بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

حل معادلات تابعی به‌وسیله روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده

استاد راهنما:

دکتر قاسم برید لقمانی

استاد مشاور:

دکتر سید محمد مهدی حسینی

پژوهش و نگارش:

مهدی زارع‌زاده مهریزی

تیرماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

پس از حمد و سپاس پروردگار متعال که بدون عنایت او هیچ توفیقی دست‌یافتنی نیست، بر خود لازم می‌دانم بپاس راهنماییها و شکیباییهای بی‌دریغ استاد بزرگوار و مهربانم جناب آقای دکترقاسم برید لقمانی که طی طریق این تحقیق را مرهون زحمات دلسوزانه و بی‌شائبه ایشان می‌دانم کمال قدردانی و تشکر را داشته باشم. همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را برعهده گرفتند صمیمانه تشکر می‌کنم. سزاوار است از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر سید مهدی کرباسی و جناب آقای دکتر فرید (محمد) مالک قائینی به خاطر زحمات فراوان، پیشنهادات دلسوزانه و همچنین قبول داوری این پایان‌نامه سپاسگزاری کنم. از کلیه اساتید بزرگوار گروه ریاضی به خاطر زحماتی که در طول این دوره تحصیلی‌ام متقبل شدند تشکر و قدردانی می‌نمایم. از خانم عابدینی و خانم عباسی‌زاده به خاطرزحمات فراوانشان تشکر و قدردانی می‌کنم. همچنین از دوستان عزیز و همکلاسیهای گرانقدرم، آقایان، حیدری، حسینی، ابطحی، ابوالحسنی، خاتم‌بخش، دهقان، راهپیما، رنجبر، شریعتی‌نسب، قانعی، غیاثی، نجفی و نوظهور که گذران زندگی تحصیلی‌ام را با خاطرات خوش از ایشان به یادگار دارم، تشکر و قدردانی می‌نمایم. در پایان از لطف همیشگی خانواده عزیزم که بدون حمایت‌ها و تشویق‌های آن‌ها رسیدن به این مرحله از زندگی برایم ناممکن بود، سپاسگزارم. امیدوارم خداوند توفیق جبران قطره‌ای هرچند اندک از مهربانی‌هایشان را به من عطا کند.

مهدی زارع زاده مهریزی ۸۹/۴/۸

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ توپولوژی وهوموتوپی ۲

۳.۱ معادلات دیفرانسیل ۵

۴.۱ معادلات انتگرال ۷

۱.۴.۱ معادلات انتگرال فردهلم خطی ۷

۲.۴.۱ معادلات انتگرال ولترا خطی ۸

۳.۴.۱ معادلات انتگرال غیرخطی ۸

۴.۴.۱ جواب یک معادله انتگرال ۹

۵.۴.۱ تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا ۱۰

۶.۴.۱ تبدیل مسائل مقدار مرزی به معادلات انتگرال فردهلم ۱۱

۵.۱ معادلات جبری غیرخطی ۱۳

۱.۵.۱ حل عددی معادلات جبری غیرخطی ۱۴

۶.۱ چند جمله‌ای‌های آدومیان ۱۸

۲ روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده برای حل معادلات انتگرال ۲۲

۱.۲ مقدمه ۲۳

۲.۲ روش تحلیلی اختلال هوموتوپی ۲۳

۱.۲.۲ ایده‌ی اصلی روش اختلال هوموتوپی(HPM) ۲۴

۳.۲ روش اختلال هوموتوپی برای حل معادلات انتگرال ۲۸

۱.۳.۲ معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم ۲۸
۲.۳.۲ معادلات انتگرال فردهلم نوع اول ۳۰
۴.۲ روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده ($MHPM$) ۳۲
۱.۴.۲ روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده برای حل معادلات انتگرال فردهلم ۳۲
۲.۴.۲ روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده برای حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم ۴۴
۵.۲ روش اختلال هوموتوپی برای حل دستگاه معادلات انتگرال ۴۸
۶.۲ روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده برای حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم ۵۹
۷.۲ نتیجه گیری ۶۶

۳ روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده برای حل معادلات جبری ۶۸
۱.۳ مقدمه ۶۹
۲.۳ روش اختلال هوموتوپی برای حل معادلات جبری ۶۹
۳.۳ روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده برای حل معادلات جبری ۷۵
۱.۳.۳ روش جاویدی و گلبابایی ۷۵
۲.۳.۳ روش جاویدی ۸۰
۴.۳ نتیجه گیری ۸۵

پیوست ۸۶
واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۸۶
واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۹۰

مراجع ۹۴

چکیده

در این پایان نامه ابتدا برخی تعاریف و مفاهیم اولیه بیان و سپس انواع معادلات انتگرال و دسته‌بندی آن‌ها معرفی می‌شوند. پس از آن روش اختلال هوموتوپی برای حل معادلات انتگرال مورد بررسی قرار گرفته است، همچنین دو روش اختلال هوموتوپی اصلاح‌شده برای حل این دسته از معادلات ارائه و این روش‌ها برای حل دستگاه معادلات انتگرال توسعه داده شده است. در ادامه روش اختلال هوموتوپی برای حل معادلات جبری غیرخطی به کار گرفته شده و دو روش اختلال هوموتوپی اصلاح شده برای حل این معادلات ارائه شده است. در پایان نتایج حاصل با روش‌های دیگر مقایسه می‌گردد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور مختصر به مفاهیمی که در مطالعه این پایاننامه مورد نیاز هستند، اشاره می‌کنیم. ابتدا با تعریف فضای توپولوژیک به بیان مفهوم هوموتوپی در توپولوژی پرداخته و در ادامه با معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات انتگرال و معادلات جبری آشنا می‌شویم.

۲.۱ توپولوژی وهوموتوپی

در این بخش با مفهوم توپولوژیکی هوموتوپی آشنا می‌شویم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری مختلط باشد، تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow R$ را یک نرم گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) به ازای هر x در X، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲) به ازای هر x در X و هر اسکالر α، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳) به ازای هر x و y در X، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای نرمدار گوییم. همچنین اگر این فضا با متر تعریف شده به وسیله‌ی $d(x, y) = \|x - y\|$ تام باشد، آن را فضای باناخ[۱] گوییم.

تعریف ۲.۲.۱. یک توپولوژی روی یک مجموعه ناتهی X، گردایه‌ای ناتهی چون τ از زیر مجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف : X و ϕ عضو τ هستند،

ب : اجتماع هر زیر گردایه دلخواه از اعضای τ عضو τ است،

ج : اشتراک هر زیر گردایه‌ی متناهی از اعضای τ به τ تعلق دارد.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی τ، یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود به‌علاوه فضای X با توپولوژی τ را با (X, τ) نمایش می‌دهیم. عناصر τ را زیر مجموعه‌های باز X می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت پیوسته گویند هرگاه به ازای هر زیر مجموعه‌ی باز Y مانند p، مجموعه‌ی $f^{-1}(p)$ در X باز باشد.

[۱] Banach space

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $I=[0,1]$ بازه‌ی واحد حقیقی، X و Y فضاهای توپولوژیک و f_1 و f_2 دو نگاشت پیوسته از X بتوی Y باشند. اگر نگاشت پیوسته‌ای چون $F:I\times X\longrightarrow Y$ موجود باشد به طوری که به ازای هر عضو X داشته باشیم :

$$F(0,x)=f_1(x),\qquad F(1,x)=f_2(x)$$

آنگاه نگاشت‌های f_1 و f_2 را هوموتوپ و نگاشت F را یک هوموتوپی بین f_1 و f_2 می‌گوییم و در ضمن هوموتوپ بودن f_1 و f_2 را با $f_1\sim f_2$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر هر هوموتوپی، یک خانواده تک پارامتری از توابع پیوسته تعریف شده از فضای X به‌توی Y است. اگر t پارامتر معرف زمان باشد، هنگامی که زمان از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، هوموتوپی F نمایشگر دگر شکلی (تغییر شکل) پیوسته‌ی f_1 به f_2 است.

لم ۶.۲.۱. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه هم ارزی است.

برهان. برای اثبات کافی است نشان دهیم سه خصوصیت رابطه هم ارزی برقرار است.

الف : به ازای هر تابع مفروض مانند f قرار می‌دهیم $F(t,x)=f(x), 0\leq t\leq 1$. بنابراین $f\sim f$.

ب : فرض کنید $f_1\sim f_2$ و F هوموتوپی بین f_1 و f_2 باشد. حال قرار می‌دهیم

$$G(t,x)=F(1-t,x),\qquad 0\leq t\leq 1,$$

در این صورت G یک هوموتوپی بین f_1 و f_2 است، یعنی $f_2\sim f_1$.

ج : فرض کنیم $f_1\sim f_2$ با هوموتوپی F_1 و $f_2\sim f_3$ با هوموتوپی F_2، نشان می‌دهیم که $f_1\sim f_3$.

برای این کار کافی است نگاشت $G:I\times X\longrightarrow Y$ را به‌صورت

$$G(t,x)=\begin{cases} F_1(2t,x), & 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ F_2(2t-1,x), & \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

تعریف کنیم، واضح است که $f_1\sim f_3$ با هوموتوپی G. $\square$

برای آشنایی بیشتر با هوموتوپی‌ها، اکنون یک حالت خاص را که در آن f یک راه در X است، در نظر می‌گیریم.

تعریف ۷.۲.۱. اگر $f:[0,1]\to X$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری که

$$f(0)=x_0,\quad f(1)=x_1, \tag{۱.۲.۱}$$

گوییم f در X، یک راه از $x_۰$ به $x_۱$ است. همچنین $x_۰$ را نقطه‌ی آغازی و $x_۱$ را نقطه‌ی انجامی راه f می‌نامیم.

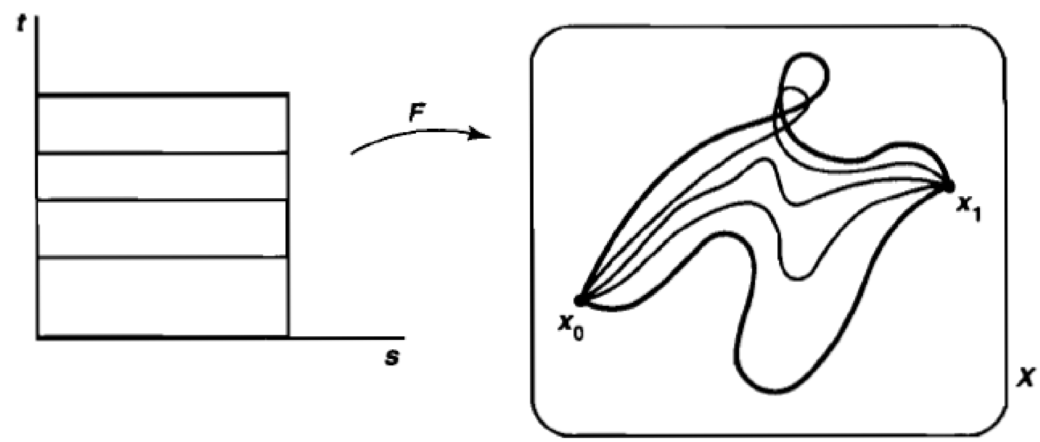
می‌توان بین راه‌ها در X، هوموتوپی خاصی موسوم به هوموتوپی راهی تعریف کرد.

تعریف ۸.۲.۱. راه‌های $f_۱$ و $f_۲$ را در X که بازه‌ی $I=[۰,۱]$ را بتوی X می‌نگارند هوموتوپ راهی می‌نامیم، هرگاه هر دو دارای نقطه‌ی آغازی $x_۰$ و نقطه‌ی انجامی $x_۱$ باشند و نگاشت پیوسته‌ای مانند $F: I\times I \to X$ موجود باشد به طوری که به ازای هر s و t از I روابط

$$F(s,۰)=f_۱(s), \quad F(s,۱)=f_۲(s) \tag{۲.۲.۱}$$

$$F(۰,t)=x_۰, \quad F(۱,t)=x_۱ \tag{۳.۲.۱}$$

برقرار باشند. F را هوموتوپی راهی[۱] بین $f_۱$ و $f_۲$ می‌نامیم. اگر $f_۱$ و $f_۲$ هوموتوپ راهی باشند، می‌نویسیم $f_۱ \simeq_p f_۲$ (شکل (۱.۲.۱)).



شکل ۱.۲.۱ : نمایش هموتوپی راهی بین $f_۱$ و $f_۲$ [۲۶].

در تعریف (۸.۲.۱) شرط (۲.۲.۱) در واقع هوموتوپ بودن $f_۱$ و $f_۲$ را بیان می‌کند و شرط (۳.۲.۱) بیانگر این است که به ازای هر t، نگاشت $s \longmapsto F(s,t)$ یک راه از $x_۰$ به $x_۱$ است. به عبارت دیگر شرط اول حاکی از این است که F نمایشگر یک دگرشکلی پیوسته است که راه $f_۱$ را به $f_۲$ می‌نگارد و شرط دوم بیانگر ثابت ماندن نقاط انتهایی راه‌ها در این دگرشکلی است.

[۱] Path homotopy

لم ۹.۲.۱. رابطه‌ی $\simeq_p$ یک رابطه‌ی هم ارزی است.

برهان. مشابه لم (۶.۲.۱). □

برای آشنایی بیشتر با هوموتوپی‌ها، یک نوع هوموتوپی ساده ولی در عین حال پر کاربرد را در مثال زیر معرفی می‌کنیم.

مثال ۱۰.۲.۱. فرض کنیم f_1 و f_2 دو نگاشت از X به‌توی Y باشند. قرار می‌دهیم:

$$F(t,x) = tf_1(x) + (1-t)f_2(x)$$

واضح است که F یک هوموتوپی بین f_1 و f_2 است. هوموتوپی F، هوموتوپی مستقیم الخط و در برخی مواقع هوموتوپی محدب نامیده می‌شود.

۳.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۳.۱. اگر y تابعی مجهول از متغیر مستقل x و $y^{(n)}$ نمایش مشتق مرتبه‌ی nام آن باشد، آنگاه معادله‌ی

$$f(x,y,y',...,y^{(n)}) = 0 \qquad (۴.۳.۱)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی [1] (ODE) نامیده می‌شود.

منظور از مرتبه‌ی یک معادله دیفرانسیل، بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در آن معادله است، بنابراین معادله‌ی (۴.۳.۱) یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی n است.

تعریف ۲.۳.۱. اگر در رابطه‌ی (۴.۳.۱) بتوانیم تابع f را به صورت یک ترکیب خطی از مشتق‌های y، یعنی به شکل

$$y^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)y^{(i)}(x) + r(x) \qquad (۵.۳.۱)$$

بنویسیم، که در آن $r(x)$ و $a_i(x)$ها توابعی پیوسته از x هستند، معادله‌ی دیفرانسیل (۴.۳.۱) راخطی و در غیر این صورت غیرخطی می‌نامیم. اگر $r(x) = 0$ این معادله همگن و اگر $r(x) \neq 0$ این معادله غیر همگن نامیده می‌شود. معمولا معادله‌های دیفرانسیل معمولی خطی را می‌توان به کمک

[1] Ordinary Differential Equation

روش‌های تحلیلی حل کرد، اما بیشتر معادله‌های دیفرانسیل معمولی غیرخطی هستند و نمی‌توان جواب دقیق آنها را محاسبه کرد. برای حل این دسته از مسائل روش‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. متداول‌ترین معادله‌های دیفرانسیل معمولی، از مرتبه اول و دوم هستند. به عنوان مثال، یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم خطی ناهمگن به صورت

$$y'' = h(x)y^{'}(x) + g(x)y(x) + f(x) \qquad a \leq \ b \tag{۶.۳.۱}$$

است که به شرط پیوستگی توابع $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ به ازای هر شرط اولیه $y(a) = \alpha$ و $y'(a) = \beta$ جواب یکتا دارد.

تعریف ۳.۳.۱. اگر به معادله‌ی(۶.۳.۱) شرایط اولیه $y(a) = \alpha$ و $y'(a) = \beta$ را اضافه کنیم (a ، α و β اعداد حقیقی دلخواه هستند)، معادله‌ی دیفرانسیل حاصل یک مساله‌ی مقدار اولیه[۱](IVP) نامیده می‌شود. با اضافه کردن شرایط $y(a) = \alpha$ و $y(b) = \beta$ موسوم به شرایط مرزی دو نقطه‌ای به (۶.۳.۱)، معادله‌ای به دست آمده یک مساله‌ی مقدار مرزی[۲] (BVP) است. در یک مساله‌ی مقدار مرزی در حالت کلی مقادیر تابع مجهول یا مشتقات آن در بیش از یک نقطه معلوم هستند که معمولا تعداد این نقاط برابر با دو است. چنین مساله‌ای را یک مساله‌ی مقدار مرزی دو نقطه‌ای می‌نامند.

در مسائل مقدارمرزی، ثابت‌های موجود در جواب معادله، با استفاده از شرایطی که در نقاط مختلف داده شده‌اند، تعیین می‌گردند. بنابراین ممکن است مسئله بیش از یک جواب داشته باشد یا اصلا جوابی نداشته باشد[۲۲].

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنید تابع f در مسئله‌ی مقدار مرزی

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \qquad a < x < b, \\ y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta, \end{cases} \tag{۷.۳.۱}$$

بر مجموعه‌ی

$$D = \{(x, y, y')| a \leq x \leq b,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < y' < \infty\}$$

[۱] Intial Value Problem

[۲] Boundary Value Problem

پیوسته بوده و $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ نیز بر D پیوسته باشند. هرگاه

۱) به ازای هر $(x,y,y') \in D$، $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') > 0$ باشد،

۲) یک ثابت M وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $(x,y,y') \in D$،

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')| \leq M$$

آن‌گاه مسئله‌ی مقدارمرزی فوق جواب منحصر به فرد دارد. اثبات[۲۲].

نتیجه ۵.۳.۱. اگر در مسئله‌ی مقدارمرزی

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \qquad a < x < b, \\ y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta. \end{cases}$$

شرایط زیر برقرار باشند،

۱) $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشند،

۲) $q(x) > 0$ بر $[a,b]$،

آن‌گاه مسئله دارای جواب یگانه است [۸].

۴.۱ معادلات انتگرال

تعریف ۱.۴.۱. به هر معادله‌ی تابعی که تابع مجهول آن در زیر علامت انتگرال قرار داشته باشد، معادله‌ی انتگرال گویند.

تعریف ۲.۴.۱. معادله‌ی انتگرالی را که تابع مجهول در آن فقط به صورت خطی ظاهر شود، معادله‌ی انتگرال خطی گویند.

متداول‌ترین معادلات انتگرال را می‌توان به دو گروه معادلات انتگرال فردهلم و معادلات انتگرال ولترا دسته بندی کرد.

۱.۴.۱ معادلات انتگرال فردهلم خطی

شکل استاندارد معادلات انتگرال فردهلم خطی، که در آن حد پائین و حد بالا مقادیر ثابت a و b هستند به صورت زیر است:

$$\Phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt \ , \quad a \leq x,t \leq b \tag{۸.۴.۱}$$

که درآن هسته $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ و پارامتر λ از قبل معلوم هستند. معادله‌ی انتگرال فوق، خطی است زیرا تابع مجهول $y(x)$ در آن تنها به صورت خطی ظاهر شده است. بر حسب اینکه $\Phi(x)$ کدام یک از مقادیر زیر را اختیار کند، معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:

۱) زمانی که $\Phi(x) \equiv 0$، معادله‌ی (۸.۴.۱) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = 0$$

این معادله را معادله‌ی انتگرال فردهلم خطی نوع اول می‌نامند.

۲) زمانی که $\Phi(x)$ روی $[a,b]$ صفر نشود، معادله‌ی (۸.۴.۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$y(x) = \frac{f(x)}{\Phi(x)} + \frac{\lambda}{\Phi(x)} \int_a^b k(x,t)y(t)dt$$

به این معادله، معادله‌ی انتگرال فردهلم خطی نوع دوم گویند.

۲.۴.۱ معادلات انتگرال ولترا خطی

شکل استاندارد معادلات انتگرال ولترا خطی، یعنی معادلاتی که در آن حد پائین یا حد بالای انتگرال به جای اینکه اعداد ثابتی باشند به صورت تابعی از x ظاهر شود، به شکل زیر است:

$$\Phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt \qquad a \leq t \leq x \leq b \tag{۹.۴.۱}$$

که در آن هسته $k(x,t)$، تابع $f(x)$ و پارامتر λ از قبل معلوم بوده و تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی است.

معادلات انتگرال ولترا را نیز می‌توان با توجه به وضعیت $\Phi(x)$ به دو دسته تقسیم کرد.

۱) زمانی که $\Phi(x) \equiv 0$، معادله‌ی (۹.۴.۱) به معادله‌ی زیر تبدیل می شود

$$f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt = 0 \qquad a \leq t \leq x \leq b$$

این معادله را، معادله انتگرال ولترای خطی نوع اول گویند.

۲) زمانی که $\Phi(x)$ روی $[a,b]$ صفر نشود، معادله‌ی (۹.۴.۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$y(x) = \frac{f(x)}{\Phi(x)} + \frac{\lambda}{\Phi(x)} \int_a^x k(x,t)y(t)dt \qquad a \leq t \leq x \leq b$$

به این معادله، معادله‌ی انتگرال ولترای خطی نوع دوم گویند.

۳.۴.۱ معادلات انتگرال غیرخطی

تعریف ۳.۴.۱. در هر معادله‌ی انتگرال که به جای $y(t)$ عبارتی نظیر $F(y(t))$ که تابعی غیرخطی بر حسب $y(t)$ است، در زیر علامت انتگرال ظاهر شود معادله‌ی انتگرال را غیرخطی گویند.

معادلات انتگرال به شکل

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(y(t))dt$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)F(y(t))dt$$

را به ترتیب معادله‌ی انتگرال فردهلم غیرخطی و معادله‌ی انتگرال ولترای غیرخطی گویند.
معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال غیرخطی هستند.

$$y(x) = ۱ + \lambda \int_۰^۱ y(t)^۲ y(t)dt$$

$$y(x) = x + \lambda \int_۰^۱ xty^۳(t)dt$$

$$y(x) = x - \frac{۱}{x^۴} + \int_۰^x te^{y(t)}dt$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)sin(y(t))dt$$

روش‌های حل دقیق معادلات انتگرال غیرخطی محدود و پیچیده است زیرا در حالت کلی جواب معادله‌ی انتگرال غیرخطی یکتا نیست. البته جواب یکتا برای معادلات انتگرال غیرخطی با شرایط خاص ممکن است وجود داشته باشد.

۴.۴.۱ جواب یک معادله انتگرال

جواب یک معادله انتگرال روی فاصله انتگرال‌گیری، تابعی مانند $u(x)$ است به طوری که در معادله داده شده صدق کند. به عبارت دیگر اگر جواب داده شده در طرف راست معادله جایگذاری شود و در نتیجه دو طرف چپ و راست معادله با هم برابر شوند آن‌گاه $u(x)$ جواب معادله می‌باشد. نکات قابل توجه و با ارزشی در ارتباط با جواب معادلات انتگرال وجود دارد که اکنون به آنها اشاره می‌کنیم. اولین نکته مهمی که مطرح می‌شود این است که برای یک معادله انتگرال داده شده آیا جواب وجود دارد و اگر وجود دارد آیا جواب یکتا است یا نه؟
دومین نکته مهم آن است که آیا این جواب با یک فرم بسته‌ای که قابل توصیف بر حسب توابع

مقدماتی نظیر یک چند جمله‌ای یا یک تابع نمایی یا هذلولوی یا مثلثاتی باشد قابل نمایش است؟
باید توجه داشت که همیشه نمی‌توانیم جواب را با یک فرم بسته مشخص کنیم اما به‌جای آن می‌توان جواب را به شکل یک سری بدست آورد[۳۱].
جواب به‌دست آمده به شکل یک سری معمولا برای محاسبه تقریبی به‌کار می‌رود و در این حالت هر چه جملات بیشتری را به‌دست آوریم دقت نتیجه حاصل بهتر خواهد بود.

۵.۴.۱ تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا

قبل از بیان روش لازم است قضیه زیر را که انتگرال‌های چندگانه را به انتگرال ساده تبدیل می‌کند، مطرح کنیم[۳۱] :

$$\int_۰^x \int_۰^{x_۱} \int_۰^{x_۲} \dots \int_۰^{x_{n-۱}} f(x_n) dx_n \dots dx_۱ = \frac{۱}{(n-۱)!} \int_۰^x (x-t)^{n-۱} f(t) dt \qquad (۱۰.۴.۱)$$

این یک فرمول اساسی و مهم است و در روشی که برای انجام این نوع تبدیلات ارائه می‌شود مورد استفاده قرار می‌گیرد. روند تبدیل به این صورت است که بزرگترین مرتبه مشتق را مساوی با $u(x)$ در نظر گرفته و از طرفین با استفاده از شرایط اولیه از صفر تا x انتگرال می‌گیریم.

مثال ۴.۴.۱. مسئله مقدار اولیه‌ی

$$y''' - ۳y'' - ۶y' + ۵y = ۰, \qquad y(۰) = y'(۰) = y''(۰) = ۱ \qquad (۱۱.۴.۱)$$

را به یک معادله انتگرال ولترا تبدیل کنید.
حل: همانطور که گفتیم ابتدا قرار می‌دهیم :

$$y'''(x) = u(x) \qquad (۱۲.۴.۱)$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف (۱۲.۴.۱) از صفر تا x و استفاده از شرط اولیه‌ی $y''(۰) = ۱$ داریم :

$$y''(x) = ۱ + \int_۰^x u(t) dt \qquad (۱۳.۴.۱)$$

با دو بار انتگرال گرفتن از طرفین رابطه (۱۲.۴.۱) و استفاده از شرایط مربوطه به نتایج زیر می‌رسیم :

$$y'(x) = ۱ + x + \int_۰^x \int_۰^{x_۱} u(t) dt dx_۱ \qquad (۱۴.۴.۱)$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} u(t)dtdx_2dx_1 \qquad (۱۵.۴.۱)$$

با استفاده از فرمول (۱۰.۴.۱)، انتگرال‌های دوگانه و سه‌گانه در فرمول‌های (۱۴.۴.۱) و (۱۵.۴.۱) را به صورت زیر به انتگرال یگانه تبدیل می‌کنیم :

$$\int_0^x \int_0^{x_1} u(t)dtdx_1 = \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (۱۶.۴.۱)$$

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} u(t)dtdx_2dx_1 = \frac{1}{2!}\int_0 x(x-t)^2u(t)dt \qquad (۱۷.۴.۱)$$

حال با جایگذاری فرمول‌های (۱۶.۴.۱) و (۱۷.۴.۱) در فرمول‌های (۱۴.۴.۱) و (۱۵.۴.۱) داریم:

$$y'(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (۱۸.۴.۱)$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2u(t)dt \qquad (۱۹.۴.۱)$$

با قرار دادن روابط (۱۲.۴.۱) و (۱۳.۴.۱) و (۱۸.۴.۱) و (۱۹.۴.۱) در معادله (۱۱.۴.۱) معادله انتگرال ولترای زیر را که هم ارز مسئله مقدار اولیه‌ی داده شده است به‌دست می‌آوریم :

$$u(x) = 4 + x - \frac{5}{2}x^2 + \int_0^x (3 + 6(x-t) - \frac{5}{2}(x-t)^2)u(t)dt. \qquad (۲۰.۴.۱)$$

۶.۴.۱ تبدیل مسائل مقدار مرزی به معادلات انتگرال فردهلم

در بالا در مورد تبدیل مسئله مقدار اولیه به معادله انتگرال ولترای معادل آن بحث کردیم. در اینجا روش کار مشابه روشی است که گفته شد البته روند تبدیل مسائل مقدار مرزی به یک معادله انتگرال فردهلم مشکل‌تر و کمتر مورد نیاز است. از آنجا که معمولا $y'(0) = 0$ داده نمی‌شود باید توجه خاصی جهت تعریف این کمیت مبذول شود. برای تصور عملی و بهتر از این روش به اعمال آن روی یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۵.۴.۱. هدف تعیین یک معادله انتگرال فردهلم متناظر با مسئله مقدار مرزی

$$y''(0) + y(x) = x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi \qquad (۲۱.۴.۱)$$

همراه با شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشد.

$$y'(0) = 1, \qquad y(\pi) = \pi - 1 \qquad (۲۲.۴.۱)$$

حل: ابتدا قرار می‌دهیم :

$$y''(x) = u(x) \qquad (۲۳.۴.۱)$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف (۲۳.۴.۱) از صفر تا x داریم :

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x u(t)dt \qquad (۲۴.۴.۱)$$

در نتیجه

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x u(t)dt \qquad (۲۵.۴.۱)$$

که $y'(x)$ در این مسئله مقدار مرزی داده نشده است اما آن را بعدا با استفاده از مقدار مرزی $x = 0$ تعیین می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از طرفین (۲۵.۴.۱) از صفر تا x و استفاده از شرایط مرزی در $x = 0$ و تبدیل انتگرال‌گیری دوگانه حاصل به یک انتگرال یگانه به‌دست می‌آوریم:

$$y(x) = 1 + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (۲۶.۴.۱)$$

تنها چیزی که باید محاسبه کنیم $y'(0)$ می‌باشد که برای محاسبه‌ی آن در دو طرف معادله (۲۶.۴.۱) مقدار $x = \pi$ را قرار می‌دهیم و از شرط مرزی در $x = \pi$ استفاده می‌کنیم. لذا داریم:

$$y(\pi) = 1 + \pi y'(0) + \int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt \qquad (۲۷.۴.۱)$$

با تعیین $y'(0)$ از معادله (۲۷.۴.۱) به‌دست می‌آوریم :

$$y'(0) = \frac{1}{\pi}((\pi - 2) - \int_0^\pi (\pi - t)u(t)dt) \qquad (۲۸.۴.۱)$$

با قراردادن عبارت (۲۸.۴.۱) در رابطه (۲۶.۴.۱) نتیجه می‌گیریم که

$$y(x) = 1 + \frac{x}{\pi}((\pi - 2) - \int_0^\pi (x-t)u(t)dt) + \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (۲۹.۴.۱)$$

با جایگذاری مقادیر (۲۳.۴.۱) و (۲۹.۴.۱) در رابطه (۲۱.۴.۱) به‌دست می‌آوریم :

$$u(x) = x - 1 - \frac{x}{\pi}((\pi - 2) + \int_0^\pi (x-t)u(t)dt) - \int_0^x (x-t)u(t)dt \qquad (۳۰.۴.۱)$$

اکنون با استفاده از رابطه $\int_0^\pi(\cdot) = \int_0^x(\cdot) + \int_x^\pi(\cdot)$ معادله (۳۰.۴.۱) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} u(x) = x - 1 - \frac{x}{\pi}(\pi - 2) - \frac{x}{\pi}\int_0^x (x-t)u(t)dt - \frac{x}{\pi}\int_x^\pi (x-t)u(t)dt \\ - \int_0^x (x-t)u(t)dt \end{aligned} \qquad (۳۱.۴.۱)$$