بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

دانشکده علوم ریاضی وکامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش جبر

ماتریسها روی حلقه‌های جابه‌جایی

استاد راهنما:

دکتر رضا نکویی

مؤلف:

علی ذکوی

دی ماه 1388

تقدیم به:

تمامی روانهای پاک و اندیشه‌های آزاد وقلبهای سرشار از عشق

با تشکر و قدردانی فراوان از استاد بزرگوار وراهنمای دلسوز وصبورم دکتر نکویی

چکیده

در این پایان نامه، خواص عمومی ماتریسها روی حلقه‌های جابجایی مطالعه می‌شوند. ارائه تعریف مقدار ویژهٔ یک ماتریس روی حلقه‌های جابجایی و معرفی فرم نرمال اسمیت یک ماتریس و ارائه مطالبی پیرامون دستورالعمل قطری پذیری و الگوریتم قطری سازی یک ماتریس از دیگر موضوعات مورد بحث است. معرفی ماتریس همراه یک چندجمله‌ای و رابطه قطری‌پذیری یک ماتریس با ماتریس همراه، پایان بخش مطالب این پایان نامه است.

مقدمه

در این پایان نامه پس از بررسی خواص مقدماتی ماتریسها روی حلقه‌های جابجایی، مهمترین هدفی که دنبال می‌شود بررسی قطری کردن یک ماتریس روی حلقه‌های جابجایی است.

در فصل اول ابتدا مجموعه‌ای از تعاریف وپیش نیازها رادر مقدمه 1-1، یادآوری کردیم و پس از بیان قضیه لاپلاس، در بخش 1-2، رتبه یک ماتریس روی حلقه‌های جابجایی را معرفی کرده وپس از بررسی رابطه آن با تعریف رتبه یک ماتریس در جبر خطی کلاسیک، قضیه (N.McCoy) که راجع به جواب دستگاه معادلات همگن $Ax = 0$ است، را بیان می کنیم.

در بخش 1-3، به بیان واثبات قضیه کیلی-همیلتون پرداخته و نشان می‌دهیم این قضیه برای ماتریسها روی حلقه‌های جابجایی نیز معتبر است. در پایان فصل، فرم نرمال اسمیت یک ماتریس را در حد وسیعی تشریح می کنیم تا اهمیت این موضوع را، در ماتریسها روی حلقه‌های جابجایی برجسته‌تر سازیم .

در فصل دوم، به ارائه شرایطی می‌پردازیم که در صورت احراز این شرایط، قطری پذیر بودن یک ماتریس، امکان پذیر خواهد بود. مشابه روند موجود در جبر خطی کلاسیک در این فصل نیز ابتدا تعاریف مقدار ویژه، بردار ویژه و فضای ویژه را بیان می کنیم.

گسترده‌ترین مبحث این قسمت، بررسی آزاد بودن زیر مدولهای $E(d)$ (فضای ویژه مربوط به مقدار ویژه d) است. پایان بخش این فصل ارائه الگوریتمی است که روند قطری کردن یک ماتریس را بیان می کند.

در فصل سوم نیز بحث قطری پذیری را از زاویه چند جمله‌ای مشخصه یک ماتریس و ماتریس همراه مربوط به آن دنبال کرده و در پایان نشان می‌دهیم که اگر K یک PID باشد، $A \in M_{n\times n}(K)$ و

$\det(Ix-A)=\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$ کــه $\alpha_k \in K$ و $(\alpha_i-\alpha_j)\in U(K)$, $i\neq j$, $(i,j=1,2,\dots,n)$ آنگـــاه

ماتریس A قطری پذیر بوده و با ماتریس همراه چند جمله‌ای $\det(Ix-A)$، متشابه است.

از آنجا که در جبر خطی کلاسیک تفاضل هر دو عضـو متفـاوت از میـدان K عنصـری یکـه اسـت بـه سادگی نتیجه می‌شود که قضیه فوق تعمیم مشابه آن، در جبر خطی کلاسیک است.

فهرست

فصل اول

ماتریس‌ها روی حلقه‌های جابه‌جایی

۱-۱

در این فصل، ابتدا «رتبه یک ماتریس» روی حلقه های جابه‌جایی را تعریف کرده و ارتباط آن با حالت مشابه در جبر خطی کلاسیک (جبر خطی معمولی که اسکالرها از میدان انتخاب می شوند)، را بررسی می کنیم. در ادامه، قضیه کیلی- همیلتون روی حلقه های جابه‌جایی را بیان و اثبات کرده و در پایان، پیرامون فرم نرمال اسمیت مطالبی را ارائه خواهیم داد.

۱-۱-۱ تعریف: فرض کنید R یک مجموعه ناتهی باشد. سه تایی $(R,+,.)$ را یک حلقه گوییم، هرگاه $(R,+)$ گروهی آبلی بوده که نسبت به ضرب دارای خاصیت شرکت‌پذیری بوده و ضرب نسبت به جمع دارای خاصیت پخشی باشد. حلقه ی $(R,+,.)$ را یکدار گوییم هرگاه $۱_R \in R$ به قسمی موجود باشد که برای هر $a \in R$، $a.۱_R = ۱_R.a = a$. همچنین اگر عمل ضرب جابه‌جایی باشد گوییم R یک حلقه جابه‌جایی است. برای سهولت در نوشتن، از این پس $(R,+,.)$ را با R نمایش می دهیم.

تذکر: در این پایان نامه حلقه‌ها یکدار فرض می‌شوند البته گاهی برای تأکید بیشتر این مطلب را یادآوری می‌کنیم.

۱-۱-۲ مثال: اگر R یک حلقه باشد آنگاه $M_{n\times m}(R)$، مجموعه ی تمام ماتریسهای $n\times m$ با درایه های در R و $(M_{n\times m}(R))[x]$ مجموعه ی تمام چند جمله ایهای با ضرایب در $M_{n\times m}(R)$،همراه با جمع و ضرب طبیعی حلقه ها هستند؛ که زمینه ی اصلی مطالب این فصل و فصلهای بعدی را تشکیل می دهند.

فرض کنید T یک حلقه باشد (معمولاً در حالت ناجابه‌جایی حلقه را با T و در حالت جابجایی با R نمایش می دهیم). منظور از T^* عناصر حلقه‌ی T به جز صفر است، به عبارتی $T^* = T-\{۰\}$. همچنین عنصر $x \in T$، را مقسوم علیه صفر گوییم هرگاه $xy = ۰$ یا $yx = ۰$ برای بعضی $y \in T^*$. همچنین $Z(T)$ را به عنوان نماد تمام مقسوم علیه های صفر حلقه T به کار می بریم. عنصر x متعلق به حلقه $(T,+,\cdot)$ را یکه گوییم هرگاه $xy = yx = ۱$، برای برخی $y \in T$ و $U(T)$ را به عنوان نماد مجموعهٔ تمام عناصر یکه T به‌کارمی بریم.

دو عنصر x و y در حلقه ی جابه‌جایی R را شریک می نامیم هرگاه عنصر یکه $u \in R$ موجود باشد به قسمی که $x = uy$. هرگاه x و y شریک هم باشند، می نویسیم $x \sim y$. واضح است که "$\sim$" یک رابطه ی هم ارزی است. وقتی R یک حلقه ی جابجایی باشد و $x, y \in R$، منظور از $x|y$ این است که عنصر x عنصر y را عاد می‌کند به عبارت دیگر $xz = y$، برای بعضی $z \in R$.

یادآوری : فرض کنید F) $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(F)$یک میدان است). دترمینان ماتریس A را با $\det(A)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

که S_n گروه جایگشتهای روی n حرف بوده و اگر $\sigma\in S_n$ جایگشتی زوج باشد آنگاه $\operatorname{sgn}(\sigma)=1$ واگر فرد باشدآنگاه $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$.

همان طور که مشاهده می‌کنید تعریف دترمینان،ارتباطی به وارونپذیری عناصر میدان F نداشته و لذا این تعریف در حلقه‌های جابه‌جایی نیز به همین صورت بیان می‌شود.

۱-۱-۳ مثال: فرض کنید $T=M_{n\times n}(F)$ حلقه ی تمام ماتریسهای $n\times n$ $(n\geq 2)$، با درآیه های در میدان F باشد. در این صورت T حلقه ای ناجابه‌جایی است و

$$U(T)=\{A\in T|\det(A)\neq 0\} \text{ و } Z(T)=\{A\in T|\det(A)=0\}.$$

در اینجا رابطه $Z(T)=\{A\in T|\det(A)=0\}$، را اثبات می‌کنیم.

ابتدا فرض می‌کنیم $A\in Z(T)$ باشد. بنابراین ماتریس $0\neq B\in T$، چنان موجود است که $BA=0$ ($AB=0$). نشان می‌دهیم $\det(A)=0$. هرگاه $\det(A)\neq 0$ باشد در این صورت ماتریس A دارای وارون A^{-1} است، بنابراین با ضرب طرفین $BA=0$ ($AB=0$) در A^{-1} خواهیم داشت $B=0$ که تناقض است. بنابراین $Z(T)\subseteq\{A\in T|\det(A)=0\}$. حال فرض می کنیم $A\in\{A\in T|\det(A)=0\}$، بنابراین معادله $AX=0$ دارای جواب غیر بدیهی است. هرگاه این جواب را در ستون اول ماتریس $B\in M_{n\times n}(R)$ که سایر درآیه‌های آن صفر است قرار دهیم خواهیم داشت $AB=0$. بنابراین

$$\{A\in T|\det(A)=0\}\subseteq Z(T).$$

بدین ترتیب تساوی $Z(T)=\{A\in T|\det(A)=0\}$ اثبات می‌شود.

۱-۱-٤ تعریف: حلقه جابجایی و یکدار R را حوزهٔ صحیح گوییم هرگاه $Z(R)=\{0\}$ باشد.

حال چند نمادآشنا که درادامه به‌کرات مورد استفاده قرار می گیرند را در قالب مثال ۱-۱-۵، معرفی می کنیم.

۱-۱-۵ مثال: حلقه های زیر همگی حوزهٔ صحیح هستند.

الف) Z = حلقه ی تمام اعداد صحیح.

ب) F = هر میدان دلخواه .

ج) Q = میدان اعداد گویا.

د) $F[X_1,X_2,\dots,X_n]$ حلقه ی تمام چند جمله ایهای n متغیره، با ضرایب در میدان F.

۱-۱-۶ تعریف: زیر مجموعه‌ی ناتهی J از حلقه ی R را یک ایده‌آل حلقه R گوییم هرگاه تحت جمع بسته بوده و برای هر $t \in R$ و $x \in J$ عناصر tx و xt متعلق به J باشند.

۱-۱-۷ مثال: فرض کنید $T = M_{2\times 2}(Z)$، در این صورت برای هر عدد صحیح n ، $M_{2\times 2}(nZ)$ ایده‌آلی از حلقه T است.

۱-۱-۸ تعریف: ایده‌آل M از حلقه ی T را بیشین گوییم هرگاه $M \neq T$ و اگر ایده آل B از T چنان موجود باشد که $M \subseteq B \subseteq T$ آنگاه $B = T$ یا $M = B$. اشتراک تمام ایده آل های بیشین T را با $J(T)$ نمایش می دهیم.

۱-۱-۹ تعریف: ایده‌آل J درحلقه ی جابه‌جایی R را با تولید متناهی گوییم هرگاه $J = Rx_1 + Rx_2 + \ldots + Rx_n$، برای بعضی $x_1, x_2, \ldots, x_n \in J$. حلقه ای را که هر ایده‌آل آن با تولید متناهی باشد نوتری گوییم. همچنین ایده‌آل J در حلقه ی R را اصلی گوییم هرگاه توسط یک عنصر تولید شده باشد. هرگاه تمام ایده‌آل‌های حلقه R اصلی باشند، R را یک حلقه ایده‌آل اصلی(PIR) می‌نامیم. علاوه براین اگر R یک حوزه صحیح باشد،آنگاه گوییم R یک حوزه ایده‌آل اصلی(PID) است.

۱-۱-۱۰ مثال: Z یک PID است. همچنین اگر F یک میدان باشد آنگاه $F[X]$ یک PID است.

۱-۱-۱۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه باشد. یک $R-$مدول (چپ) گروهی آبلی مانند M است، همراه با تابعی از $R \times M \to M$ (نقش (r,m) را با rm نشان می‌دهیم)، به‌طوری که به ازای هر $r,s \in R$ و $a,b \in M$ شرایط زیربرقرارباشند

الف) $r(a+b) = ra + rb$؛

ب) $(r+s)a = ra + sa$؛

ج) $r(sa) = (rs)a$.

هرگاه R یکدار بوده و

د) به ازای هر $m \in M$ ، $1_R m = m$،

آنگاه گوئیم M یک $R-$مدول یکانی است. هرگاه R یک حلقه تقسیمی باشد در این صورت یک $R-$مدول یکانی، یک فضای برداری(چپ) نام دارد.

یک $R-$مدول راست(یکانی) به طریق مشابه تعریف می‌شود. اگر R تعویض‌پذیرباشد، به هر $R-$مدول چپ M می‌توان باتعریف $mr = rm$، به ازای $m \in M$ و $r \in R$ ، ساختار $R-$مدول راست داد. ازاینجا به بعد، $R-$مدول چپ را به اختصار $R-$مدول می گوییم.

همچنین فرض کنید M یک R – مدول باشد. زیر مجموعه ناتهی N از M را یک R – زیرمدول از M گوییم هرگاه N زیرگروه جمعی از M بوده وتحت ضرب اسکالر بسته باشد. R – زیرمدول N از M را با تولید متناهی گوییم، هرگاه $x_1, x_2, ..., x_k \in M$، چنان یافت شوند که $N = \{\sum_{i=1}^{k} r_i x_i | r_i \in R\}$ باشد.

۱-۱-۱۲تعریف: M را یک R – مدول آزاد گوییم هرگاه مجموعه‌ای از اندیسها مانند I و $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq M$ چنان یافت شوندکه $M = \oplus_{i \in I} Rx_i$. به عنوان مثال اگر R یک حلقه باشد، آنگاه R – مدول R^n که به صورت

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^t | x_1, x_2, ..., x_n \in R\}$$

تعریف می‌شود یک R – مدول آزاد است.

هر فضای برداری یک R – مدول آزاد است. (برای اطلاع از جزئیات اثبات به [۸،۲–۴]مراجعه شود). با وجود این، بعضی نابهنجاری‌ها در رفتار مدول‌های آزاد دیده می‌شود، که نمونه‌اش را در فضاهای برداری سراغ نداریم. به عنوان نمونه موارد ذیل در فضاهای برداری صادق هستند، ولی در مدول‌های آزاد روی حلقه‌های جابه‌جایی (و ناجابه‌جایی) صادق نمی‌باشند.

۱) هر زیر مجموعه مستقل خطی را می‌توان به یک پایه گسترش داد. برای مثال قرار دهید $R = Z = M$. در این صورت Z به عنوان Z – مدول، آزاد و با پایه $\{1\}$ یا $\{-1\}$ است، همچنین $\{2\}$ روی Z مستقل خطی است، ولی قابل گسترش به یک پایه برای Z- مدول Z نیست.

۲) هر مجموعه مولد شامل یک پایه است. برای مثال، باز هم قرار دهید $R = Z = M$. در این صورت مجموعه $\{2,3\}$، M را تولید می‌کند اما هیچ کدام از مجموعه‌های $\{2\}$ و $\{3\}$، M را تولید نمی‌کنند.

۳) هر زیر فضا از یک فضای برداری با تولید متناهی، خود نیز با تولید متناهی است. برای مثال فرض کنید K یک میدان و $R = K[X_1, X_2, ..., X_n, ...]$ باشد. قرار دهید $R = M$. در این صورت M یک R- مدول آزاد با پایه $\{1\}$ بوده و زیر مدول‌های آن ایده‌آل‌های R هستند. حال فرض کنید N ایده‌آل همه چند جمله‌ای‌هایی باشد که جمله ثابت آنها صفر است. در این صورت زیر مدول N از R- مدول M با تولید متناهی نیست.

۴) هر زیر فضای یک فضای برداری، نیز یک فضای برداری است.برای نمونه، در مثال قبل زیر مدول N علاوه بر اینکه با تولید متناهی نمی‌باشد آزاد هم نیست.

تذکر: برای مدول‌های آزاد روی PID ها گزاراره‌های ۳و۴ درست هستند. به طور کلی مدول‌های آزاد روی PID ها در موارد زیادی رفتاری شبیه به فضاهای برداری دارند.برای اطلاع از جزییات توضیحات مثال‌های بالا به بخش۲. ۴ به [۱۶]، مراجعه کنید.

۱-۱-۱۳ تعریف: فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت

الف) برای عنصر $m \in M$، پوچساز m در R را با $\mathrm{Ann}_R(m)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathrm{Ann}_R(m) = \{x \in R \mid xm = \cdot\}.$$

ب) اگر N زیر مدولی از M باشد آنگاه پوچساز N در R را با $\mathrm{Ann}_R(N)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathrm{Ann}_R(N) = \{x \in R \mid xn = \cdot \,; \forall n \in N\}.$$

هر گاه R یک حلقه جابه‌جایی باشد، در این صورت گروه آبلی $M_{m\times n}(R)$ با جمع ماتریسها و ضرب اسکالر، یک R- مدول است. همچنین ماتریسهای E_{ij} $(i = ۱,\ldots,m)$ و $(j = ۱,\ldots,n)$، که به صورت زیر تعریف می شوند یک پایه برای R- مدول $M_{m\times n}(R)$ است.

$$[E_{ij}]_{pq} = \begin{cases} ۱ & ; \quad (p,q) = (i,j) \\ \cdot & ; \quad (p,q) \neq (i,j) \end{cases}$$

به وضوح $A = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n}[A]_{ij}E_{ij}$، که $[A]_{ij}$ درایهٔ واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A است.

در ادامه چند نمادگذاری برای سهولت در نوشتن ماتریس‌ها معرفی می کنیم.

درماتریس A، iامین سطر را با $\mathrm{Row}_i(A)$ و jامین ستون آن را با $\mathrm{Col}_j(A)$ نمایش می دهیم.
همچنین ماتریس $A_{m\times n}$ را بوسیله سطرهایش افرازکرده و به صورت زیر نمایش دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{Row}_۱(A) \\ \hline \mathrm{Row}_۲(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{Row}_m(A) \end{bmatrix}.$$

همچنین ماتریس $A_{m\times n}$ را می‌توان توسط ستون‌هایش افراز کرد و به صورت زیر نمایش داد.

$$A = (\mathrm{Col}_۱(A) | \mathrm{Col}_۲(A) | \ldots | \mathrm{Col}_n(A)).$$

یادآوری می‌کنیم A^t را برای نمایش ترانهاده ماتریس A به کار می بریم. با این توضیحات اگر $A \in M_{m\times n}(R)$, $\xi = (x_۱,\ldots,x_n)^t \in R^n$ باشد، آنگاه

$$A\xi = x_۱\mathrm{Col}_۱(A) + x_۲\mathrm{Col}_۲(A) + \ldots + x_n\mathrm{Col}_n(A).$$

همچنین فضای ستونی ماتریس $A_{m\times n}$ را با CS(A) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathrm{CS}(A) = \{A\xi \mid \xi \in R^n\}.$$

به‌علاوه، فضای سطری ماتریس $A_{m\times n}$ را با RS(A) نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$RS(A)=\{\delta A \mid \delta\in M_{۱\times m}(R)\}.$$

از آنجا که در اثبات دو معادله $\det(A^t)=\det(A)$ و $\det(AB)=\det(A).\det(B)$ فقط خواص F به عنوان یک حلقه جابجایی مورد استفاده قرار می گیرد، لذا این معادلات در هر حلقه ی جابه‌جایی نیز برقرارند.

مفهوم کهاد نیز از مفاهیمی است که در بخش بعدی برای تعریف رتبه ماتریس روی حلقه های جابه‌جایی به آن نیاز داریم. منظور از یک کهاد $t\times t$ از ماتریس A ، دترمینان یک زیرماتریس مربعی $t\times t$ از A است که با حذف تعدادی از سطر و ستونهای آن به‌دست می آید. برای روشن‌تر شدن مطلب، فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c & d\\ e & f & g & h\end{bmatrix}.$$

باشد دراین صورت دوتا از زیر ماتریسهای ۲×۲ آن به صورت $\begin{bmatrix} a & b\\ e & f\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & d\\ e & h\end{bmatrix}$ هستند که اولی با حذف ستونهای دوم وسوم ماتریس A و دومی با حذف ستونهای سوم وچهارم ماتریس A بدست آمده‌اند وکهادهای مربوط به هرکدام به ترتیب $af-be$ و $ah-de$ می‌باشند.

۱-۱-۱٤تعریف: فرض کنید $A\in M_{n\times n}(R)$ باشد. دراین صورت

الف) برای هر $i,j=۱,۲,...,n$ ، $M_{ij}(A)$ را به عنوان نماد کهاد $(n-۱)\times(n-۱)$ ماتریس A که از حذف سطر iام و ستون jام تشکیل شده است بکار می بریم.

ب) عنصر $(-۱)^{i+j}M_{ij}(A)$ را (i,j)–امین همسازه‌ی ماتریس A نامیده و با $Cof_{ij}(A)$ نمایش می دهیم.

۱-۱-۱۵ قضیه (لاپلاس): فرض کنید $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(R)$ باشد. در این صورت

الف) $\forall i,k=۱,۲,...,n$, $\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}Cof_{kj}(A)=\delta_{ik}\det(A)$.

ب) $\forall j,k=۱,۲,...,n$, $\sum_{i=۱}^{n} a_{ij}Cof_{ik}(A)=\delta_{jk}\det(A)$.

که δ_{ij} در اینجا همان دلتای کرونکر است، یعنی $\delta_{ij}=\begin{cases} ۱ & ; \quad i=j\\ ۰ & ; \quad i\neq j\end{cases}$.

اثبات: [۴،۲-۱۹].■

ماتریس الحاقی وابسته به ماتریس A را با $adj(A)$ نمایش داده و به صورت $[adj(A)]_{ij}=Cof_{ji}(A)$, $(i,j=۱,۲,....,n)$ تعریف می کنیم. دراین صورت فرمول‌های قضیه ۱-۱-۱۵، به صورت زیر در می‌آیند.

$$Aadj(A)=adj(A)A=\det(A)I_n \qquad (۱)$$

جایی‌که I_n ماتریس همانی $n\times n$ است.

۱-۱-۱۶ نتیجه: فرض کنید $A\in M_{n\times n}(R)$ باشد. دراین صورت A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\det(A)\in U(R)$.

اثبات: فرض کنید A وارون پذیر است. بنابراین ماتریس $B\in M_{n\times n}(R)$ چنان موجود است که $AB=BA=I_n$. بنابراین $1=\det(I_n)=\det(AB)=\det(A)\det(B)$. لذا نتیجه می‌گیریم که $\det(A)\in U(R)$.

برعکس، اگر $\det(A)\in U(R)$ طبق معادله (۱)، داریم

$$A\left[(\det(A))^{-1}\operatorname{adj}(A)\right]=\left[(\det(A))^{-1}\operatorname{adj}(A)\right]A=I_n\ .$$

بنابراین A وارون پذیر است.■

واضح است که نتیجه فوق تعمیمی از حالت مشابه در جبر خطی کلاسیک است. اما از آنجاکه در میدان‌ها هر عضو ناصفر، وارون پذیر است لذا نتیجه فوق به این صورت در می آید که ماتریس A وارون پذیر است اگر و تنها اگر $\det(A)\neq 0$.

درپایان این قسمت به بعضی از خواص ایده‌آل‌های حلقه $M_{n\times n}(R)$ و ارتباط آنها با ایده‌آل‌های حلقه‌ی R، اشاره می‌کنیم.

۱-۱-۱۷ قضیه: هرگاه u ایده آلی دو طرفه از حلقه ی R باشد آنگاه $M_{n\times n}(u)=\{A\in M_{n\times n}(R)\,|\,[A]_{ij}\in u;(i,j=1,\dots,n)\}$ ایده آلی دوطرفه از حلقه $M_{n\times n}(R)$ است. در حقیقت هر ایده آل دوطرفه $M_{n\times n}(R)$ به همین شکل است.

اثبات: [۱۰-۴-۱۶،۲].■

۱-۱-۱۸ گزاره: فرض کنید u_1,u_2 دو ایده آل حلقهٔ R باشند. دراین صورت

الف) اگر $u_1\subseteq u_2$ آنگاه $M_{n\times n}(u_1)\subseteq M_{n\times n}(u_2)$.

ب) $M_{n\times n}(u_1\cap u_2)=M_{n\times n}(u_1)\cap M_{n\times n}(u_2)$.

ج) $M_{n\times n}(u_1+u_2)=M_{n\times n}(u_1)+M_{n\times n}(u_2)$.

د) $M_{n\times n}(u_1u_2)=M_{n\times n}(u_1)M_{n\times n}(u_2)$.

اثبات: به سادگی اثبات می‌شوند.■

۱-۱-۱۹ نتیجه: اگر F یک میدان باشد آنگاه $M_{n\times n}(F)$ حلقه ای ساده است.

اثبات: از آنجا که میدان F حلقه ای ساده است با استفاده از قضیه ۱-۱-۱۷،نتیجه حاصل می‌شود.■

۱-۱-۲۰ لم: فرض کنید T حلقه ای نه لزوماً جابجایی و e عنصر خودتوانی از حلقه ی T باشد، هرگا J اشتراک تمام ایده‌آلهای ماکسیمال حلقه T باشد در این صورت $J(eTe)=eJ(T)e$.

اثبات: [۳،۴-۶].■

۱-۱-۲۱ قضیه: فرض کنید R حلقه ای جابجایی باشد در این صورت $J(M_{n\times n}(R)) = M_{n\times n}(J(R))$.

اثبات: [۴،۳-۱۰].■

۱-۲ رتبه یک ماتریس روی حلقه‌های جابه‌جایی

در جبر خطی کلاسیک، رتبه یک ماتریس با تعداد سطرهای (ستون‌های) مستقل خطی آن ماتریس برابر است. در این بخش سعی داریم تا تعریفی مشابه از رتبه یک ماتریس روی حلقه های جابه‌جایی ارائه دهیم، به‌طوری که تعمیمی از حالت فوق باشد.

۱-۲-۱ تعریف: فرض کنید $A \in M_{m\times n}(R)$ باشد و $r = \min\{m,n\}$. دراین صورت برای هر t $(t = ۱,\dots,r)$، $I_t(A)$ ایده آلی از حلقه ی R است که بوسیلهٔ تمام کهادهای $t\times t$ از ماتریس A تولید شده است.

بنابراین برای مشخص کردن $I_t(A)$، ابتدا باید دترمینان تمام زیر ماتریسهای $t\times t$ از A را محاسبه کرده و سپس ایده آل تولید شده بوسیلهٔ این دترمینان‌ها را پیدا کنیم.

بنابرقضیه ی لاپلاس(۱-۱-۱۵)، هرکهاد $(t+۱)\times(t+۱)$ عضوی از $I_t(A)$ است و درنتیجه

$$I_r(A) \subseteq I_{r-۱}(A) \subseteq \dots \subseteq I_۲(A) \subseteq I_۱(A) \subseteq R .$$

تعریف فوق را می توان به تمام اعداد صحیح گسترش داد. برای این منظور قرار می دهیم

$$I_t(A) = \begin{cases} (۰) & ; \quad t > \min\{m,n\} \\ R & ; \quad t \le ۰ . \end{cases}$$

بنابراین

$$\{۰\} = I_{r+۱}(A) \subseteq I_r(A) \subseteq \dots \subseteq I_۱(A) \subseteq I_۰(A) = R. \qquad (۲)$$

۱-۲-۲ لم: فرض کنید $B \in M_{p\times m}(R)$ و $C \in M_{m\times n}(R)$ باشند. در این صورت

$$I_t(BC) \subseteq I_t(B) \bigcap I_t(C) \quad ; \ \forall t \in Z.$$

اثبات: [۴،۴-۵].■

نمادگذاری: مجموعه تمام ماتریس‌های وارون پذیر $m\times m$ روی حلقه ی R را با $Gl(m,R)$ نمایش می دهیم.

۱-۲-۳ نتیجه: فرض کنید $A \in M_{m\times n}(R)$، $P \in Gl(m,R)$ و $Q \in Gl(n,R)$ باشد. در این صورت $I_t(A) = I_t(PAQ)$.

اثبات: $I_t(PA) \subseteq I_t(A) = I_t(P^{-1}(PA)) \subseteq I_t(PA)$، بنابراین $I_t(PA) = I_t(A)$. به‌طور مشابه $I_t(PA) = I_t(PAQ)$.■

چون اثر پوچساز جهت شمول را عوض می کند، بنابراین باتوجه به رابطه (۲) خواهیم داشت

.

$$(0) = \mathrm{Ann}_R(R) \subseteq \mathrm{Ann}_R(I_1(A)) \subseteq \mathrm{Ann}_R(I_2(A)) \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Ann}_R(I_r(A)) \subseteq \mathrm{Ann}_R((0)) = R.$$

توجه کنید که اگر $\mathrm{Ann}_R(I_t(A))$ مخالف صفر باشد، آنگاه $\mathrm{Ann}_R(I_k(A))\ (k \le t)$، نیز مخالف صفر است.

۱-۲-٤ تعریف: فرض کنید $A \in M_{m\times n}(R)$ باشد. در این صورت رتبه ماتریس A را با $rk(A)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$rk(A) = \max\{t \mid \mathrm{Ann}_R(I_t(A)) = (0)\}.$$

۱-۲-۵ نتیجه: فرض کنید $A \in M_{m\times n}(R)$. در این صورت

الف) $0 \le rk(A) \le \min\{m,n\}$.

ب) $rk(A) = rk(PAQ)$، برای هر $Q \in Gl(n,R), P \in Gl(m,R)$.

ج) $rk(A) = rk(A^t)$.

د) $rk(A) = 0$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}_R(I_t(A)) \ne 0 \quad (\forall t \ge 1)$.

ه) اگر $m = n$ آنگاه $rk(A) < n$ اگر وتنها اگر $\det(A) \in Z(R)$.

اثبات: [۱۵،۴-۱۱].■

۱-۲-٦ مثال: فرض کنید $R = Z_6 = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$ باشد.

الف) قرار دهید $A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(R)$. هر درایه ی A یک مقسوم علیه صفر است. همچنین $I_2(A) = \bar{4}R$ و $I_1(A) = \bar{2}R$، $\mathrm{Ann}_R(\bar{4}R) = \bar{3}R \ne \bar{0}$ و $\mathrm{Ann}_R(\bar{2}R) = \bar{3}R \ne 0$.

بنابراین $rk(A) = \bar{0}$.

ب) فرض کنید $B = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{0} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$. در این جا هم تمام درایه های ماتریس B متعلق به $Z(R)$ هستند و طبق قسمت «ه» نتیجه ۱-۲-۵، $rk(B) < 2$. از طرفی $I_1(B) = \bar{2}R + \bar{3}R = R$ و $\mathrm{Ann}_R(I_1(B) = (\bar{0})$، بنابراین $rk(B) = \bar{1}$.

ج) اگر $C = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{5} & \bar{3} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$ باشدآنگاه طبق قسمت «ه» نتیجه ۱-۲-۵، $\det(C) = 5 \in U(R)$. لذا $rk(C) = 2$.

همان طور که در ابتدای این بخش اشاره کردیم، تعریف رتبه یک ماتریس روی حلقه های جابه‌جایی تعمیمی از تعریف نظیر آن در جبر خطی کلاسیک است. برای روشن تر شدن مطلب، فرض کنید F یک میدان و $A \in M_{m\times n}(F)$ باشد. در جبر خطی کلاسیک، رتبه‌ی ماتریس A، ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس A است. حال اگر $\mathrm{rank}_F(A)$ برابر t و زیر ماتریس $t\times t$ از A را چنان انتخاب کنیم که t سطر آن همان سطرهای مستقل خطی مذکور در توضیح فوق باشند، واضح است که دترمینان این زیر ماتریس مخالف صفر است. بنابراین $I_t(A)$ مخالف صفر بوده و از آنجا که F حوزه صحیح است، پس $\mathrm{Ann}_R(I_t(A))$ برابر صفر است. اما با توجه به اینکه هر زیر مجموعه از یک مجموعهٔ مستقل خطی، خود، مستقل خطی است پس $(r < t)\, I_r(A) \neq ۰$، و لذا $(۰ \leq r \leq t)\mathrm{Ann}_R(I_r(A)) = ۰$. از آنجا که t ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی ماتریس A است، پس $(r > t)I_r(A) = \{۰\}$، و بنابراین $(r > t)\,\mathrm{Ann}_R(I_r(A)) = R$. در نتیجه تعریف رتبه یک ماتریس روی یک حلقه جابه‌جایی، با تعریف مشابه آن در جبر خطی کلاسیک مطابقت دارد.

۱-۲-۷ قضیه(N.McCoy): فرض کنید $A \in M_{n\times n}(R)$ باشد. در اینصورت دستگاه معادلات همگن $AX = ۰$ دارای جواب نابدیهی است اگر وتنها اگر $\mathrm{rk}(A) < n$.

اثبات: [۳-۴،۵].■

این بخش را با نتیجه زیر به پایان می بریم.

۱-۲-۸ نتیجه: فرض کنید $B \in M_{m\times p}(R)$ و $C \in M_{p\times n}(R)$ باشد در این صورت

$$\mathrm{rk}(BC) \leq \min\{\mathrm{rk}(B), \mathrm{rk}(C)\}.$$

اثبات: [۱۴-۴،۴].■

۱-۳ قضیه کیلی- همیلتون

هدف نهایی این بخش، اثبات قضیه کیلی- همیلتون روی حلقه های جابه‌جایی است. قبل از پرداختن به این موضوع، صورت این قضیه را در جبر خطی کلاسیک یادآوری می کنیم.

(در این بخش Xمتغیر فرض می‌شود).

فرض کنید F یک میدان و $A \in M_{m\times n}(R)$ باشد. در این صورت $\det(XI_n - A)$ را چند جمله ای مشخصه ماتریس A نامیده وآن را با $C_A(X)$ نمایش می دهیم. قضیه کیلی- همیلتون در جبر خطی کلاسیک بیانگر این مطلب است که، ماتریس A در چند جمله ای مشخصه خود صدق می کند، یعنی $C_A(A) = ۰$. یادآوری می کنیم که اگر T یک حلقه باشد آنگاه حلقه چند جمله ایهای $T[X]$ جابه‌جایی است اگر و تنها اگر T جابه‌جایی باشد. همچنین در چند جمله‌ای

$f(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+a_{n-1}X+a_n$، a_0 را ضریب پیشرو و n را درجه $f(X)$ نامیده و با $\partial(f)=n$ نمایش می دهیم. چند جمله ای $f(X)$ را تکین گوییم هرگاه $a_0=1$ باشد.

۱-۳-۱ قضیه: فرض کنید T یک حلقه(نه لزوماً جابه‌جایی) و $f(X)$ و $g(X)$ دو چندجمله‌ای در $T[X]$ باشند. در این صورت چند جمله‌ای‌های $u(X), r(X), v(X), s(X)\in T(X)$ چنان موجودند که

الف) $f(X)=u(X)g(X)+r(X) \quad ; \quad r(X)=0$ یا $\partial(r)<\partial(g)$.

ب) $f(X)=g(X)v(X)+s(X) \quad ; \quad s(X)=0$ یا $\partial(s)<\partial(g)$.

اثبات: [۲-۴،۷]. ■

۱-۳-۲ تعریف: در قضیه ی ۱-۳-۱، (و با نماد گذاری مذکور در آن)، $r(X)$ را باقیمانده‌ی راست تقسیم $f(X)$ بر $g(X)$ و $s(X)$ را باقیمانده ی چپ تقسیم $f(X)$ بر $g(X)$ می نامیم.

۱-۳-۳ مثال: فرض کنید

$T=M_{2\times 2}(Q)$، $f(X)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\in T[X]$ و $g(X)=X+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in T[X]$ باشند.

دراین صورت

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{u(X)}\underbrace{\left(X+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)}_{g(X)}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{f(X)}$$

بنابراین $r(X)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ باقیمانده ی راست تقسیم $f(X)$ بر $g(X)$ است. همین طور

$$\underbrace{\left(X+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)}_{g(X)}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}_{u(X)}+\underbrace{\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{s(X)}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{f(X).}$$

و $s(X)=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ باقیمانده ی چپ تقسیم $f(X)$ بر $g(X)$ است.

به‌راحتی می توان بررسی کرد که هرگاه T حلقه ای جابه‌جایی و ضریب پیشرو $g(X)$ در T،یکه باشد آنگاه باقیمانده ی راست (چپ) تقسیم $f(X)$ بر $g(X)$ یکتا بوده و باقیمانده‌ها ی راست و چپ باهم برابرند.

قرارداد می‌کنیم عنصر X در مرکز حلقه ی $T[X]$ قرار دارد، بنابراین دو نمایش زیر از $f(X)$ باهم یکسان هستند.

$f_R(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_{n-1}X+a_n$ و $f_L(X)=X^na_0+X^{n-1}a_1+\ldots+Xa_{n-1}+a_n$. اما از آنجا که ممکن است T حلقه ای ناجابه‌جایی باشد، بنابراین $f_R(Z)$ و $f_L(Z)$ لزوماً باهم برابر نیستند.