دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

گرایش آنالیز تابعی

# مثال های برگزیده از پیوستگی اتوماتیک

از :

**محمد رستگار**

استاد راهنما :

**دکتر اسماعیل انصاری پیری**

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

همسر مهربانم

# تقدیر و تشکر

خداوند منان را سپاس فراوان می گویم که به این بنده توفیق تحصیل عطا کرد و توان ادامه دادن را صلب نکرد.

ابتدا از پدر و مادر عزیزم که همیشه و همه جا مشوق و یاور من بودند قدردانی می کنم. همچنین از همسر مهربانم که در این راه علاوه بر صبر و تشویق از لحاظ علمی نیز کمک شایانی کردند کمال تشکر را دارم. همچنین از استاد راهنما و معلم دلسوز جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری که در این راه به جای اثبات راه اثبات کردن را به بنده آموخت و مانند چراغی راه را برای ادامه روشن ساخت کمال تشکر را دارم. و در پایان از داوران گرامی که قبول زحمت نموده و عهده دار داوری این پایان نامه شدند سپاس گذارم. و در نهایت از تمامی دوستان، هم اتاقی ها و آقای امین الله خسروی به خاطر همراهی شان در طول دوران تحصیلم نهایت تشکر را دارم.

**چکیده**

مثال هایی برگزیده از پیوستگی اتوماتیک

محمد رستگار

در این پایان نامه ابتدا به مفهوم پیوستگی اتوماتیک اشاره می کنیم.سپس با ارائه مثالهایی زیبا و ساده قدرت و توانمندی پیوستگی اتوماتیک را بررسی می‌کنیم.

# فهرست مطالب

## مقدمه

گاهی به دست آوردن خاصیتهای توپولوژیکی از خواص جبری ساده‌تر است وگاهی برعکس. لذا اکثر دانشمندان در صددند که بتوانند رابطه‌ای بین خواص توپولوژیکی و خواص جبری پیدا کنند. بنابراین ما سعی می‌کنیم تا خاصیت پیوستگی که یک خاصیت توپولوژیکی است را از خواص جبری مانند خطی بودن ضربی بودن خود الحاقی و ... به دست آوریم.

اولین سوال این است که پیوستگی اتوماتیک یعنی چه؟ هدف از این بحث چیست؟ ما در این پایان نامه علاوه بر پاسخ به این سوالات سعی بر این داریم که معنی پیوستگی اتوماتیک را گسترش دهیم. همچنین با ارائه مثالها و قضیه‌های ساده توانمندی و قدرت پیوستگی اتوماتیک را نشان خواهیم داد.

فرض کنید $T$ یک تابع بین دو فضای باناخ یا جبر باناخ یادیگر ساختارها باشد که شرایط جبری خاصی مانند خطی بودن، ضربی بودن، خود الحاقی و ... را ایفا می‌کند آیا می توان نتیجه گرفت که $T$ پیوسته است؟

قضایایی که دارای چنین خاصیتی باشند قضایای پیوستگی اتوماتیک نامیده می‌شوند. در این پایان نامه، مثالها و قضیه‌های موجود به قضایای پیوستگی اتوماتیک اشاره دارد و همچنین بررسی این سوال که آیا می توان شرایط این قضیه‌ها را تضعیف کرد یا از بین برد؟

درفصل اول با تعاریف مورد نیاز برای این بحث آشنا می شویم. در فصل دوم به ارائه مثال هایی از پیوستگی اتوماتیک پرداخته و در فصل آخر با توابع خطی - ضربی آشنا می شویم. همچنین در این فصل قضیه هایی از توابع خطی - ضربی در زمینه پیوستگی اتوماتیک آورده و همچنین بررسی این سوال که آیا می توان شرایط این قضیه‌ها را تضعیف کرد یا از بین برد؟

# فصل اول

# تعاریف و قضایای اولیه

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز از مبحث آنالیز و آنالیز تابعی را که از آنها در فصول بعدی استفاده خواهیم کرد، بیان می‌کنیم. از اثبات قضایای این فصل صرف نظر نموده و اثبات آن را به مرجعهای موجود از کتابهای آنالیز و آنالیز تابعی ارجاع می‌دهیم.

## ۱. فضاهای توپولوژیکی

**تعریف۱-۱:** فرض کنید $X$ یک مجموعه ناتهی و $\tau = \{G_i : i \in I\}$ گردایه ای از زیر مجموعه‌های $X$ باشد که دارای خواص زیر است:

۱) $X, \emptyset \in \tau$

۲)اگر $J \subseteq I$ آنگاه $\bigcup_{i\in J} G_i \in \tau$

۳) اگر $J \subseteq I$ متناهی باشد $\bigcap_{i\in J} G_i \in \tau$

در این صورت $\tau$ یک توپولوژی و یا یک ساختار توپولوژیک روی $X$ نامیده می‌شود. $X$ همراه با $\tau$ را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم و آن را با $(X, \tau)$ نشان می‌دهیم. اعضای $\tau$ مجموعه‌های باز نامیده می‌شوند. اگر توپولوژی $\tau$ روی $X$ مشخص شده باشد در این صورت به جای $(X, \tau)$ خود $X$ را به عنوان فضای توپولوژیک در نظر می‌گیریم.

**تعریف۲-۱:** فرض کنید $X$ یک مجموعه غیر تهی باشد گردایه $\mathbf{B} \in P(X)$ را یک پایه توپولوژی برای $X$ گوئیم اگر:

۱)به ازای هر $x \in X$ دست کم یک عضو $B$ از $\mathbf{B}$ شامل $X$ موجود باشد.

۲)اگر $x$ به دو عضو $B_1$ و $B_2$ متعلق باشد عضوی از $\mathbf{B}$ مانند $B_3$ موجود باشد به طوری که $B_3 \in B_1 \cap B_2$.

**تعریف۳-۱** گردایه $S$ از زیرمجموعه های $X$ را یک زیرپایه برای یک توپولوژی در $X$ می‌خوانند هرگاه اجتماع اعضای $S$ برابر $X$ باشد و همه اجتماعهای مقاطع متناهی اعضای $S$ را توپولوژی تولید شده توسط زیرپایه $S$ می‌نامیم. **تعریف۴-۱:** فرض کنید $F$ یک میدان (مانند $R$ یا $C$) باشد. یک فضای برداری روی $F$ عبارت است از یک مجموعه $X$ که عناصرش بردار نامیده می شوند و در آن دو عمل جمع و ضرب اسکالر با خواص جبری زیر تعریف می‌شوند:

الف) به هر زوج از بردارهای $x$ و $y$ یک بردار $x+y$ متناظر می‌شود به طوری که

$$x+y=y+x \ , \ \ x+(y+z)=(x+y)+z \ , \ \ x,y,z\in X.$$

$X$ شامل یک بردار یکتای $0$ (بردار صفر یا مبدا) می‌باشد به طوری که برای هر $x \in X$داریم $x + 0 = x$ و به هر $x \in X$ یک بردار یکتای $-x$ متناظر می‌شود به طوری که $x + (-x) = 0$.

ب) به هر زوج $(\alpha, x)$ که $\alpha \in F$ و $x \in X$ بردار $\alpha x$ متناظر می‌شود به طوری که

$$1x = x \ , \ \ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

و دو قانون توزیع پذیری

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \ , \ \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$$

برقرار است.

نماد $0$ برای عنصر صفر میدان اسکالر نیز به کار می‌رود. در این پایان نامه $F$ را میدان اعداد حقیقی یا مختلط در نظرمی‌گیریم.

**تعریف۵-۱:** فضای برداری $X$ را فضای برداری توپولوژیک نامیم هرگاه $X$ یک فضای توپولوژیک بوده و عمل جمع:

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

با توپولوژی حاصلضربی روی $X \times X$ و ضرب اسکالر:

$$. : X \times F \longrightarrow X$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha x$$

با توپولوژی حاصلضربی روی $X \times F$ پیوسته بوده و همچنین مجموعه‌های یکانی بسته باشند.

**تعریف۶-۱:** زیر مجموعه $E$ از فضای برداری توپولوژیک $X$ را کراندار نامیم هرگاه برای هر مجموعه باز $U$ از $X$ عدد $\lambda$ چنان موجود باشد که برای هر $s > \lambda$ داشته باشیم $sE \in U$.

**تعریف۷-۱:** فرض کنید $X$و$Y$ دو فضای دلخواه باشند نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را خطی نامیم هرگاه به ازای هر اسکالر $\alpha$ و $\beta$ و $x$ و $y$ متعلق به $X$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

**تعریف۸-۱:** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای برداری توپولوژیکی باشند تابع $f : X \longrightarrow Y$ را پیوسته نامیم هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه باز، باز باشد.

**تعریف۹-۱:** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای برداری توپولوژیکی باشند تابع خطی $f : X \longrightarrow Y$ را کراندار نامیم هرگاه تصویر هر مجموعه کراندار، کراندار باشد.

## ۲. فضاهای نرمدار

**تعریف۱۰-۱:** فرض کنید $X$ یک فضای برداری باشد نگاشت $p : X \longrightarrow R$را در نظر می‌گیریم.

الف) $p$ زیرجمعی است هرگاه برای هر $x, y \in X$داشته باشیم:

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

ب) $p$ همگن مثبت است،هرگاه برای هر $x \in X$ و هر $\lambda \geq 0$ داشته باشیم:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

ج) $p$ همگن مطلق است، هرگاه برای هر $x \in X$ و $\lambda \in F$ داشته باشیم:

$$p(\lambda x) = \mid \lambda \mid p(x).$$

د) $p$ نیم نرم است، هرگاه زیر جمعی و همگن مطلق باشد.

**تعریف۱۱-۱:** تابع $\parallel . \parallel : X \longrightarrow [0, \infty)$ را روی فضای برداری $X$ یک نرم روی $X$ می‌نامیم، هرگاه خواص زیر برقرار باشند:

$a) \parallel x \parallel = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$b) \parallel \alpha x \parallel = \mid \alpha \mid \parallel x \parallel$

$c) \parallel x + y \parallel \leq \parallel x \parallel + \parallel y \parallel$

که در آن $x, y \in X$ و $\alpha \in F$.

$X$ همراه با یک نرم روی آن، یک فضای نرمدار نامیده می‌شود و آن را با $(X, \parallel . \parallel)$ نشان می دهیم. اگر دچار ابهام نشویم به اختصار به جای «فضای نرم دار $(X, \parallel . \parallel)$ » می‌نویسیم « فضای نرمدار $X$ ».

در هر فضای نرم دار، یک گوی باز به مرکز $x$ و شعاع $r$ و یا به عبارت دیگر یک همسایگی به مرکز $x$ و شعاع $r$ عبارتست از مجموعه

$$B_r(x) = \{y : \parallel x - y \parallel < r\}.$$

به خصوص اینکه $B_1(0)=\{x:\parallel x\parallel<1\}$ و $\overline{B}_1(0)=\{x:\parallel x\parallel\leq 1\}$ به ترتیب گوی واحد باز و گوی واحد بسته در $X$ نامیده می‌شوند.

**تعریف۱۲-۱:** فضای توپولوژیک $X$ را هاسدروف نامیم هرگاه برای هر $x$ و $y$ متعلق به $X$ که $x\neq y$ همسایگی های باز $U$ و $V$ از هم جدا موجود باشند به طوری که $x\in U$ و $y\in V$.

**تعریف۱۳-۱:** فرض کنید $X$ یک فضای نرمدار باشد. زیرمجموعه $E$ از $X$ را کراندار نامیم، هرگاه $M>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in X$ داشته باشیم$\parallel x\parallel\leq M$.

باید توجه داشته باشیم که هر فضای نرم دار یک فضای برداری توپولوژیک است و در حالت فضای نرمدار این تعریف با تعریف ۶-۱ معادلند.

**تعریف۱۴-۱:** دو نرم $p_1$ و $p_2$ را روی فضای خطی $X$ معادل نامیم هرگاه روی $X$ توپولوژیهای یکسان ایجاد کنند یا به طور معادل دو نرم $p_2$ و $p_1$ را معادل نامیم هرگاه اعداد طبیعی $M_1$ و $M_2$ چنان موجود باشند که:

$$p_1(x)\leq M_1p_2(x)\qquad p_2(x)\leq M_2p_1(x).$$

**تعریف۱۵-۱:** فضای توپولوژیکی $X$ را کامل یا تام نامیم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

**تعریف۱۶-۱:** فضای نرم دار $X$ را باناخ نامیم هرگاه$X$ کامل باشد.

**تبصره** فرض کنید $X$ یک مجموعه و $(p_\alpha;\alpha\in I)$ یک خانواده از نیم نرمهای جدا کننده باشد مجموعه‌های $V(p_\alpha,n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(p_\alpha,n)=\{x\in X;p_\alpha(x)<\frac{1}{n}\}.$$

حال مجموعه $\mathbf{B}$ را تمام اشتراکهای متناهی مجموعه های $V(p_\alpha,n)$ تعریف می‌کنیم $\mathbf{B}$ تشکیل یک زیر پایه موضعی می‌دهد. حال توپولوژی تولید شده توسط خانواده نیم نرمها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau=\{G;G=\emptyset,G=\bigcup_{x\in X,B\in\mathbf{B}}(x+B)\}.$$

یعنی تمام انتقالهای اعضای $\mathbf{B}$.

## ۳. جبرهای نرمدار

**تعریف۱۷-۱:** یک جبر روی$F$ عبارتست از یک فضای برداری $X$ روی $F$ به همراه یک نگاشت $xy \longmapsto (x,y)$ از $X \times X$ به توی $X$ که برای هر $x,y,z \in X$و $\alpha \in F$ در اصول زیر صدق کند

$a) x(yz) = (xy)z$

$b) x(y+z) = xy + xz \quad , (x+y)z = xz + yz$

$.c) (\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

در تعریف فوق اگر $F = R$، آنگاه $X$ یک جبر حقیقی و اگر $F = C$ آنگاه $X$ یک جبر مختلط نامیده می‌شود. همچنین نگاشت $xy \longmapsto (x,y)$ را ضرب در $X$ می‌نامیم و بردار $xy$، ضرب $x$و $y$ نامیده می‌شود. $X$ را یک جبر جابجایی گوئیم هرگاه برای هر $x$ و $y$ در $X$ داشته باشیم $xy = yx$.

**تعریف۱۸-۱:** فرض کنید $E$ یک مجموعه، $X$ یک فضای برداری روی $F$، $\alpha$ عنصری از $F$ و $f$ و $g$ نگاشتهایی از $E$ به توی $X$ باشند. $f + g$ و $\alpha f$ را به عنوان نگاشتهایی از $E$ به توی $X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) \quad x \in E.$$

این تعریف، تعریف جمع نقطه به نقطه و ضرب اسکالر نامیده می‌شود. به همین ترتیب هنگامی که $X$ یک جبر است، ضرب نقطه به نقطه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad x \in E.$$

**تعریف۱۹-۱:** فرض کنید $X$ و $Y$ دو جبر روی میدان اسکالر یکسان $F$ باشند. یک همریختی از $X$ به توی $Y$، یک نگاشت خطی $\phi : X \longrightarrow Y$ است به طوری که

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad x,y \in X.$$

**تعریف۲۰-۱:** زیر مجموعه $S$ از $X$ یک زیر نیم گروه $X$ نامیده می‌شود، هرگاه اگر $x,y \in S$ آنگاه $xy \in S$.

**تعریف۲۱-۱:** زیرفضای برداری$W$ از$X$ را یک زیرجبر از$X$ نامیم، هرگاه $W$ یک زیر نیم گروه $X$ بوده و به علاوه خود آن یک جبر باشد که میدان آن یکسان با میدان $X$ و ضرب آن تحدید ضرب، روی $W \times W$ از ضرب $X$ است.

**تعریف۲۲-۱:** یک جبر نرمدار عبارت است از جفت $(X, \| . \|)$ که در آن $X$ یک جبر و $\| . \|$ یک نرم روی $X$ است با این خاصیت که برای هر $x$ و $y$ در $X$:

$$\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$$

به این نرم یک نرم جبری گوئیم. هرگاه نرم روی $X$ مشخص شده باشد، به اختصار به جای « جبر نرمدار $(X, \| . \|)$ » می‌نویسیم « جبر نرم دار $X$ ».

**تعریف۲۳-۱:** یک جبر باناخ عبارتست از جبر نرم دار $(X, \| . \|)$ به طوری که $X$ با این نرم یک فضای کامل باشد.

**تعریف۲۴-۱:** فرض کنید $X$ یک جبر باشد این جبر را یکدار نامیم هرگاه شامل عنصری مانند $e$ باشد به طوری که:

$$\forall x \in X \ ; \ ex = xe = x.$$

**تعریف۲۵-۱:** عنصر $x$ از جبر $X$ را معکوسپذیر نامیم هرگاه عنصری مانند $y \in X$ موجود باشد به طوری که:

$$xy = yx = e.$$

**تعریف۲۶-۱:** مجموعه تمام عناصر معکوسپذیر جبر $X$ را با $Inv(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Inv(X) = \{x \in X \ ; \ \exists \ y \in X \ ; \ xy = yx = e\}$$

و همچنین مجموعه تمام عناصر معکوس ناپذیر $X$ را با $sing(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$sing(X) = X \setminus Inv(X).$$

**تعریف۲۷-۱:** فرض کنید جبر نرمدار $A$ یکدار نباشد یکدار شده جبر نرمدار $A$ را با $A+F$ نشان داده که جمع و ضرب اسکالر و ضرب در آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(x,\alpha)+(y,\beta)=(x+y,\alpha+\beta)$$
$$\beta(x,\alpha)=(\beta x,\beta\alpha)$$
$$(x,\alpha)(y,\beta)=(xy+\alpha y+\beta x,\alpha\beta)$$

و نرم آن روی $A+F$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\| (x,\alpha) \| = \| x \| + | \alpha | \quad (x\in A,\alpha\in F)$$

جبر $A+F$ جبر یکدار شده $A$ با عنصر همانی $(0,1)$ است که $\| (0,1) \| = 1$ و نگاشت $a \hookrightarrow (a,0)$ یک نگاشت یکریختی و یکمتر روی زیرجبری از $A+F$ است.

**تعریف۲۸-۱:** فرض کنید $x$ و $y$ متعلق به جبر $A$ باشند ضرب کواسی را با نماد $xoy$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$xoy=x+y-xy$$

عنصر $x$ از $A$ دارای معکوس - کواسی چپ است هرگاه عنصری مانند $y$ موجود باشد به طوری که $yox=0$ و همچنین دارای معکوس - کواسی راست است هرگاه عنصری مانند $z$ موجود باشد به طوری که $xoz=0$ و $x$ را معکوس پذیر کواسی نامیم هرگاه هم دارای معکوس-کواسی راست و هم معکوس - کواسی چپ باشد که در این صورت با هم برابرند.

**تعریف۲۹-۱:** مجموعه تمام عناصر معکوس پذیر کواسی جبر $X$ را با $q-Inv(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q-Inv(X)=\{x\in X\ ;\ \exists\, y\in X\ ;\ xoy=yox=0\}$$

و همچنین مجموعه تمام عناصر معکوس ناپذیر کواسی $X$ را با

$q-sing(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q-sing(X)=X\setminus q-Inv(X).$$

**تعریف۳۰-۱:** طیف عنصر $a$ از جبر مختلط $X$ که با نماد $sp(X,a)$ نمایش داده می‌شود یک مجموعه از اعداد مختلط تعریف شده به شکل زیر است:

۱) اگر جبر $X$ دارای عنصر ۱ باشد

$$sp(X,a)=\{\lambda\in C;\lambda-a\in sing(X)\}$$

۲)اگر جبر $X$ داری عنصر ۱ نباشد

$$sp(X,a) = \{0\} \cup \{\lambda \in C \setminus \{0\}\ ;\ \lambda^{-1}a \in q - Sing(X)\}.$$

**تعریف۳۱-۱:** $X$ را یک $F$ - فضا می‌نامیم هرگاه توپولوژی $X$ با توپولوژی حاصل از یک متر کامل منطبق باشد.

**تعریف۳۲-۱:** اگر $X$ و $Y$ دو مجموعه باشند و $f$ مجموعه $X$ را به توی مجموعه $Y$ بنگارد گراف $f$ عبارتست از :

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in X\} \subseteq X \times Y$$

**تعریف۳۳-۱:** یک تابعک خطی ضربی روی جبر $A$ عبارتست از یک تابعک خطی غیر صفر مانند $\varphi$ روی $A$ به طوریکه برای هر $x$ و $y$ که به $A$ تعلق دارد داشته باشیم:

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

**قضیه۲-۱:** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای برداری توپولوژیکی باشند و نگاشت $\Lambda : X \longrightarrow Y$ خطی باشد آنگاه گزاره های زیر با هم معادلند:

۱) تابع $\Lambda$ پیوسته است.

۲) تابع $\Lambda$ کراندار است.

۳) اگر $x_n \longrightarrow 0$ آنگاه $\{\Lambda(xn); n = 1, 2, 3, ...\}$ کراندار است.

**برهان:** [۱۹].

**تعریف۳۴-۱:** توابع هولومورفیک توابعی هستند که بر روی یک زیرمجموعه باز از صفحه مختلط $C$ تعریف شده‌اند که در هر نقطه مشتق مختلط دارند. هولومورفیک بودن دلالت بر آن دارد که تابع بینهایت بار مشتق پذیر است به عنوان مثال توابع چندجمله‌ای در $Z$ با ضرایب مختلط هولومورفیک‌اند.

تابعی که بر کل صفحه مختلط $C$ هولومورفیک باشد تابع تحلیلی می‌نامیم.

# فصل دوم

# مثالهای اولیه

۱. نگاشت خطی

ما در این فصل با ارائه مثالها و قضیه‌های ساده سعی بر این داریم که بتوانیم مفهوم پیوستگی اتوماتیک را بیشتر مورد بحث قرار داده و همچنین توانایی و گستردگی این مقوله را نشان دهیم.

**قضیه۱-۲ :** فرض کنید $X$ یک فضای برداری توپولوژیک مختلط بوده و $f : C^n \longrightarrow X$ خطی باشد آنگاه $f$ پیوسته است.

**برهان:** فرض کنید $\{ e_1, e_2, \ ... \ , e_n\}$ یک پایه اصلی از $C^n$ باشد به طوری که $e_k =< 0, 0, ..., 1, ..., 0 >$ که مؤلفه $k$ام آن یک و دیگر مؤلفه‌های آن صفر است. حال قرار می‌دهیم $u_k = f(e_k)$ و فرض کنید $z \in C^n$ باشد بنابراین $z$ را می توان به صورت $z = z_1e_1 + z_2e_2 + ... + z_ne_n$ نمایش داد لذا داریم $f(z) = z_1u_1 + z_2u_2 + ... + z_nu_n$ حال چون $f$ خطی است پس $f$ پیوسته است.■

**قضیه۲-۲:** فرض کنید $T : X \longrightarrow Y$ یک تابع خطی بین دو فضای خطی و نرمدار $X, Y$ باشد و $dimX < \infty$ آنگاه $T$ پیوسته است.

**برهان:** بنا به قضیه قبل و شرط قضیه چون $X \cong C^n$ لذا $T$ پیوسته است. ■

**قضیه گراف بسته:** فرض کنید:

۱) $X$ و $Y$ دو $F$فضا باشند

۲) $\Lambda : X \longrightarrow Y$ خطی باشد

۳) گراف $\Lambda$ یعنی $\{(x, \Lambda(x)); x \in X\}$ بسته باشد.

آنگاه $\Lambda$ پیوسته است.

**برهان:** [۱۳].

**تعریف۱-۲:** تمام نگاشتهای خطی و کراندار از $Y$ به توی میدانش را با $Y^*$ نشان می‌دهیم. و همچنین می‌گوئیم $Y^*$ نقاط $Y$ را جدا می‌سازد اگر برای هر $x_1 \ , x_2 \in Y$ که $x_1 \neq x_2$ داشته باشیم:

$$\exists \ \Lambda \in Y^* \Longrightarrow \Lambda(x_1) \neq \Lambda(x_2)$$

**قضیه۳-۲:** فرض کنید $X, Y$ دو $F$ - فضا باشند و $Y^*$ نقاط $Y$ را جدا سازد و $T : X \longrightarrow Y$ خطی باشد و هرگاه $x_n \longrightarrow 0$ ایجاب کند $T(x_n) \longrightarrow 0$ آنگاه $T$ پیوسته است.

**برهان:** فرض کنید که$x_n \longrightarrow x$ و $y$ و $T(x_n) \longrightarrow$ و $\Lambda \in Y^*$ آنگاه داریم:

$$x_n \longrightarrow x \Rightarrow x_n - x \longrightarrow 0$$

بنا بر فرض:

$$T(x_n - x) \longrightarrow 0 \Rightarrow T(x_n) \longrightarrow T(x)$$

لذا داریم:

$$\Lambda(y) = \Lambda(\lim_{n\to\infty} T(x_n)) = \Lambda(T(x))$$

و چون $Y^*$ نقاط $Y$ را جدا می‌کند لذا $y = T(x)$. بنابراین گراف $T$ یعنی $\{(x, \Lambda(x))\ ;\ x \in X\}$ بسته است لذا:

۱) $X$ و $Y$ دو $F$ - فضا هستند.

۲) $T : X \longrightarrow Y$ خطی است.

۳) گراف $T$ بسته است.

پس بنا به قضیه گراف بسته $T$ پیوسته است. ■

۲. فضای هیلبرت

**تعریف۲-۲:** فضای برداری $H$ روی میدان مختلط را یک فضای ضرب داخلی گوئیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای $x$ و $y$ در $H$ یک عدد مختلط مانند $< x, y >$ به نام حاصل ضرب داخلی یا اسکالر $x$و $y$ چنان مربوط شده باشد که

$1) < x, y >= \overline{< x, y >}$

$2) < x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

$3)\ \forall x, y \in H, \alpha \in C \Longrightarrow < \alpha x, y >= \alpha < x, y >$

$4)\ \forall x \in H < x, x >\geq 0$

$5) < x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$

هر فضای ضرب داخلی را با تعریف $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$ می‌توان به یک فضای نرمدار تبدیل کرد حال اگر این فضای نرمدار حاصل کامل باشد آن را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

**تعریف۳-۲:** نگاشت خطی $T$ را خود الحاقی نامیم هرگاه
$$\forall x,y\in H; <x,T(y)>=<T(x),y>$$

**قضیه هلینگر توپلیتس[۱]:** اگر $H$ یک فضای هیلبرت و $T:H\longrightarrow H$ یک تابع خطی و خود الحاقی باشد آنگاه $T$ پیوسته است.

**برهان:** فرض کنید $x_n$ یک دنباله در $H$ باشد به طوری که $x_n\longrightarrow 0$ و همچنین فرض کنید $T(x_n)\longrightarrow y$ لذا داریم:

$$<T(x_n),y>\longrightarrow<y,y>=\parallel y\parallel^2$$

$$<x_n,T(y)>\longrightarrow<0,T(y)>=0$$

لذا بنا به این دو داریم
$$\parallel y\parallel^2=0\Rightarrow y=0$$

لذا هرگاه $x_n\longrightarrow 0$ داریم $T(x_n)\longrightarrow 0$ پس بنا به قضیه ۱-۱ داریم گراف $T$ یعنی مجموعه $\{(x,\Lambda(x));x\in X\}$ بسته در $X\times Y$ است. بنابراین چون $X$ و $Y$ دو فضای هیلبرت هستند پس فضاهای نرمدار کامل‌اند. بنابراین دو $F$ - فضا هستند. همچنین با توجه به فرض $T$ خطی و از بسته بودن گراف $T$ نتیجه می‌شود فرضهای قضیه گراف بسته برقرار است لذا $T$ پیوسته است.
■

توجه کنید که در این دو قضیه که به عنوان مثالهایی از پیوستگی اتوماتیک مطرح شد نرم $T$ می توانست هر مقداری را بگیرد در حالی که به طور خودکار می توان نتیجه گرفت که $T$ پیوسته است. ما بدون توجه به نوع پیوستگی (نقطه ای، یکنواخت)می‌توانیم چنین نتیجه‌ای را بگیریم، اما در بخش بعد خواهیم دید که به دست آوردن پیوستگی که خاصیتی توپولوژیکی و قابل اهمیت است همیشه به سادگی مثالهای بیان شده نیست.

۳. جبرهای باناخ

**قضیه۴-۲:** فرض کنید $A$ یک جبر باناخ بوده و $x\in A$ و همچنین $\parallel x\parallel\leq 1$ در این صورت $e-x$ معکوسپذیر است.

[۱] Hellinger toeplitz