مسأله مقدار مرزی باشد، آن‌گاه معادلات

انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسأله مقدار اولیه باشد، آن‌گاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.

بر حسب این‌که معادله انتگرال از چه نوع مسأله‌ای ظاهر می‌شود، تکنیکها و ایده‌های مختلفی برای تعیین جواب آن‌ها به کار برده می‌شود[۱۱.۱۲].

در مثال زیر به نحوه‌ی تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال می‌پردازیم.

مثال ۴.۱-۱. مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u'(x) = 2xu(x) \quad x \geq 0$$

با شرط اولیه

$$u(0) = 1$$

این معادله را می‌توان به سادگی با به‌کار بردن ایده‌ی جداکردن متغیرها حل کرد. جواب این معادله دیفرانسیل به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x) = e^{x}$$

اما اگر از طرفین معادله مقدار اولیه نسبت به t از 0 تا t انتگرال بگیریم خواهیم داشت:

$$\int_0^x u(t)\,dt = \int_0^x 2tu(t)\,dt$$

و در نتیجه با انتگرال‌گیری از طرفین بالا و استفاده از شرط اولیه داریم:

$$u(x) = 1 + \int_0^x 2t\, u(t)dt$$

از مقایسه‌ی روابط می‌توان دریافت که در این معادله انتگرالی با هسته برابر با $k(x,t) = 2t$ و تابع $f(x) = 1$ می‌باشد. هدف اصلی ما تعیین تابع مجهول $u(x)$ که در زیر علامت انتگرال نظیر ظاهر شده و در معادله انتگرال داده شده صدق می‌کند، می‌باشد.

۵.۱ جواب یک معادله انتگرال

جواب یک معادله انتگرال یا معادله انتگرال– دیفرانسیل روی فاصله انتگرال‌گیری یک تابع $u(x)$ است به طوری که آن تابع در معادله داده شده صدق کند. به عبارت دیگر اگر جواب داده شده در طرف راست معادله جایگذاری شود و در نتیجه دو طرف چپ و راست معادله با هم برابر شوند آن‌گاه $u(x)$ جواب معادله می‌باشد.

مثال ۵.۱–۱. نشان می‌دهیم که $u(x)=e^x$ یک جواب معادله انتگرال ولترای زیر است.

$$u(x)=1+\int_0^x u(t)\ dt$$

با جایگذاری $u(x)=e^x$ در طرف راست معادله داریم:

$$1+e^x\int_0^x e^t dt=1+\left[e^t\right]_0^x=1+e^x-1$$

البته همیشه نمی‌توانیم جواب را با یک فرم بسته مشخص کنیم اما به‌جای آن می‌توان جواب را به شکل یک سری به دست آورد.

جواب به‌دست آمده به شکل یک سری معمولاً برای محاسبه تقریبی به کار می‌رود و در این حالت هر چه جملات بیشتری را به دست آوردیم دقت نتیجه حاصل بهتر خواهد بود. باید به تفاوت بین جواب دقیق به صورت یک فرم بسته و جواب تقریبی به شکل یک سری توجه اساسی کرد. اگر به مثال ۴.۱–۱ بنگریم متوجه می‌شویم که جواب دقیق به صورت یک فرم بسته به وسیلهٔ تابع نمایی $u(x)=e^x$ داده شده است.

بعداً نشان می‌دهیم که جواب معادله انتگرال

$$u(x)=1+\frac{1}{4}\int_0^x x\ u(t)dt$$

به وسیلهٔ سری زیر مشخص می‌شود:

$$u(x)=1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{48}x^4+\frac{1}{960}x^6+.....$$

همان طوری که به سادگی دیده می‌شود مشکل است که بتوان این سری را به صورت یک فـرم بسـته معادل آن نوشت. البته این سری می‌تواند جهت تعیین یک جواب تقریبی عددی به کار رود. برای بـه دست آوردن یک جواب خیلی دقیق باید تعداد زیادی از جملات آن را به کار گرفت.

۶.۱ تبدیل معادلات انتگرال ولترا به معادلات دیفرانسیل معمولی

در این بخش تکنیکی که معادلات انتگرال ولترای نوع دوم را به معـادلات دیفرانسـیل معـادل تبـدیل می‌کند ارائه می‌شود. این کار به سادگی با اعمال قاعده لایپ‌نیتز[1] در زمینه مشتق یـک انتگـرال انجـام می‌شود. برای مشتق گرفتن از $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}G(x,t)dt$ نسبت به x ، به قاعده لایپ‌نیتز به صورت زیـر بـه کار می‌رود:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}G(x,t)dt=G(x,\beta(x))\frac{d\beta}{dx}-G(x,\alpha(x))\frac{d\alpha}{dx}+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial}{\partial x}G(x,t)dt \qquad (۱-۸)$$

که در آن $G(x,t)$ و $\frac{\partial}{\partial x}G$ توابعی پیوسته روی دامنهD می‌باشند و D ناحیه‌ای در صفحه است کـه شامل مستطیل R می‌باشد و $R=\{(x,t):a\le x\le b,t_0\le t\le t_1\}$

در ضمن حدود انتگرال‌گیری یعنی $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابعی هستند که مشتق‌های پیوسته روی فاصله (a,b) دارند.

1- Leibniz

اکنون به هدف اصلی یعنی تبدیل یک معادله انتگرال ولترا به یک معادله دیفرانسیل بر می‌گردیم. این کار به سادگی با مشتق گرفتن از دو طرف معادله انتگرال مورد نظر و استفاده از قاعده لایپ‌نیتز انجام می‌شود. البته به هر تعداد دفعه که لازم باشد باید از روند مشتق گرفتن استفاده نمود تا به مرحله‌ای برسیم که علامت انتگرال حذف شود و یک معادله دیفرانسیل خالص حاصل شود . البته شرط اولیه مورد نیاز را می‌توان با قرار دادن $x=0$ در معادله انتگرال و یا معادله انتگرال – دیفرانسیل حاصل به دست آورد.

مثال ۳. معادله انتگرال زیر را به یک مسأله مقدار اولیه تبدیل می‌کنیم:

$$u(x)=x+\int_0^x (t-x)\ u(t)dt$$

با مشتق گرفتن از دو طرف معادله انتگرال به دست می‌آوریم:

$$u(x)=1-\int_0^x\ u(t)dt$$

از دو طرف معادله انتگرال – دیفرانسیل مشتق می‌گیریم تا علامت انتگرال حذف شود، لذا به دست می‌آوریم:

$$u''(x)=-u(x)$$

یا می‌توان نوشت:

$$u''(x)+u(x)=0$$

با جایگذاری $x=0$ در $u(x)$ و $u''(x)$ در معادلات بالا بدست می‌آوریم که $u(0)=0$ و $u'(0)=0$.

با ترکیب نتایج بالا مسأله مقدار اولیه مرتبه دوم معادل به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u''(x)+u(x)=0,\ u(0)=0,\ u'(0)=1$$

۷.۱ تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا

در این بخش روش تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال ولترا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.قبل از بیان روش، یک فرمول که انتگرالهای چندگانه را به یک انتگرال تبدیل می‌کند معرفی می‌کنیم:

$$\int_0^x\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}.....\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n.....dx_1dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt \qquad (۱-۹)$$

ابتدا دو رابطه زیر را که حالت خاص فرمول بالا هستند و به ترتیب جهت تبدیل انتگرالهای دوگانه و سه‌گانه به یک انتگرال یگانه به کار می‌روند، را یادآور می‌شویم.

$$\int_0^x\int_0^x f(t)\ dtdt=\int_0^x(x-t)\ f(t)dt \qquad (۱-۱۰)$$

$$\int_0^x\int_0^x\int_0^x f(t)\ dtdtdt=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)dt \qquad (۱-۱۱)$$

اکنون به اثبات فرمول (۱-۱۰) می‌پردازیم که یک انتگرال دوگانه را به یک انتگرال یگانه تبدیل می‌کند.

با توجه به این‌که طرف راست معادله (۱-۱۰) یک تابعی از x می‌باشد لذا آن را به $I(x)$ نشان می‌دهیم.

یعنی:

$$I(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

با مشتق گرفتن از طرفین معادله و استفاده از قاعده لایپ‌نیتز داریم:

$$I'(x)=\int_0^x f(t)dt$$