بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم محیا ملک‌قاسمی رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۰۱۰ تحت عنوان: «مجموعه فاصله‌ها در فضاهای لهستانی» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مسعود پورمهدیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه(رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه(رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۸۹- ۸۸ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر سید محمد باقری از آن دفاع شده است. »

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب محیا ملک قاسمی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: محیا ملک قاسمی

تاریخ و امضا: ۹۰/۱۱/۱۱

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب محیا ملک قاسمی دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۸۹-۸۸ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: .... محیا ملک قاسمی

تاریخ: ۹۰/۷/۱۱

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

مجموعه فاصله‌ها در فضاهای لهستانی

نگارنده:

محیا ملک قاسمی

استاد راهنما:

آقای دکتر سید محمد باقری

دی ۱۳۹۰

تقدیم به:

پدر گرامی ام به پاس همه حمایتهایش

مادر مهربانم به پاس همه تشویق هایش

همسر عزیزم به پاس همه دلگرمی هایش

خواهر و برادرم به پاس همه کمک هایشان

من لم یشکر الخالق لم یشکر المخلوق

از:

استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر سید محمد باقری که زحمت هدایت همه جانبه مرا در این پایان‌نامه برعهده داشتند، بسیار سپاسگزارم، چرا که صبر و بردباری فراوان و راهنمایی‌های‌شان راه پیشبردم در این پایان‌نامه را هموار نمود. همچنین از جناب آقای دکتر پورمهدیان که زحمت داوری رساله‌ام رابر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم. از جناب آقای گلشنی، دانشجوی دکتری دانشگاه شهید باهنر کرمان، نیز به خاطر کمک‌هایشان در کامل‌تر کردن اثبات‌ها متشکرم.

پدر و مادر عزیزم دستانتان را می‌بوسم و سپاسگزار همیشگی همه تلاشهای شما در زندگی‌ام هستم و آرزو می‌کنم خداوند منان نعمت وجود شما را همیشه گرمابخش زندگی و چراغ راه آینده‌ام نماید.

چکیده

در نوشته‌ی حاضر، هدف ما بررسی مجموعه‌ی فاصله‌های (بین نقاط) یک فضای لهستانی است. به همین منظور، در فصل اول آشنایی کوتاهی با فضاهای لهستانی و انواع خاص فضاهای متریک، مجموعه‌های افکنشی، آناکاویک و مکمل آناکاویک خواهیم داشت.

در فصل دوم، قضایای پایه‌ای فضاهای لهستانی و مجموعه‌های آناکاویک را بررسی می کنیم. فصل سوم نیز، با اصلی‌ترین قضیه‌ی این پایان‌نامه که مجموعه‌ی فاصله‌ی یک فضای متریک لهستانی را بررسی می‌کند، شروع می شود و در نهایت مجموعه‌ی فاصله‌های کلاسهایی خاص از فضاهای لهستانی مانند فشرده، همبند راهی و ... را بررسی می کنیم.

کلید واژه: آناکاویک، فضای لهستانی، مجموعه‌ی فاصله‌ها

فهرست مطالب

فهرست نمودارها

عنوان **صفحه**

فصل اول: مقدمات و پیش نیازها

مقدمه

نظریه‌ی مجموعه‌های توصیفی، مطالعه‌ی "مجموعه‌های تعریف‌پذیر" در فضاهای لهستانی (جدایی-پذیر و با متر کامل) است. در این رویکرد، مجموعه‌ها در پایگان‌هایی که بر اساس پیچیدگی تعریف آنها تعیین شده، دسته‌بندی می‌شوند و سپس ساختار این مجموعه‌ها در هر کدام از سطوح، بررسی می‌شود.

ابتدا مجموعه‌های بورل را داریم، یعنی آنهایی که از مجموعه‌های باز از یک فضای لهستانی با گرفتن مکمل و اجتماع‌های شمارا به دست می‌آیند. کلاس چنین مجموعه‌هایی با B نشان داده می‌شود. این کلاس را می‌توان در یک پایگان ترامتناهی به طول ω_1 (اولین اردینال ناشمارا)، به نام پایگان بورل، بررسی کرد. این پایگان شامل مجموعه‌های باز، بسته، F_σ (اجتماع شمارای بسته‌ها)، G_δ (اشتراک شمارای بازها)، $G_{\delta\sigma}$ (اجتماع شمارایی از G_δ)، $F_{\sigma\delta}$(اشتراک شمارایی از F_σ) و ... است.

در نشانه گذاری منطقی جدید، این کلاسها با Σ^0_ξ و Π^0_ξ برای $1 \leq \xi < \omega_1$ نمایش داده می-شوند که در آن:

$\Sigma_1^0 =$ باز و $\Pi_1^0 =$ بسته

$\Sigma_\xi^0 = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \xi_n < \xi$ که A_n در $\Pi_{\xi_n}^0$ است$\}$

$\Pi_\xi^0 =$ مکمل مجموعه‌های Σ_ξ^0

(بنابراین، $\Sigma_2^0 = F_\sigma, \Pi_2^0 = G_\delta, \Sigma_3^0 = G_{\delta\sigma}, \Pi_3^0 = F_{\sigma\delta}$ و غیره).

پس B به صورتی که در پایگان زیر آمده است، منشعب می‌شود:

$\Sigma_1^0 \subseteq \Sigma_2^0 \subseteq \dots \subseteq \Sigma_\xi^0 \subseteq \dots \subseteq \Sigma_\eta^0$

$\Pi_1^0 \subseteq \Pi_2^0 \subseteq \dots \subseteq \Pi_\xi^0 \subseteq \dots \subseteq \Pi_\eta^0$

در اینجا $\xi \leq \eta < \omega_1$، هر کلاس در کلاس سمت راست خودش مشمول است و

$$B = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma_\xi^0 = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Pi_\xi^0$$

فراسوی مجموعه‌های بورل، مجموعه های دیگری به نام مجموعه‌های افکنشی را داریم، که آنهایی هستند که با افکنش (تصویر پیوسته) و مکمل‌گیری از مجموعه‌های بورل به دست می‌آیند.

کلاس مجموعه‌های افکنشی، که با P ، نمایش داده می‌شود، در یک پایگان نامتناهی به طول ω (اولین اردینال نامتناهی) به نام پایگان افکنشی، که شامل مجموعه‌های آناکاویک(A) (تصویر پیوسته‌ی بورل‌ها)، مکمل‌آناکاویک (CA) (مکمل مجموعه‌های آناکاویک)، PCA (تصویرهای پیوسته-ی CA)، $CPCA$ (مکمل‌های PCA) و ... می‌باشد، منشعب می‌شود. در نشانه‌گذاری منطقی قرار می-دهیم:

$\Sigma_1^1 =$ آناکاویک

$\Pi_1^1 =$ مکمل آناکاویک

تصویرهای پیوسته‌ی مجموعه‌های $\Sigma_{n+1}^1 = \Pi_n^1$

مکمل مجموعه‌های $\Pi_{n+1}^1 = \Sigma_{n+1}^1$

به طوری که در نمودار پایین هر کلاس در کلاس سمت راست خودش مشمول است:

$$B \quad \begin{matrix} \Sigma_1^1 \\ \Pi_1^1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Sigma_2^1 \\ \Pi_2^1 \end{matrix} \ \cdots \ \begin{matrix} \Sigma_n^1 \\ \Pi_n^1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Sigma_{n+1}^1 \\ \Pi_{n+1}^1 \end{matrix} \ \cdots$$

و

$$P = \bigcup_n \Sigma_n^1 = \bigcup_n \Pi_n^1$$

البته می‌توان از پایگان افکنشی فراتر رفت وتوسیع‌های ترامتناهی از آن وحتی مجموعه‌های تعریف-پذیر پیچیده‌تری از فضاهای لهستانی را مطالعه کرد، اما ما خود را به مجموعه‌های افکنشی و بورل که موضوعی از نظریه‌ی مجموعه‌های توصیفی کلاسیک است، محدود می‌کنیم.

نظریه‌ی مجموعه‌های توصیفی برای مدتی نزدیک به یک قرن تاکنون، یکی از جنبه‌های مهم تحقیقات در نظریه‌ی مجموعه‌ها بوده است. علاوه بر این، نتایج این نظریه در شاخه‌های گوناگونی از ریاضیات مانند منطق ریاضی، ترکیبیات، توپولوژی، آنالیز حقیقی و آنالیز هارمونیک، آنالیز تابعی، نظریه‌ی اندازه و احتمال و گروه‌های توپولوژیک قابل استفاده است. در این فصل، هدف اصلی ما، فراهم آوردن یک معرفی روشن و ساده از نظریه مجموعه های توصیفی کلاسیک است.

فضاهای لهستانی

۱. فضاهای متریک و توپولوژیک

۱.الف. فضاهای توپولوژیک

تعریف: یک فضای توپولوژیک، جفتی مانند (X,τ)است که در آن X یک مجموعه است و τ یک گردایه از زیرمجموعه‌های X است به طوری که $\varnothing, X \in \tau$ و τ تحت اجتماع‌های دلخواه و اشتراک‌های

متناهی بسته است. چنین گردایه‌ای یک توپولوژی روی X و اعضای آن مجموعه‌های باز نامیده می-شوند. مکمل مجموعه‌های باز، بسته نامیده می‌شود. هم $\varnothing$ و هم X بسته‌اند و اشتراک‌های دلخواه و اجتماع‌های متناهی از مجموعه‌های بسته نیز بسته‌اند.

مجموعه‌ای به شکل $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ که در آن U_nها باز هستند، یک مجموعه G_δ نامیده می شود و

مجموعه‌ای به شکل $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ که F_n ها مجموعه‌هایی بسته اند، یک مجموعه‌ی F_σ نامیده می‌شود.

تعریف: یک زیرفضا از (X,τ) شامل زیرمجموعه‌ای چون $Y \subseteq X$ با توپولوژی القایی است.

تعریف: یک پایه برای یک توپولوژی τ گردایه‌ای چون $B \subseteq \tau$ است با این خاصیت که هر مجموعه‌ی باز اجتماع اعضای B است (قرارداد می‌کنیم که اجتماع تهی، مجموعه‌ی تهی را می‌دهد). شرط لازم و کافی برای اینکه گردایه‌ی B از زیر مجموعه‌های X ، یک پایه برای یک توپولوژی باشد این است که اشتراک هر دو مجموعه از مجموعه های B را بتوان به صورت اجتماعی از اعضای B نوشت.

تعریف: یک زیر پایه برای یک توپولوژی τ گردایه‌ای چون $s \subseteq \tau$ است به طوری که مجموعه‌ی تمام اشتراک‌های متناهی اعضای s پایه‌ای برای τ باشد.

برای هر خانواده دلخواه s از زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی X ، کوچکترین توپولوژی τ شامل s وجود دارد و توپولوژی تولید شده توسط s نامیده می‌شود. این توپولوژی شامل تمامی اجتماع‌ها از اشتراک‌های متناهی از اعضای s است (قرارداد می‌کنیم اشتراک تهی، X را می‌دهد). به وضوح، s یک زیرپایه برای τ است.

تعریف: یک فضای توپولوژیک، شمارای نوع دوم نامیده می‌شود هرگاه پایه‌ای شمارا داشته باشد.

تعریف: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$، یک همسایگی باز حول x، یک مجموعه‌ی باز شامل x است.

تعریف: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد. یک پایه‌ی همسایگی از $x \in X$، گردایه‌ای چون U از همسایگی‌های باز از x است به طوری که برای هر همسایگی باز V از x، $u \in U$ ای وجود دارد که $u \subseteq V$.

تعریف: فرض کنید فضاهای توپولوژیک Y, X داده شده‌اند. نگاشت $f : X \to Y$، پیوسته است هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز، مجموعه‌ای باز باشد. این نگاشت باز (به ترتیب بسته) است اگر تصویر هر مجموعه‌ی باز (به ترتیب مجموعه‌ی بسته) مجموعه‌ای باز (به ترتیب بسته) باشد. این نگاشت یک هومئومورفیسم است هرگاه یک دوسویی موجود باشد که هم پیوسته و هم باز است. در نهایت این نگاشت، نشاندن نامیده می‌شود هرگاه هومئومورفیسمی بین X و $f(X)$ (با توپولوژی القایی اش) باشد.

اگر $(Y_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد و $f_i : X \to Y_i$ خانواده‌ای از توابع باشد، کوچکترین توپولوژی روی X که همه‌ی f_i ها پیوسته باشند وجود دارد. این توپولوژی، توپولوژی تولید شده توسط $(f_i)_{i\in I}$ نامیده می‌شود و خانواده‌ی

$$S = \{ f_i^{-1}(U) : \ U \subseteq Y_i , \text{ باز } U, i \in I\}$$

زیرپایه‌ی آن است. اگر S_i زیرپایه‌ای از توپولوژی Y_i باشد، می‌توان U را در اینجا به S_i محدود کرد.

حاصلضرب $\prod_{i\in I} X_i$ از خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک $(X_i)_{i\in I}$، فضای توپولوژیکی شامل حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های X_i است که توپولوژی آن، توپولوژی تولید شده توسط تابع‌های تصویر $(x_i)_{i\in I} \to x_j$ ، $(j \in I)$است. پایه‌ی این توپولوژی مجموعه‌های $\prod_i U_i$ که در آن برای هر i،

U_i در X_i باز است و به جز تعداد متناهی $i \in I$، $U_i = X_i$، می باشد. اگر B_i پایه‌ای از توپولوژی X_i باشد، مجموعه‌های به فرم $\prod_i U_i$ که برای همه‌ی i ها به جز تعداد متناهی از آنها، $U_i = X_i$، و برای بقیه i ها، $U_i \in B_i$، تشکیل یک پایه برای توپولوژی حاصلضربی می‌دهند. اگر برای همه‌ی $i \in I$، $X_i = X$، آنگاه قرار می‌دهیم:

$$X^I = \prod_{i \in I} X_i$$

مجموع $\bigoplus_i X_i$ از خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک $(X_i)_{i \in I}$(در حد هومئومورفیسم) مانند زیر تعریف می‌شود:

اگر هر یک از X_iها را با یک کپی هومئومورفیک عوض کنیم، می‌توانیم فرض کنیم مجموعه‌های X_iدو به دو مجزا هستند. قرار دهید: $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. مجموعه‌ی $U \subseteq X$ باز است اگر وتنها اگر $U \cap X_i$ برای هر $i \in I$ در X_i باز باشد.

۱.ب. فضاهای متریک

تعریف: یک فضای متریک زوجی چون (X, d)است که X یک مجموعه است و $d : X^2 \to [0, \infty)$ یک نگاشت که شروط زیر را برای هر سه نقطه‌ی $x, y, z \in X$ برآورده می‌کند.

(۱) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(۲) $d(x, y) = d(y, x)$

(۳) $d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z)$

چنین نگاشتی یک متر روی X نامیده می‌شود.

تعریف: گوی باز با مرکز x و شعاع r اینگونه تعریف می‌شود:

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

(گوی بسته نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(B_{cl}(x,r) = \{y \in X: d(x,y) \le r\}$$

این گوی‌های باز تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی می‌دهند که توپولوژی فضای متریک نامیده می‌شود.

تعریف: یک فضای توپولوژیک، متریک‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه متری چون d روی X موجود باشد که τ توپولوژی (X,d) باشد. در این صورت می‌گوییم که d متری سازگار با τ است.

تعریف: یک زیرمجموعه‌ی $D \subseteq X$از فضای توپولوژیک X، چگال است اگر با هر مجموعه‌ی باز ناتهی، مقطع مشترک داشته باشد. اگر فضای X شامل یک مجموعه‌ی چگال شمارا باشد، جدایی‌پذیر نامیده می‌شود. هر مجموعه‌ی شمارای نوع دوم، جدایی‌پذیر است (اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست).

اگر X متریک‌پذیر باشد، آنگاه X جدایی‌پذیر است اگر و تنها اگر شمارای نوع دوم باشد.

تعریف: تابع $f: X \to Y$ بین دو فضای متریک (X,d_X) و (Y,d_Y) یک ایزومتری است اگر یک دوسویی باشد و $d_X(x_1,x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$.

تعریف: یک زیر فضا از فضای متریک (X,d)، زیر مجموعه‌ی Y از X است که با متریک القا شده‌ی $d|Y$ مجهز است. ($d|Y(x,y) = d(x,y)$ برای هر $x,y \in X$).

حاصلضرب دنباله‌ای از فضاهای متریک $((X_n,d_n))_{n\in\mathbb{N}}$، فضای متریک $(\prod_n X_n, d)$ است که در آن

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$$

که $x=(x_n)$ و $y=(y_n)$ و توپولوژی این فضای متریک، حاصلضرب توپولوژی‌های $((X_n,d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ است. بنابراین، حاصلضرب دنباله‌ای از فضاهای توپولوژیک متریک‌پذیر، متریک‌پذیر است.

مجموع خانواده‌ی $((X_i,d_i))_{i\in I}$ از فضاهای متریک (در حد ایزومتری) اینگونه تعریف می‌شود:

با کپی کردن متریک هر X_i روی یک مجموعه با کاردینال مساوی، می‌توانیم فرض کنیم X_iها دو به دو مجزا هستند. قرار دهید: $X=\bigcup_{i\in I} X_i$. متریک d روی X را اینگونه تعریف می‌کنیم:

اگر $x,y\in X_i$

$$d(x,y)=d_i(x,y),$$

اگر $x\in X_i, y\in X_j, i\neq j$ $\quad d(x,y)=1$

بنابراین مجموع فضاهای توپولوژیک متریک‌پذیر، متریک‌پذیر است.

۲.درخت

۲.الف. مفاهیم پایه

مفهوم درخت یکی از ابزارهای ترکیبیاتی پایه‌ای در نظریه‌ی مجموعه‌های توصیفی است. آنچه در اینجا به آن به عنوان درخت ارجاع داده می‌شود، همانند مشابه‌اش در نظریه‌ی گراف یا نظریه‌ی مجموعه‌ی ترکیبیاتی نیست، اگر چه مفهومی نزدیک است.

فرض کنید A مجموعه‌ای ناتهی باشد و $n\in\mathbb{N}$. مجموعه‌ی دنباله‌های متناهی چون

$$s=(s(0),\dots,s(n-1))=(s_0,\dots,s_{n-1})$$

به طول n از A را با A^n نمایش می‌دهیم.

همچنین حالت $n=0$، که در آن $A^0=\{\varnothing\}$ و $\varnothing$ در اینجا نشان دهنده‌ی دنباله‌ی تهی است، مجاز می‌شماریم.

طول یک دنباله‌ی متناهی مانند s را با $length(s)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $length(\varnothing)=0$.
اگر $s\in A^n$ و $m\le n$، قرار می‌دهیم:

$$s|m=(s_0,...,s_{m-1})$$

(بنابراین $s|0=\varnothing$).

اگر t,s دو دنباله‌ی متناهی از A باشند و برای m ای که $m\le length(t)$، $s=t|m$، می‌گوییم s یک قطعه‌ی ابتدایی از t است یا t یک توسیع از s است (و با $s\subseteq t$ نمایش می دهیم). بنابراین $\varnothing\subseteq s$، برای هر s.

دو دنباله‌ی متناهی که یکی قطعه‌ی ابتدایی از دیگری است سازگار نامیده می‌شوند و در غیر این صورت ناسازگار نامیده می‌شوند. اگر t,s ناسازگار باشند با $s\perp t$ نمایش می‌دهیم.

در نهایت قرار دهید:

$$A^{<N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A^n$$

مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های متناهی از A .

$A^{\mathbb{N}}$ را مجموعه‌ی تمام دنباله‌های نامتناهی $x=(x(n))=(x_n)$ از A می‌گیریم.

تعریف: یک درخت روی یک مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی $T\subseteq A^{<N}$ است که تحت قطعات ابتدایی بسته است، یعنی اگر $t\in T$ و $s\subseteq t$، آنگاه $s\in T$. (به خصوص، اگر T ناتهی باشد، $\varnothing\in T$). اعضای T را گره‌های T می‌نامیم. یک شاخه‌ی نامتناهی از T دنباله‌ای چون $x\in A^{\mathbb{N}}$ است به طوری که برای هر n، $x|n\in T$.

تنه‌ی T، که با $[T]$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ی همه‌ی شاخه‌های نامتناهی از T است؛ یعنی

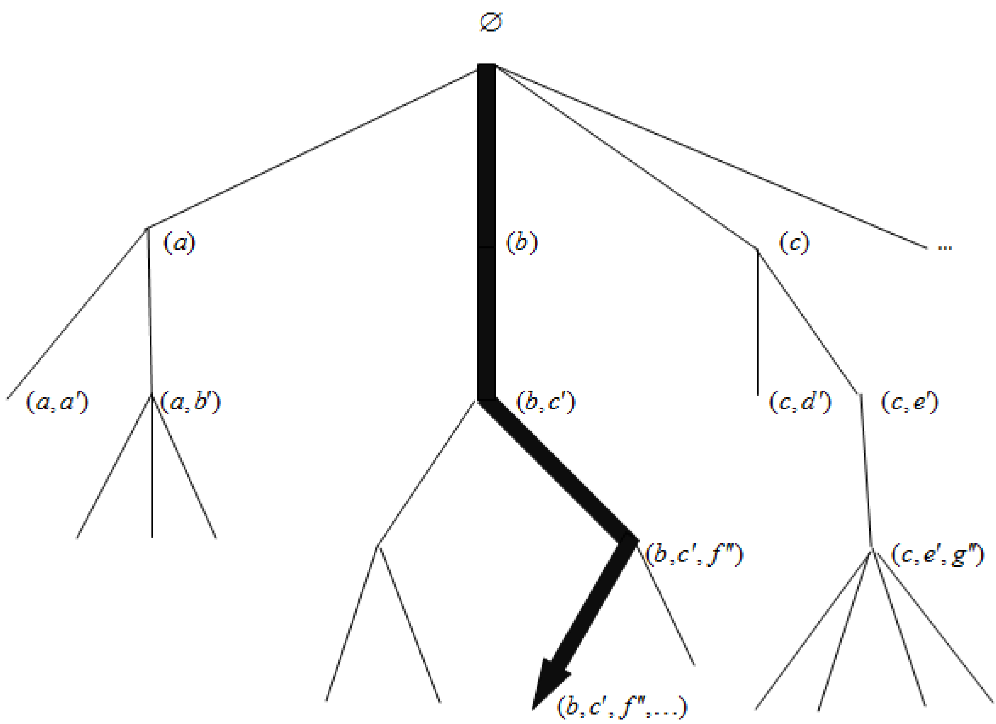
$[T]=\{x\in A^{\mathbb{N}}:\forall n(x|n\in T)\}$

در نهایت، درخت T را هرس می‌نامیم اگر هر $s\in T$ یک توسیع سره داشته باشد؛ به این معنی که t ای موجود باشد که $s\underset{\neq}{\subset}t$ و $t\in T$.

یک درخت را همانگونه که در نمودار صفحه‌ی بعد آمده است تجسم می‌کنیم (نمودار ۱-۱).

خط پررنگ یک شاخه‌ی نامتناهی $(b,c',f'',\ldots)\in[T]$ را نمایش می‌دهد. درختی که در این نمودار می‌بینید، هرس نیست. درخت دودویی کامل $\{0,1\}^{<N}$ که در نمودار ۱-۲ نمایش داده شده است، هرس است.

می‌توان مجموعه‌ی A را به عنوان یک فضای توپولوژیک با توپولوژی گسسته در نظر گرفت. در این توپولوژی هر زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی A باز است. این فضای توپولوژیک، متریک‌پذیر است با متر سازگار: اگر $a\neq b$، $d(a,b)=1$.



نمودار ۱-۱