بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شيخ بهايي

دانشكده علوم رياضي و كامپيوتر

پايان نامه كارشناسي ارشد رياضي كاربردي

عنوان :

شرايط بهينگيε ـ پرتو براي مساله برنامه ريزي چند هدفه محدب از طريق تابع ماكزيمم

پژوهشگر:

محمد سلطاني

استاد راهنما:

دكتر جعفر زعفراني

تيرماه ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده :

ما در این پایان نامه یک مساله بهینه سازی محدب را در نظر می گیریم که مجموعه موجه در آن به وسیله قیود مساوی آفین ، قیود نابرابری محدب و خلاصه اینکه مجموعه قیود محدب تعریف می شود. در ادامه شرایط لازم وکافی کان – تاکر و فریتز جان را برای جواب های ε-پرتودر یک مساله بهینه سازی چند هدفه مورد بررسی قرارمی دهیم.برای این منظور مساله بهینه سازی چند هدفه را از طریق سه روش تابع ماکزیمم ، مجموع وزنی از اهداف و تابع جریمه به مساله بهینه سازی اسکالر تبدیل می کنیم و برای انجام این کار از شرایط لازم و کافی فریتز جان برای ε-بهینگی استفاده می کنیم.

کلمات کلیدی:

جواب های تقریبی ، ε - موثر ، توابع ماکزیمم ، بهینگی ε - پرتو ، ε – زیردیفرانسیل

مقدمه :

در طی بیست سال گذشته توجه وعلاقه زیادی برای به دست آوردن جواب های تقریبی مسائل بهینه سازی وجود داشته است .این توجه وعلاقه به دو دلیل است :

اولا :مدلهای ریاضی یک تقریبی از موقعیت های عملی است . ثانیا: استفاده از الگوریتم در کامپیوتر برای حل مسائل بهینه سازی اغلب منجر به به دست آوردن جواب تقریبی می شود .

به ویژه : این علاقه در مسائل بهینه سازی چند هدفه تاکیدشده است زیرا ناحیه مطالعات به قصد مدلهای وسیع در عمل استفاده شده است.

اولین مفهوم از جواب های تقریبی یا جواب ε–موثر در مسائل بهینه سازی چند هدفه توسط کوتات لیدز [۸] ولریدن [۱۵] و وایت [۱۸] ارائه شده است.

لریدن نقطه ε - پرتو را برای یک مجموعه تعریف می کند وبا شروع از این مفهوم یک جواب ε- بهینه از مسائل بهینه سازی اسکالر رابه یک جواب ε- پرتو از مساله بهینه سازی چند هدفه گسترش می دهد.

این تعاریف شبیه تعاریفی است که در کوتات لیدز [۸] معرفی شده است.این مفهوم بیشتردر کنفرانسها وبرای مسائل بهینه سازی چند هدفه استفاده می شود. در وایت [۱۸] شش مفهوم متفاوت از ε–جواب موثر و پنج روش حل مسائل بهینه چند هدفه آنالیز شده است.

در گذشته تحقیقات از این نقطه شروع می شد که نتایج ε -بهینگی مسائل بهینه سازی اسکالر را در مسائل بهینه سازی چند هدفه گسترش می دادند .

به خصوص اینکه لیو [۱۲,۱۰] ،یوکویاما در [۲۰] ،لیو و یوکویاما در [۱۳] ، دوتا و وتریول [۳] و گوتیریز [۶,۴] شرایط کان تاکر برای جواب ε–پرتو موثر در مسائل بهینه سازی چند هدفه را مورد بررسی قرار داده اند.

در بهینه سازی اسکالر دو روش کلی در بدست آوردن شرایط کان تاکر برای جوابهای تقریبی وجود دارد.روش اول بر اصل تغییرات اکلند[۱۴] پایه ریزی شده است و روش دوم به وسیله ε-زیردیفرانسیل در مسائل بهینه سازی محدب طراحی شده است. [۱۹,۱۷]

در برنامه ریزی چند هدفه ما می توانیم از شرایط کان تاکر برای جواب های ε-پرتو موثر استفاده کنیم واز تکنیکهایی که بتوانیم مسائل بهینه سازی چند هدفه را به مسائل اسکالر تبدیل کنیم از قبیل اینکه جواب ε-پرتو موثر مساله اسکالر تقریبی از جواب مساله چند هدفه است.

برای تبدیل مسائل بهینه سازی چند هدفه به مسائل اسکالر سه روش وجود دارد:

۱-تابع جریمه [۱۳،۱۲،۱۱،۱۰] ۲-مجموع وزنی از اهداف [۱۲،۳،۱] ۳-توابع ماکزیمم [۹،۴]

در این پایان نامه :ما از تابع ماکزیمم برای ساده کردن شرایط فریتز جان و کان تاکر در به دست آوردن جواب ε-پرتودر مسائل بهینه سازی چند هدفه محدب استفاده می کنیم.

با استفاده از این روش (ماکزیمم)جواب های ε-پرتو موثر به دست آمده توسط مساله بهینه اسکالر را به مساله بهینه سازی چند هدفه مربوط کرده وجواب را توسیع می دهیم .[۳،۱۱،۱۲،۱۷،۲۰]

در قسمت بعدی به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی می پردازیم.

در بخش سوم ، ارتباط بین جواب های ε-پرتو در مسائل بهینه سازی چند هدفه و تقریب جواب در مسائل بهینه سازی اسکالر را بیان می کنیم.

در بخش چهارم ،توجه خود را به مسائل چند هدفه محدب محدود می کنیم و شرایط کان تاکر و فریتز جان را برای جواب ε-پرتو موثر بررسی می کنیم و نتایج به دست آمده رابا روش وزنی دوباره باز خوانی می کنیم.در نهایت نتایج خلاصه کار را توضیح می دهیم.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

بـا توجـه بـه اینکـه اکثـر مسـائل ریاضـیات بـه هـم مربـوط اسـت مـا بـرای تشـریح مسـائل ایـن پایـان نیـاز بـه بیـان تعـاریف و قضـایای مقـدماتی مربـوط بـه ایـن مبحـث داریـم . ایـن فصـل شـامل دو بخـش اسـت . در بخـش اول بـه بیـان یـک سـری از تعـاریف و مفـاهیم مقـدماتی و نتـایج کلیـدی مـی پـردازیم و در بخـش دوم بـا معرفـی یـک مسـاله بهینـه سـازی چنـد هدفـه ، جـواب هـای ε- پرتـو ، ε - پرتـو ضـعیف و ε - پرتـو سـره تعریـف می کنیم. [۳،۷،۱۵،۲۱]

۱-۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱-۱

فرض کنید X زیر مجموعه R^{n} باشد. $A \subseteq X$را یک مجموعه محدب می نامیم اگر برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم : $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$

فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_m$ عناصری از مجموعه محدب A باشد،در این صورت مجموع

$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ متعلق بهA است، هرگاه $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ و$\lambda_i \geq 0$ باشد. X را ترکیب محدب از عناصر $x_1, x_2, \dots, x_m$ می نامیم.

تعریف ۱-۲

فرض کنیم$A \subseteq X$ در این صورت کوچکترین مجموعه محدب شامل Aرا غلاف محدب A گوییم وبرابراست با اشتراک تمام مجموعه های محدب شامل مجموعه A .

تعریف ۱-۳

مجموعه $A \subseteq X$ را مخروط می نامیم اگر به ازای هر $\lambda \geq 0$ داشته باشیم: $\lambda A \subseteq A$.

در این قسمت تعاریفی ازتوابع محدب و مقعرکه نقش مهمی در مسائل بهینه سازی دارند ارائه می دهیم. در تعاریف وقضایای زیر X زیرمجموعه محدب از R^{n} و تابع $f : X \longrightarrow R \cup \{\infty\}$ در نظر گرفته شده است.

تعریف ۱-۴

اگر S یک زیر مجموعه ناتهی ومحدب از X باشد . تابع $f : X \longrightarrow R \cup \{\infty\}$ روی S محدب است اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ و $x_1 \neq x_2$ وهر $\lambda \in (0,1)$ داریم :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

تابع f را مقعر می گوییم هرگاه $-f$ محدب باشد.

اگر نامساوی اکید باشد توابع محدب و مقعر را توابع محدب و مقعر اکید می نامیم.

مانند تابع $\mathrm{f(x)} = |\mathrm{x}|$ که روی R محدب و تابع $\mathrm{f(x)} = -|\mathrm{x}|$ مقعر است.

تعریف ۱-۵

تابع f را آفین می نامیم ، هرگاه هم محدب و هم مقعر باشد مانند توابع خطی.

تعریف ۱-۶

فرض کنید تابع $\mathrm{f}: C \subseteq X \longrightarrow R \cup \{\infty\}$ مساله بهینه سازی :

$$\begin{array}{ll} \min & \mathrm{f(x)} \\ \mathrm{s.t} & \mathrm{x} \in \mathrm{C} \end{array}$$

را یک مساله برنامه ریزی ریاضی می گوییم و با MP نشان می دهیم ،تابع f و مجموعه C را به ترتیب تابع هدف و مجموعه قیود می گوییم .

چنانچه C یک زیر مجموعه سره از X باشد ، MP را یک مساله برنامه ریزی مقید و اگر C برابر X باشد MP را نامقید می نامیم .

نقطه $\bar{\mathrm{x}}$ را مینیمم سراسری MP می گوییم، اگر به ازای هر $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$ داشته باشیم : $\mathrm{f(x)} \geq \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$

نقطه$\bar{\mathrm{x}}$ را مینیمم موضعی MP می گوییم ، هرگاه یک همسایگی حول نقطه $\bar{\mathrm{x}}$ وجودداشته باشد به طوریکه برای هر $\mathrm{x} \in N(\bar{\mathrm{x}})$ داشته باشیم : $\mathrm{f(x)} \geq \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$

ما هم اکنون قصد داریم یک جواب تقریبی بدست آوریم ،برای این منظور با فرض $\varepsilon \geq 0$ یک جواب ε-مینیمم از مساله MP ،تعریف می کنیم .

تعریف ۱-۷

تابع $\mathrm{f}: C \subseteq X \longrightarrow R \cup \{\infty\}$ را در نظر می گیریم.نقطه $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{C}$ را یک ε-مینیمم از مساله MP می نامیم ،هر گاه به ازای هر $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$ داشته باشیم :

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) - \varepsilon \leq \mathrm{f(x)}$$

تعریف ۱-۸

تابع $f: X \to R \cup \{\infty\}$ را سره می گوییم اگر دامنه f غیر تهی باشد یعنی :

$$\{ x \in X : \quad f(x) < \infty \}$$

تعریف ۱-۹

برای هر تابع حقیقی f مجموعه ای به نام زبر نمودار f در نظر می گیریم که این مجموعه به صورت زیر تعریف می شود :

$$\text{epi } f = \{(x, \lambda) \in X \times R : \quad f(x) \leq \lambda \}$$

تعریف ۱-۱۰

فرض کنید P یک مخروط محدب و بسته در $X \subseteq R^n$ باشد و همچنین رابطه $\leq$ روی X به صورت زیر تعریف شده باشد : $x \leq_P y \iff y - x \in P$

در اینصورت تابع f روی X را صعودی گوییم ،اگر برای هر $x, y \in X$ که $x \leq_P y$ داشته باشیم $f(x) \leq f(y)$.

قضیه ۱-۱

فرض کنید توابع $f_1, f_2, \dots . f_m : X \to R \cup \{\infty\}$ محدب باشد در اینصورت :

الف)برای اسکالرهای دلخواه ونامنفی $\alpha_1, \alpha_2, \dots . \alpha_m$،تابع $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$ محدب است.

ب) تابع $f(x) = \max\{ f_1(x), f_2(x), \dots . f_m(x) \}$ محدب است.

ج) اگر تابع $g : R \to R$ محدب وصعودی باشد ، آنگاه تابع (gof) محدب است.

اثبات قسمت (ج)

باید ثابت کنیم : $g[f(\lambda x + (1 - \lambda)x)] \leq \lambda g[f(x)] + (1 - \lambda)g[f(x)]$.

چون تابع f محدب است پس $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(x) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)x)$ وهمچنین چون تابع g صعودی است داریم : $g[f(\lambda x + (1-\lambda)x)] \leq g[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(x)]$ وچون تابع g محدب نیز هست در نتیجه : $g[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(x)] \leq \lambda g[f(x)] + (1-\lambda)g[f(x)]$.لذا با توجه به این نابرابری ها داریم :

$g[f(\lambda x + (1-\lambda)x)] \leq \lambda g[f(x)] + (1-\lambda)g[f(x)]$ وحکم ثابت می شود.

تعریف ۱-۱۱

تابع f همگن مثبت است اگر و فقط اگر برای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم: $f(\lambda) = \lambda f$

قضیه ۱-۲

اگرتابع $f : R^n \to R \cup \{\infty\}$ محدب وسره باشد، آنگاه f روی int dom f پیوسته است .

اثبات [۲]

تعریف۱-۱۲

تابع f را در نقطه x_0 نیم پیوسته پایینی می گوییم هرگاه : $\lim\ \inf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$

تذکر : به راحتی می توان نشان داد که تابع f را در نقطه x_0 نیم پیوسته پایینی اگر و فقط اگر :

$\lim\ \inf_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ زیرا برای هر $\delta > 0$ داریم: $\inf_{x \in B_\delta(x_0)} f(x) \leq f(x_0)$ بنابراین $\lim_{\delta \to 0}[\inf_{x \in B_\delta(x_0)} f(x)] \leq f(x_0)$ در نتیجه: $\lim\ \inf_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$ از طرفی چون تابع f نیم پیوسته پایینی است داریم : $\lim\ \inf_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

هرگاه توابع f, g نیم پیوسته پایینی باشد ،آن گاه تابع $f + g$ نیم پیوسته پایینی است.

تعریف ۱-۱۳:

فرض کنید C یک مجموعه محدب بسته غیر تهی باشد و $x \in C$ تابع شاخص را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in C \\ \infty & \text{if } x \notin C \end{cases}$$

زیر مجموعه Q از X بسته ومحدب است اگر و فقط اگر تابع شاخص آن نیم پیوسته پایینی و محدب باشد.

حال با توجه به تابع شاخص مساله MP با مساله نامقید زیر معادل است:

$$\min_{x\in X} f(x) + I_Q(x)$$

تعریف ۱-۱۴:

اگر تابع f نیم پیوسته پایینی نباشد می توان یک تابع نیم پیوسته پایینی وابسته به آن تولید کرد که اپی گراف آن با بستار اپی گراف f برابر است و با clf نشان می دهیم ،چون $\mathrm{epi}\,(clf) = \overline{\mathrm{epi} f}$

لذا اپی گراف clf بسته است ،پس این تابع نیم پیوسته پایینی است ،هم چنین ضابطه clf به صورت زیر است :

$$clf(x) = \liminf_{y\to x} f(y)$$

برای بیان نیم پیوسته پایینی f داریم : $clf(x) = f(x)$

اکنون به بیان دوگان تابع $f : X \to R \cup \{\infty\}$ که روی X^* تعریف می شود،می پردازیم:

تعریف ۱-۱۵:

تابع سره $f : X \to R \cup \{\infty\}$ را در نظر می گیریم ،تابع $f^* : X^* \to R \cup \{\infty\}$ برای هر $x^* \in X^*$

به صورت زیر تعریف می شود :

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X}\{< x^*, x > -f(x)\}$$

این تابع را مزدوج فنچل می نامیم.

همچنین تابع $f^{**} : X \to R \cup \{\infty\}$ برای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f^{**}(x) = \sup_{x\in X}\{< x^*, x > -f^*(x^*)\}$$

که تابع f^{**} را مزدوج دوم تابع f می نامیم.

برای هر $x^* \in X^*$ و هر $x \in X$ نامساوی زیررا :

$$< x^*, x > \; \leq f(x) + f^*(x^*)$$

نا مساوی یانگ فنچل گوییم ، به علاوه برای هر $x \in X$ داریم:

$$f^{**}(x) \leq f(x)$$

قضیه ۱-۳

تابع $f: X \to R \cup \{\infty\}$ سره و محدب ونیم پیوسته پایینی است، اگر وتنها اگر $f^{**}(x) = f(x)$ برای هر $x \in X$ و همچنین اگر $h(x) = \lambda f(x)$ باشد، آنگاه : $h^*(x^*) = \lambda f^*(\frac{x^*}{\lambda})$.

اثبات [۲]

تعریف ۱-۱۶

فرض کنید K زیر مجموعه X باشد ، تابع مزدوج I_K به صورت زیر است :

$$I^*_K(x^*) = \sup_{x \in K} < x^*, x >$$

I^*_K را تابع محمل مجموعه K می گوییم و به صورت زیر نشان می دهیم :

$$I^*_K(x^*) = \sigma_K(x^*) := \sigma(K, x^*) = \sup_{x \in K} < x^*, x >$$

تعریف ۱-۱۷

تابع $f : R^n \to R$ را در نقطه x_0 مشتق پذیر می گوییم اگر بردار $\nabla f(x_0) \in R^n$ موجود باشد به طوریکه:

$$f(x) = f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 > + O(\| x - x_0 \|)$$

و $\lim_{x \to x_0} O(\| x - x_0 \|) / \| x - x_0 \| = 0$

نکته :

فرض می کنیم$x_0 \in \text{int dom f}$ باشد. تابع محدب و مشتق پذیر f مینیمم خود را در نقطه x_0 اختیار می کند ،اگر و فقط اگر $\nabla F(x_0) = 0$

اثبات [۲]

تعریف ۱-۱۸

فرض کنید تابع f محدب وسره باشدو $x \in \text{dom f}$ ،آنگاه $x^* \in X^*$ را یک زیر گرادیان f در X گوییم، اگر:

$$f(y) - f(x) \geq \; < x^*, \; y - x \; > \qquad\qquad \forall\, y \in X$$

تعریف ۱-۱۹

فرض کنید تابع f محدب وسره باشدو $x \in \text{dom f}$ ،آن گاه مجموعه ای تمام زیر گرادیان های f در X را زیر دیفرانسیل f در X می نامیم وبه صورت زیر نشان می دهیم :

$$\partial f(x) = \; \{ \; x^* \epsilon X^* \;\; : \;\; f(y) - f(x) \; \geq \; < x^*, y - x > \qquad \forall \;\; y \; \in \; X \}$$

همچنین اگر $x \notin \text{dom f}$ آنگاه $\partial f(x) = 0$.

مثال : $f(x) = |x| \quad \Rightarrow \quad \partial f(0) = [-1,1]$

قضیه ۱-۵

فرض کنید تابع f محدب وسره باشدو $x_0 \in \text{dom f}$ ، نقطه x_0 مینیمم تابع f روی X است ،اگر وتنها اگر $0 \in \partial f(x_0)$.

اثبات [۲]

از آن جایی که می خواهیم ε-مینیمم تابع f را در یک مساله بهینه سازی بدست آوریم پس با فرض $\varepsilon \geq 0$ به بیان قضایای بعدی می پردازیم.

تعریف ۱-۲۰

فرض کنید : $f: X \longrightarrow R \cup \{\infty\}$ یک تابع سره محدب و $x_0 \in dom(f)$ و $\varepsilon \geq 0$.

ε - زیر دیفرانسیل تابع f در x_0 را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\partial_\varepsilon f(x_0) = \{ x^* \epsilon X^* \ : \ f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon + < x^*, x - x_0 > \qquad \forall \ x \in X \}$$

تعریف ۱-۲۱

$C \subset X$ یک زیر مجموعه محدب بسته و غیر تهی و $x_0 \in C$ را در نظر می گیریم.

$N(C, x_0)$ را مخروط نرمال نسبت به زیر مجموعه C از X در نقطه x_0 می نامیم وبه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N(C, x_0) = \{ x^* \epsilon X^* \ : < x^*, x - x_0 > \leq 0 \qquad \forall \ x \in C \}$$

تعریف ۱-۲۲

$C \subset X$ یک زیر مجموعه محدب بسته و غیر تهی و $x_0 \in C$ را در نظر می گیریم.

$N_\varepsilon(C, x_0)$ را مخروط ε - نرمال نسبت به زیر مجموعه C از X در نقطه x_0 می نامیم وبه صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N_\varepsilon(C, x_0) = \{ x^* \epsilon X^* \ : < x^*, x - x_0 > \leq \varepsilon \qquad \forall \ x \in C \}$$

گزاره ۱-۱

فرض کنید C یک مجموعه محدب بسته غیر تهی باشد و $x_0 \in C$ تابع شاخص را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in C \\ \infty & \text{if } x \notin C \end{cases}$$

حال باتوجه به تعریف ε – زیر دیفرانسیل داریم:

$$\partial_{\varepsilon} I_C(x_0) = \{ \ x^* \in X^* \ :< x^*, x - x_0 > \leq \varepsilon \quad \forall \ x \in C \ \}$$

زیرا $I_C(x) - I_C(x_0) = 0$

باتوجه به تعاریف بالاداریم : $N_{\varepsilon}(C, x_0) = \partial_{\varepsilon} I_C(x_0)$

قضیه ۱-۶

نقطه x_0 یک نقطه ε – پرتو از تابع محدب و سره f روی X است ، اگر و فقط اگر $0 \in \partial_{\varepsilon} f(x)$ باشد.

اثبات :

ابتدا فرض می کنیم $0 \in \partial_{\varepsilon} f(x)$ باشد آن گاه داریم:

$$f(x) - f(x_0) + \varepsilon \geq < 0, x - x_0 > \qquad \forall x \in X$$

در نتیجه $f(x) - f(x_0) + \varepsilon \geq 0$ و $x_0 \in \mathrm{Min}_{\varepsilon}(f, X)$.

بر عکس :

اگر $x_0 \in \mathrm{Min}_{\varepsilon}(f, X)$ داریم: $f(x) - f(x_0) + \varepsilon \geq 0$ در نتیجه

$f(x) - f(x_0) + \varepsilon \geq < 0, x - x_0 >$ و $0 \in \partial_{\varepsilon} f(x)$

قضیه ۱-۷

فرض کنید تابع f سره باشد ، دراین صورت :

$$x^* \in \partial_{\varepsilon} f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) + f^*(x^*) \leq < x^*, x_0 > + \varepsilon$$

اثبات:

ابتدا فرض می کنیم $x^* \in \partial_{\varepsilon} f(x_0)$ با توجه به تعریف داریم :

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon + < x^*, x - x_0 > \ \Leftrightarrow \ f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon + < x^*, x > - < x^*, x_0 >$$

$$\Leftrightarrow \ < x^*, x_0 > - f(x_0) + \varepsilon \geq < x^*, x > - f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$< x^*, x_0 > -f(x_0) + \varepsilon \geq \sup_{x\in X}\{< x^*, x > -f(x)\}$$

پس: $< x^*, x_0 > -f(x_0) + \varepsilon \geq f^*(x^*)$

در نتیجه: $< x^*, x_0 > + \varepsilon \geq f^*(x^*) + f(x_0)$ اگر روابط را از پایین به بالا برویم عکس قضیه نیز اثبات می شود.

تعریف ۱-۲۳

فرض کنید توابع $f_2: X \to R \cup \{\infty\}, f_2: Y \to R \cup \{\infty\}$ سره باشند،تابع $f_1 \square f_2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\left(f_1 \square f_2\right)(x) = \inf_{x_1,x_2\in X}\{\ f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid \ x_1 + x_2 = x\}$$

تعریف ۱-۲۴

فرض کنید $f: X \to R \cup \{\infty\}$ محدب باشد و تابع $A \in L(X,Y)$ تابع $Af : Y \to R \cup \{\infty\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(Af)(y) = \inf\ \{f(x) \ \mid\ Ax = y\}.$$

$\inf Af = \inf f$ و $\mathrm{dom}\ Af = A(\mathrm{dom} f)$.

فرض کنیدتوابع $f_1: X \to R \cup \{\infty\}$ و $f_2: Y \to R \cup \{\infty\}$ محدب و سره باشد. تابع $\varphi: X \times Y \to R \cup \{\infty\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$.همچنین واضح است که تابع$\varphi$ محدب وسره است .

گزاره ۱-۲

تابع$\varphi: X \times Y \to R \cup \{\infty\}$ را به صورت $\varphi(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ تعریف می کنیم و تابع $A: X \times X \to X$ به صورت $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ باشد ، آن گاه :

$$\left(f_1 \square f_2\right)(x) = (A\varphi)(x) \text{ که } x = x_1 + x_2$$

اثبات :

با توجه به تعریف $(A\varphi)$ داریم :

$(A\varphi)(x) = \inf\{\varphi(x_1, x_2) \mid A(x_1, x_2) = x\}$ در نتیجه :

$(A\varphi)(x) = \inf\{ f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x_1 + x_2 = x \}$ و برابر است با $(f_1 \square f_2)(x)$.

قضیه ۱-۸

فرض کنید توابع $f_1, f_2 : X \to R \cup \{\infty\}$ سره باشد و $\varphi: X \times Y \to R \cup \{\infty\}$ آن گاه :

الف) $\varphi^*(x_1^*, x_2^*) = f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*)$ برای هر $(x_1^*, x_2^*) \in X^*, Y^*$

ب) $(Af)^* = f^* o A^*$ و $(f_1 \square f_2)^*(x^*) = f_1{}^*(x_1^*) + f_2{}^*(x_2^*)$

اثبات :

الف) $\varphi^*(x_1^*, x_2^*) = \sup \{ < x_1^*, x > + < x_2^* + y > -\varphi(x, y) \mid (x, y) \in (X, Y) \}$

با توجه به تعریف $\varphi(x, y)$ داریم :

$$\varphi^*(x_1^*, x_2^*) = \sup \{ < x_1^*, x > + < x_2^* + y > -f_1(x) - f_2(y) \mid (x, y) \in (X, Y) \}$$
$$\varphi^*(x_1^*, x_2^*) = \sup\{< x_1^*, x > -f_1(x) \mid x \in X \} + \sup\{< x_2^*, y > -f_2(y) \mid y \in Y \}$$
$$\varphi^*(x_1^*, x_2^*) = f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*)$$

ب) ابتدا نشان می دهیم که $(Af)^* = f^* o A^*$

$$(Af)^*(y^*) = \sup \{ < y^*, y > -(Af)(y) \mid y \in Y\}$$

حال با توجه به تعریف $(Af)(y) = \inf \{f(x) \mid Ax = y \}$ داریم :

$$(Af)^*(y^*) = \sup_{y\in Y} \{ < y^*, y > -\inf_{\{x|Ax=y\}} f(x) \}$$
$$(Af)^*(y^*) = \sup \{ < y^*, y > -f(x) \mid (x, y) \in (X, Y), Ax = y\}$$
$$(Af)^*(y^*) = \sup \{ < y^*, Ax > -f(x) \mid x \in X\} = \sup \{ < A^*y^*, x > -f(x) \mid x \in X\}$$

$$= f^*(A^*y^*) = f^* o\, A^*(y^*)$$

حال چون در گزاره بالا ثابت کردیم : $(f_1 \square f_2)(x) = (A\varphi)(x)$ که $x = x_1 + x_2$ داریم :

$(f_1 \square f_2)^*(x^*) = (A\varphi)^*(x^*) = \varphi^* o\, A^*(x^*)$.

با توجه به مفروضات گزاره بالا تابع $\acute{A}: X \times X \to X$ به صورت $A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ است پس. $A^* : X^* \to X^* \times X^*$ و $A^*(x^*) = (x_1^*, x_2^*)$ در نتیجه :

لذا $\varphi^* o\, A^*(x^*) = \varphi^*(x_1^*, x_2^*) = f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*)$

$(f_1 \square f_2)^*(x^*) = f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*)$ وقسمت (ب) نیز اثبات می شود.

قضیه ۱-۹

فرض کنید توابع $f_1, f_2 : X \to R \cup \{\infty\}$ محدب و سره و نیم پیوسته پایینی باشد و $x_0 \in X$ وجود داشته باشدبه طوریکه f_1, f_2 در آن متناهی و یکی از آنها در x_0پیوسته باشد،در اینصورت :

$$\partial_\varepsilon (f_1 + f_2)(x_0) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geq 0 \\ \varepsilon_2 \geq 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \{ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0) \}$$

ابتدا نشان می دهیم :

$$\partial_\varepsilon (f_1 + f_2)(x_0) \subseteq \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geq 0 \\ \varepsilon_2 \geq 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \{ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0) \}$$

فرض می کنیم : $x^* \in \partial_\varepsilon((f_1 + f_2)(x_0)$

در نتیجه طبق قضیه۱-۷ داریم :

$$(f + f_2)^*(x^*) + (f_1 + f_2)(x_0) \leq \varepsilon + < x^*, x_0 >$$

حال با توجه به قضیه ۱-۸ ، $x_1^*, \; x_2^* \in X^*$ ، $x_1^* + x_2^* = x^*$ وجود دارد به طوریکه :

$$f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*) + f_1(x_0) + f_2(x_0) \leq \varepsilon + < x^*, x_0 >$$

$$f_1^*(x_1^*) + f_2^*(x_2^*) + f_1(x_0) + f_2(x_0) - \langle x_1^*, x_0 \rangle - \langle x_2^*, x_0 \rangle \le \varepsilon$$

$$f_1^*(x_1^*) + f_1(x_0) - \langle x_1^*, x_0 \rangle = \widetilde{\varepsilon_1} \quad , f_2^*(x_2^*) + f_2(x_0) - \langle x_2^*, x_0 \rangle = \varepsilon_2$$

با توجه به روابط بالا داریم :

$\widetilde{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \le \varepsilon$ حال $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2$ پس $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$

در نتیجه :

$$f_1^*(x_1^*) + f_1(x_0) - \langle x_1^*, x_0 \rangle \le \varepsilon_1 \quad , \quad f_2^*(x_2^*) + f_2(x_0) - \langle x_2^*, x_0 \rangle = \varepsilon_2$$

حال با توجه به قضیه ۱-۷ داریم :

$$x_1^* \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) \quad , \quad x_2^* \in \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0)$$

که نشان می دهد :

$$x^* = x_1^* + x_2^* \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0)$$

$$x^* \in \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \ge 0 \\ \varepsilon_2 \ge 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \{ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0) \}$$

در نتیجه :

$$\partial_\varepsilon((f_1 + f_2)(x_0) \subseteq \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \ge 0 \\ \varepsilon_2 \ge 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \{ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0) \}$$

اثبات عکس قضیه :

فرض می کنیم : $x^* \in \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \ge 0 \\ \varepsilon_2 \ge 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon}} \{ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0) \}$

وجود دارد $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ge 0$ به طوریکه $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ و $x^* \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) + \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0)$

$x_1^*, x_2^* \in X^*$ ، $x_1^* + x_2^* = x^*$ وجود دارد ، به طوریکه :

$$x_1^* \in \partial_{\varepsilon_1} f_1(x_0) \quad , \quad x_2^* \in \partial_{\varepsilon_2} f_2(x_0)$$

با توجه به قضیه ۱-۷ داریم :