وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش جبر)

برخی خاصیت‌ها از زیرگروه n - مرکز یک گروه

توسط:

شهناز رضایی شکور

استاد راهنما:

دکتر پیمان نیرومند

استاد مشاور:

دکتر اسداله فرامرزی ثالث

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

برخی خاصیت‌ها از زیرگروه n - مرکز یک گروه

توسط:

شهناز رضایی شکور

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض (گرایش جبر)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر پیمان نیرومند استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر محسن پرویزی استادیار دانشگاه فردوسی مشهد (استاد داور)

دکتر عبدالعلی بصیری استادیار دانشگاه دامغان (استاد داور)

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

تقدیم به

پدرم اوکه سحرگاهی پاییزی نگاهش را بر زندگی بست و حسرت لمس دستان پرمهرش همیشه در عمق نگاهم به وسعت تمام دنیا باقی خواهد ماند.

پدرجان، سایه ی لبخند مهربانت را در واپسین لحظات دیدار همراه خواهم داشت. هزاران بوسه تقدیم بر آرامگاه وجودت.

و مادر عزیزم

اوکه وجودم برایش همه رنج بود و وجودش همه برایم مهر

توانش رفت تا به توانایی برسم و موهایش سپید گشت تا رویم سپید بماند

اوکه فروغ نگاهش، گرمی کلامش و روشنی رویش سرمایه ی جاودان زندگی من است

اوکه راستی قامتم در شکستگی قامتش تجلی یافت

در برابر وجود گرامیش زانوی ادب بر زمین می نهم و با قلبی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستهایش بوسه می زنم

سر و وجودش همیشه سرسبز و مستدام باد

و برادران عزیزم

که وجودشان گرمی بخش لحظات زندگیم است

و خواهرانم

آن مهربانان همیشگی

که با عشق و محبت در تمام مراحل زندگی هم گام و هم یار من بوده اند.

// سپاسگزاری

پروردگارا! ای هستی بخش وجود، مرا بر نعمات بی کرانت توان شکر نیست، ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم، نه نردبانی برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

حال که این دفتر به پایان آمد، و این تحقیق به ثمر رسید، بر خود لازم می دانم که از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر پیمان نیرومند که راهنمایی هاشان در تمام مراحل انجام این تحقیق ره گشا بود، صمیمانه سپاس گزاری کنم.

از جناب آقای دکتر اسداله فرامرزی که مشاورت این تحقیق را بر عهده داشته اند و از نظرات شان بهره مند گشته ام سپاس گزاری می کنم. از جناب آقای دکتر محسن پرویزی و جناب آقای دکتر عبدالعلی بصیری که زحمت داوری این تحقیق را تقبل نموده اند تشکر و قدردانی می کنم.

یاد و خاطره همه دوستان عزیزم که لحظات خوبی را در کنار آن ها داشته ام همیشه در ذهنم باقی است و خاطرات خوب این دوستی ها یادگار خوب و ماندنی از دوره ای است که سپری گشت.

شهناز رضایی شکور

شهریور ماه ۹۰

چکیده

برخی خاصیت‌ها از زیرگروه n - مرکز یک گروه

به وسیله‌ی:

شهناز رضایی شکور

در سال ۱۹۵۲ بئر[۱] مفهوم زیرگروه n-مرکز $Z(G,n)$ را بیان کرد که در آن

$$Z(G,n)=\Big\{z\in G \mid (zx)^n=z^nx^n \quad , \quad (xz)^n=x^nz^n \quad \forall x\in G\Big\}.$$

در این پایان نامه برای هر گروه G، تمام اعداد صحیح m را به‌دست خواهیم آورد به‌طوری‌که $Z\big(G,n\big)\subseteq Z\big(G,m\big)$.

در پایان نیز مجموعه‌ای از اعداد صحیح S را به‌دست خواهیم آورد به‌طوری‌که $\bigcap_{n\in S} Z\big(G,n\big)=Z(G)$.

واژه‌های کلیدی: n-جابجایی، n-مرکز، زیرگروه حاشیه‌ای، n-انگل، گروه دوآبلی

[۱] Baer

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۱۹۵۲ بئر n-مرکز $Z\big(G,n\big)$ از یک گروه را به‌عنوان مجموعه‌ای از عناصر که با هر عضو گروه، n-جابجایی باشد تعریف کرد. یعنی

$$Z(G,n)=\Big\{z\in G \mid (zx)^n=z^nx^n \quad , \quad (xz)^n=x^nz^n \quad \forall x\in G\Big\}.$$

n-مرکز زیرگروه مشخصه از گروه است و خاصیت‌هایی شبیه مرکز را دارد که در این پایان‌نامه به تعدادی از آن‌ها اشاره کردیم برای مشاهده خاصیت‌های بیشتر می‌توان به [۲] و [۳] مراجعه کرد. می‌دانیم که مرکز را می‌توان به‌عنوان حاشیه‌ای از کلمه جابجاگر $[x,y]$ مشخص کرد در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که n-مرکز می‌تواند به‌طور مشابه حاشیه‌ای از کلمه n-جابجاگر $(xy)^ny^{-n}x^{-n}$ را مشخص کند که این نتیجه، حاصل برخی رابطه‌های مورد نظر یک حدس از هال[۲] روی حاشیه‌هاست. گروهی که برای سه عدد صحیح متوالی n-آبلی باشد، آبلی است به‌طور مشابه نشان می‌دهیم که اشتراک سه عدد صحیح متوالی از n-مرکزها برابر مرکز است. به‌طور کلی یک مجموعه از اعداد صحیح S به‌دست خواهیم آورد به‌طوری که اشتراک n-مرکزها برای همه nها در S برابرمرکزباشد. این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد. در فصل اول که با عنوان پیش‌نیازها مطرح شده است، به بیان قضایا و تعاریفی می‌پردازیم که در فصول بعدی مورد نیاز می‌باشند. در فصل دوم که با عنوان n-مرکز گروه مطرح شده، به بررسی مفاهیمی از n-مرکز گروه و نتایجی در رابطه با آن و همچنین زیرگروه حاشیه‌ای n-جابجاگر می‌پردازیم. در فصل سوم که با عنوان زیرگروه مشخصه n-مرکز بیان شده، به

[۲] P. Hall

تعریف n-انگل [۳] و حاشیه n-توان [۴] و نتایجی از n-انگل‌ها و رابطه انگل‌ها با گروه‌های دوآبلی و همچنین به قضایایی در رابطه با چهار-مرکز یک گروه می‌پردازیم. در فصل آخر که با عنوان نشاندن n-مرکز در m-مرکز مطرح شده نیم‌گروه نمایی و سیستم لوی را تعریف کرده و n-مرکز را در m-مرکز می‌نشانیم که براساس نتایجی از [۱۱] است و در پایان به بیان و اثبات قضیه اصلی این پایان‌نامه می‌پردازیم.

[۳] n-engel

[۴] n-power Margin

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل مفاهیم و قضایای مقدماتی را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است بیان می‌کنیم.

۱-۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. در این‌صورت H را زیرگروه مشخصه‌ی[۱] G می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $\alpha \in Aut(G)$ داشته باشیم $\alpha(H) \subseteq H$ و آن را با نماد $H \trianglelefteq^c G$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. در این‌صورت H را زیرگروه پایای کامل[۲] از G می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $\alpha \in End(G)$ داشته باشیم $\alpha(H) \subseteq H$ و آن را با نماد $H \trianglelefteq^f G$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G گروه و $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ عناصری از G باشند. جابجاگر[۳] $x_۱$ و $x_۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[x_۱, x_۲] = x_۱^{-۱} x_۲^{-۱} x_۱ x_۲ = x_۱^{-۱} x_۱^{x_۲}$$

در حالت کلی، یک جابجاگر ساده از وزن[۴] n مرتب شده از چپ به‌طور استقرایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[x_۱, x_۲, \ldots, x_n] = [[x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}], x_n] \qquad n \geq ۲$$

که $x_۱$، جابجاگر از وزن یک در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم $X_۱$ و $X_۲$ دو زیرمجموعه غیرتهی از گروه G باشند. دراین‌صورت زیرگروه جابجاگر $X_۱$ و $X_۲$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[X_۱, X_۲] = \langle [x_۱, x_۲] \mid x_۱ \in X_۱, x_۲ \in X_۲ \rangle$$

به‌علاوه هرگاه $(n \geq ۲)$، $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ زیرمجموعه‌های غیرتهی از گروه G باشند، زیرگروه جابجاگر $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$، به‌طور استقرایی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[X_۱, X_۲, \cdots, X_n] = [[X_۱, X_۲, \ldots, X_{n-۱}], X_n]$$

[۱] Characteristic Subgroup

[۲] Fully-invariant

[۳] Commutator

[۴] Weight

به‌ویژه $G' = [G, G]$ زیرگروه جابجاگر گروه G است که به آن زیرگروه مشتق[5] گروه G گوییم. جابجاگر $[X_1, X_2, X_2, \cdots, X_2]$ که X_2، n مرتبه تکرار شده باشد را با نماد $[X_1, {}_n X_2]$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه و x, y, z عناصر دلخواهی از گروه G باشند. دراین‌صورت*

$$(i) \quad [x, y] = [y, x]^{-1} \quad , \quad x^y = x\,[x, y]$$

$$(ii) \quad [x, yz] = [x, z]\,[x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$$

$$(iii) \quad [xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$$

اثبات. قسمت (i) به سادگی نتیجه می‌شود.

برای اثبات قسمت (ii) داریم

$$\begin{aligned}
[x, yz] &= x^{-1}(yz)^{-1}xyz \\
&= x^{-1}z^{-1}y^{-1}xyz \\
&= x^{-1}z^{-1}xzz^{-1}x^{-1}y^{-1}xyz \\
&= [x, z]\,[x, y]^z
\end{aligned}$$

قسمت (iii) به‌طور مشابه اثبات می‌شود. □

۲-۱ n-عنصر و n- گروه

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت g را یک n-عنصر[6] از G گوییم هرگاه برای عدد صحیح i داشته باشیم $g^{n^i} = 1$.

تعریف ۲.۲.۱. گروه G را n- گروه[7] نامیم هرگاه هر عنصرش n-عنصر باشد.

---

[5] Derived Subgroup

[6] n-element

[7] n-group

۱-۳ سری مشتق و گروه حلپذیر

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت زیرگروه مشتق از G را به‌صورت $G' = [G, G]$ تعریف می‌کنیم. با استقرا داریم $G'' = G^{(۲)} = [G', G']$ و $G^{(n+۱)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$ و بنابراین یک زنجیر نزولی از زیرگروه‌های پایای کامل به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$G = G^{(\circ)} \geq G' \geq G^{(۲)} \geq \cdots \geq G^{(n)} \geq \cdots$$

که آن را سری مشتق می‌نامیم. هر عامل $\frac{G^{(n)}}{G^{(n+۱)}}$ آبلی است.

تعریف ۲.۳.۱. گروه G را حلپذیر[۸] گوییم هرگاه یک سری آبلی داشته باشد، یعنی سری

$$۱ = G_\circ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $۱ \leqslant i \leqslant n$، عامل $\frac{G_{i+۱}}{G_i}$ آبلی باشد.

تعریف ۳.۳.۱. اگر G یک گروه حلپذیر باشد، طول کوتاهترین سری آبلی در G را طول مشتق[۹] G می‌نامیم.

تعریف ۴.۳.۱. گروه G دوآبلی[۱۰] است هرگاه زیرگروه جابجاگر آن آبلی باشد.

لم ۵.۳.۱. *فرض کنید G گروه باشد. دراین‌صورت G دوآبلی است اگر و تنها اگر زیرگروه نرمال N وجود داشته باشد به‌طوری‌که N و $\frac{G}{N}$ هر دو آبلی باشند. به‌عبارت دیگر، گروه حلپذیر G دوآبلی است هرگاه طول مشتق آن حداکثر دو باشد.*

اثبات. فرض کنید G دوآبلی باشد دراین‌صورت با توجه به تعریف دوآبلی G' آبلی است. قرار می‌دهیم $N = G'$ بنابراین $\frac{G}{N}$ آبلی است.
برای حالت عکس، از آنجایی‌که $\frac{G}{N}$ آبلی و N زیرگروه نرمال G است بنابراین $N \leqslant G'$ از طرفی N آبلی است لذا G' آبلی و در نتیجه G دوآبلی است. □

---

[۸] Soluble

[۹] Derived Length

[۱۰] Metabelian

۱-۴ سری مرکزی و سری مرکزی بالایی و پایینی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم G یک گروه دلخواه باشد. سری نرمال

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \cdots$$

را یک سری مرکزی[۱۱] G گوییم هرگاه به‌ازای هر i، $G_i \trianglelefteq G$ و $G_i/G_{i-1} \leqslant Z\big(G/G_{i-1}\big)$.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید G گروه و $Z_0(G) = 1$ و $Z_1(G) = Z(G)$ باشد. به‌ازای هر $n \geq 0$ تعریف می‌کنیم

$$\frac{Z_{n+1}(G)}{Z_n(G)} = Z\big(\frac{G}{Z_n(G)}\big)$$

دراین‌صورت زنجیر

$$1 = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \cdots \leq Z_n(G) \leq \cdots$$

یک سری مرکزی است که سری مرکزی بالایی[۱۲] گروه G نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید G گروه و $\gamma_1 = G$ و به‌ازای هر $n \geq 2$ تعریف می‌کنیم $\gamma_n(G) = [\gamma_{n-1}(G), G]$ همچنین $\frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)} \subseteq Z\big(\frac{G}{\gamma_{i+1}(G)}\big)$. لذا زنجیر $G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots$ یک سری مرکزی است که سری مرکزی پایینی[۱۳] گروه G نامیده می‌شود.

۱-۵ گروه پوچ‌توان و رده پوچ‌توانی

تعریف ۱.۵.۱. گروه G را پوچ‌توان[۱۴] نامند درصورتی‌که دارای یک سری مرکزی باشد که به G ختم شود.

تعریف ۲.۵.۱. طول کوتاهترین سری مرکزی G را رده پوچ‌توانی[۱۵] G گویند و آن‌را با $c(G)$ نشان می‌دهند.

[۱۱] Central Series

[۱۲] Upper Central Series

[۱۳] Lower Central Series

[۱۴] Nilpotent

[۱۵] Nilpotency Class

قضیه ۱.۵.۳. *فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت*

(الف) G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی مانند r موجود باشد به‌طوری‌که $\gamma_{r+1}(G) = 1$.

(ب) G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی مانند s موجود باشد به‌طوری‌که $Z_s(G) = G$.

اثبات. به صفحه‌ی ۲۲۷ از [۱] مراجعه کنید. □

نتیجه ۱.۵.۴. *فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان باشد. دراین‌صورت اگر r کوچک‌ترین عدد صحیح نامنفی باشد که $\gamma_{r+1}(G) = 1$ یا $Z_r(G) = G$ آن‌گاه رده پوچ‌توانی G، r است.*

اثبات. به صفحه‌ی ۲۲۷ از [۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۱.۵.۵. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. دراین‌صورت نمای[۱۶] G را کوچکترین عدد طبیعی n که برای هر $g \in G$ داشته باشیم $g^n = 1$ تعریف می‌کنیم و با نماد $exp(G)$ نشان می‌دهیم.

۱-۶ سری n-مشتق و n-حلپذیر

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید G گروه و n عدد صحیح باشد. زیرگروه n-جابجاگر[۱۷] را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$[G, G; n] = \langle (xy)^n y^{-n} x^{-n} \mid x, y \in G \rangle.$$

تعریف ۱.۶.۲. فرض کنید G یک گروه باشد. سری n-مشتق[۱۸] با استفاده از قاعده زیر به‌طور استقرایی تعریف می‌شود

$$G^{(0;n)} = G \quad , \quad G^{(i+1;n)} = [G^{(i;n)}, G^{(i;n)}; n]$$

سری n-مشتق یک زنجیر نزولی از زیرگروه‌های پایای کامل از G است.

تعریف ۱.۶.۳. گروه G را n-حلپذیر[۱۹] گوییم هرگاه یک زنجیر نرمال با عامل‌های n-آبلی داشته باشد. به‌عبارت دیگر یک سری n-مشتق منتهی به ۱ داشته باشد. برای عدد صحیح n هر گروه حلپذیر، n-حلپذیر است.

[۱۶] Exponent

[۱۷] n-commutator Subgroup

[۱۸] n-derived

[۱۹] n-soluble

۷-۱ زنجیر n-مرکز بالایی و گروه n-پوچ توان

تعریف ۱.۷.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. زنجیر n-مرکز بالایی[۲۰]، $Z_i(G;n)$ از گروه G توسط قاعده زیر به‌طور استقرایی تعریف می‌شود.

$$Z_{\circ}(G;n) = ۱ \quad , \quad \frac{Z_{i+۱}(G;n)}{Z_i(G;n)} = Z\Big[\frac{G}{Z_i(G;n)};n\Big]$$

همچنین $Z_i(G;n) = Z_i(G;۱-n)$.

تعریف ۲.۷.۱. گروه G را n-پوچ توان[۲۱] نامیم درصورتی‌که دارای یک زنجیر n-مرکز بالایی باشد که به G ختم شود.

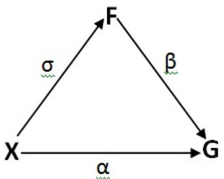
ملاحظه ۳.۷.۱. برای عدد صحیح n گروه‌های n-پوچ توان، n-حلپذیر هستند و گروه‌های پوچ توان، n-پوچ توان هستند.

۸-۱ گروه آزاد

تعریف ۱.۸.۱. فرض کنید F گروه و X مجموعه‌ای غیرتهی و $\sigma : X \longrightarrow F$ یک تابع باشد. در این‌صورت F یا دقیق‌تر (σ, F) را آزاد[۲۲] روی X نامیم هرگاه برای هر تابع α از X به گروه G همریختی منحصربفرد $\beta : F \longrightarrow G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\alpha = \beta\sigma$$

به عبارت دیگر نمودار زیر جابجایی باشد.



---

[۲۰] Upper n-center Chain

[۲۱] n-nilpotent

[۲۲] Free

قضیه ۲.۸.۱ (خاصیت تصویری گروه آزاد[۲۳]). *فرض کنیم F یک گروه آزاد روی مجموعه X باشد و G و H دو گروه و $\alpha : F \longrightarrow H$ یک همریختی و $\beta : G \longrightarrow H$ یک بروریختی از گروه‌ها باشند. دراین‌صورت همریختی مانند $\delta : F \longrightarrow G$ وجود دارد به‌طوری‌که $\beta\delta = \alpha$.*

اثبات. به صفحه‌ی ۴۹ از (۱۶) مراجعه شود. □

تعریف ۳.۸.۱. فرض کنید F گروه آزاد روی مجموعه شمارای نامتناهی $\{x_1, x_2, \ldots\}$ باشد و W زیرمجموعه ناتهی از F باشد. اگر $w = x_{i_1}^{l_1} \ldots x_{i_r}^{l_r} \in W$ و $g_1, \ldots, g_r$ عناصری از گروه G باشند دراین‌صورت کلمه[۲۴] w را برای $(g_1, \ldots, g_r)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$w(g_1, \ldots, g_r) = g_1^{l_1} \ldots g_r^{l_r}.$$

[۲۳] Projective Property

[۲۴] Word

فصل ۲

n-مرکزگروه

در این فصل به مفهوم n- مرکز و قضایایی در مورد آن می‌پردازیم و زیرگروه حاشیه‌ای n- جابجاگر را تعریف و قضایای مربوط به آن را بیان می‌کنیم.

۲-۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید n یک عدد صحیح باشد. عناصر x و y در گروه G، n-جابجایی[۱] نامیده می‌شوند هرگاه

$$(xy)^n = x^n y^n \quad , \quad (yx)^n = y^n x^n.$$

تعریف ۲.۱.۲. فرض کنید n یک عدد صحیح باشد. دراین‌صورت گروه G را n-آبلی[۲] نامیم هرگاه هر دو عضوش n-جابجایی باشند.

تعریف ۲.۱.۳. فرض کنید n یک عدد صحیح باشد. دراین‌صورت n-مرکز[۳] گروه G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z\big(G, n\big) = \Big\{z \in G \mid (zx)^n = z^n x^n \quad , \quad (xz)^n = x^n z^n \quad \forall x \in G\Big\}.$$

لم ۲.۱.۴. *فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت $Z\big(G, n\big)$ زیرگروه مشخصه است.*

اثبات. فرض کنید α یک خودریختی از G و $z \in Z\big(G, n\big)$ باشد. دراین‌صورت برای هر $g \in G$ یک $x \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $g = \alpha(x)$. بنابراین

$$\begin{aligned}
(\alpha(z)g)^n &= (\alpha(z)\alpha(x))^n \\
&= (\alpha(zx))^n \\
&= \alpha((zx)^n) \\
&= \alpha(z^n x^n) \\
&= \alpha(z^n)\alpha(x^n) \\
&= (\alpha(z))^n(\alpha(x))^n \\
&= \alpha(z)^n g^n.
\end{aligned}$$

---

[۱] n-commute

[۲] n-abelian

[۳] n-center