دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض - آنالیز

پایداری معادلات تابعی و سایه زدن

استاد راهنما

دکتر قدیر صادقی

استاد مشاور

دکتر طیبه لعل شاطری

نگارش

الهام مرادی

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به

رهبر عزیزم

امام خامنه ای

حقا که تو از سلاله فاطمه ای
با خنده خود به درد ما خاتمه ای
زیباتر از این نام ندیدم به جهان
سید علی الحسینی الخامنه ای

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

حمد و ستایش خداوند سبحان را، که توفیق دوباره تحصیل علم را به من عطا نمود تا در راه کسب علم و معرفت گامی در رسیدن به کمال بی انتهایش بردارم.

به پاس احترام به حرمت دانش، از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم

جناب آقای دکتر صادقی

که نظارت این تحقیق را بر عهده داشته و در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از استاد گرانقدر **سرکا ر خانم طیبه لعل شاطری** که زحمت مشاوره این رساله را تقبل کردند، صمیمانه سپاسگزارم.

همچنین از همسر مهربانم که در تمام مراحل مرا تشویق نموده و موجبات آسایشم را در انجام تحقیق فراهم نموده نهایت سپاسگزاری را دارم.

همچنین از **جناب آقای دکتر اسحاقی گرجی** که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم و سلامتی ایشان را از خدای متعال خواهانم.

الهام مرادی

چکیده

نام خانوادگی : مرادی **نام :** الهام	
عنوان پایان نامه : پایداری معادلات تابعی و سایه زدن	
استاد راهنما : دکتر قدیر صادقی **استاد مشاور:** دکتر طیبه لعل شاطری	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** آنالیز **محل تحصیل:** دانشگاه حکیم سبزواری **دانشکده:** ریاضی و علوم کامپیوتر **تاریخ فارغ التحصیلی:** تیر ماه ۱۳۹۱ **تعداد صفحه:** ۸۴	
واژه‌های کلیدی: معادلات تابعی کوشی، پایداری، گروه متریک، گروه وار های مربعی متقارن، سایه زدن	

چکیده: در این پایان نامه، ابتدا نتایج پایداری را در گروه های متریک اثبات می کنیم سپس به بررسی نتایج سایه زدن برای نگاشت های غیر پوشا می پردازیم یعنی پایداری معادلات تابعی کوشی در مواردی که فضای هدف دارای مضرب ۲ است باید یک به یک باشد. در نهایت با به کار گیری قضیه نقطه ثابت پایداری معادلات تابعی در فضاهای متریک و فرا متریک را مطالعه می کنیم.

پیشگفتار

معادلات تابعی [۱] معادلاتی هستندکه مجهول در آنها به شکل تابع است. مشهورترین معادلات تابعی معادله تابعی کوشی یعنی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ است که یکی از توابع صادق در این معادله، $f(x)=x$ است.

سئوالی که در این جا مطرح است که، اگر تابعی تقریبا در یک معادله تابعی صدق کند، آیا به یک جواب آن معادله تابعی نزدیک است.

این سئوال را اولین بار اولام [۲] [۴۲] در سال ۱۹۴۰ مطرح کرد در سال بعد هایرز [۳] [۲۱] یک جواب مثبت به سئوال اولام در زمینه فضاهای باناخ ارائه داد، و در سال ۱۹۷۸ راسیاس [۴] [۴۱] قضیه هایرز را به صورت زیر تعمیم داد.

فرض کنید E ، F فضاهای نرم دار حقیقی و F کامل باشد و $f: E \longrightarrow F$ نگاشتی باشد به طوری که برای هر $x \in E$ ، نگاشت $t \longrightarrow f(tx)$ روی R پیوسته و $p \in [0,1)$ و $\epsilon > 0$ طوری وجود داشته باشند که:

$$\| f(x+y)-f(x)-f(y) \| \leq \epsilon \,(\| x \|^p + \| y \|^p) \qquad (x,y \in E)$$

آن گاه نگاشت خطی منحصر به فرد $T: E \longrightarrow F$ موجود است به طوری که:

[۱] Functional equation
[۲] Ulam
[۳] Hyers
[۴] Rassias

$$\| f(x+y) - T(x) \| \leq \frac{\epsilon \| x \|^p}{1-2^{p-1}} \qquad (x \in E)$$

این قضیه درستی قضیه اولام را در حالت $p = 0$ نشان داد. در سال ۱۹۹۰ راسیاساین سئوال را مطرح کرد آیا می توان قضیه را برای $p \geq 1$ اثبات نمود. در سال ۱۹۹۱ گجدا [۵] و راسیاس و شمر [۶] برای حالت $p > 1$ راه حل مثبتی ارائه نمودند اما هیچ یک نتوانستند برای حالت $p = 1$ اثباتی ارائه نمایند.

این رساله در سه فصل تنظیم شده است. فصل اول شامل پنج بخش است. در بخش اول پایداری معادلات تابعی در فضاهای باناخ را مورد بررسی قرار می دهیم. که برگرفته از مقاله

Th. M. Rassias, On the stability of linear mappings in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 72(1978),297-300.

است. در چهار بخش دیگر پایداری معادلات تابعی همگن، معادلات تابعی درجه دوم، معادلات تابعی خطی را مطرح می کنیم که برگرفته از مقاله

J. Tabor and J. Tabor, Gneral stability of functional equations of linear type, J. Math. Anal. Appl. 328(2007),192-200.

است. فصل دوم در سه بخش تنظیم گردیده است که در آن با تعریف گروه وار ها، پایداری معادلات تابعی کوشی در گروه وارها را اثبات می کنیم. که این فصل برگرفته از مقاله

J. Tabor and J. Tabor : Restricted stability and shadowing. Publ. Math. Debrecen. Ref. no: 3943(2008), 1-10.

است. فصل آخر شامل سه بخش است که در بخش اول و دوم پایداری معادلات تابعی تعمیم

[۵] Gajda
[۶] Semrl

یافته در فضاهای متریک که برگرفته از مقاله

G. L . Forti, comments on the core of the direct method for proving Hyers-Ulam stability of functional equations, J. Math. Anal. Appl. 295(2004), 127-133.

است و در بخش سوم پایداری معادلات تابعی در فضاهای فرا متریک را که برگرفته از مقاله

F. Rahbarnia, Th. M. Rassias, R. Saadati and Gh. Sadeghi, Fortys approach in fixed point theory and the stability of a functional equation on metric and ultra metric spaces, Jurnal of Computational analysis and applications, vol. 13, No. 3, 458-462, (2011)

بیان و اثبات می کنیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار ب

۱ پایداری معادلات تابعی خطی و غیر خطی ۱

۱.۱ پایداری نگاشت های خطی در فضاهای باناخ ۲

۲.۱ پایداری نگاشت های منبسط موضعی ۸

۳.۱ پایداری معادلات تابعی همگن ۱۴

۴.۱ پایداری معادلات تابعی خطی ۲۰

۵.۱ پایداری معادلات تابعی درجه دوم ۲۴

۲ پایداری و سایه زدن ۲۹

۱.۲ پایداری معادلات تابعی کوشی ۲۹

۲.۲ پایداری محدود و سایه زدن ۳۶

۳.۲ پایداری معادلات تابعی کوشی در گروه وارها ۴۲

۳ پایداری معادلات تابعی روی فضاهای متریک ۴۹

۱.۳ پایداری معادلات تابعی تعمیم یافته در فضاهای متریک ۴۹

۲.۳ پایداری معادلات تابعی در فضاهای متریک با رویکرد قضیه نقطه ثابت . . . ۵۷
۳.۳ پایداری معادلات تابعی در فضاهای فرا متریک ۶۲

مراجع **۶۶**

آ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۷۱**

فصل ۱
پایداری معادلات تابعی خطی و غیر خطی

در واقع سوالی که در این فصل مطرح است این است که، اگر تابعی تقریبا در یک معادله تابعی صدق کند، آیا به یک جواب آن معادله تابعی نزدیک است. مثبت بودن پاسخ این سوال به معنی پایدار بودن معادله تابعی است.

در این فصل مسئله الام، که مرتبط با پایداری هومورفیسم ها در گروه های متریک می باشد را بیان می کنیم. همچنین در ادامه پایداری معادلات تابعی خطی، پایداری معادلات تابعی همگن و پایداری معادلات تابعی درجه دوم را بررسی می کنیم.

مسئله: فرض کنید $(G,+)$ یک گروه و $(X,+)$ یک گروه متریک[۱] باشد. آیا برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر نگاشت $f : G \to X$ که در رابطه

$$d(f(x+y), f(x)+f(y)) < \delta \qquad (x, y \in G) \tag{۱.۱}$$

[۱] Metric group

صدق می کند، در این صورت همومورفیسمی مانند $a : G \to X$ موجود است به طوری که برای هر $x \in G$ داشته باشیم

$$d(f(x), a(x)) < \epsilon. \tag{۲.۱}$$

۱.۱ پایداری نگاشت های خطی در فضاهای باناخ

در این بخش پایداری نگاشت های خطی در فضاهای باناخ [۲] را بیان می کنیم.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنید E_1 و E_2 دو فضای باناخ باشند. و نگاشت $f : E_1 \to E_2$ را چنان فرض کنید که برای هر ثابت $x \in E_1$ تابع $f(tx)$ در t پیوسته و $\theta \geq 0$ باشد. حال اگر $p < 1$ موجود باشد به طوری که

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y) \| \leq \theta(\| x \|^p + \| y \|^p) \qquad (x, y \in E_1) \tag{۳.۱}$$

آن گاه نگاشت خطی منحصر به فرد $T : E_1 \to E_2$ وجود دارد به طوری که

$$\| f(x) - T(x) \| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \| x \|^p \qquad (x \in E_1). \tag{۴.۱}$$

برهان. ابتدا ثابت می کنیم برای هر عدد صحیح n و $\theta \geq 0$ نامساوی زیر برقرار است

[۲] Banach space

$$\| \frac{[f(2^n x)]}{2^n} - f(x) \| \leq \theta \| x \|^p \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)} \qquad (۵.۱)$$

با استقرا روی n ، رابطه (۵.۱) را برای $n \in \mathbb{N}$ ثابت می کنیم. اگر در رابطه (۳.۱) قرار دهیم $x = y$ داریم که

$$\| \frac{[f(2x)]}{2} - f(x) \| \leq \theta \| x \|^p . \qquad (۶.۱)$$

با فرض اینکه رابطه (۵.۱) برای حالت n برقرار است رابطه را برای حالت $n+1$ ثابت می کنیم. با جایگذاری $2x$ به جای x در رابطه (۵.۱)، نا مساوی زیر به دست می آید

$$\| \frac{[f(2^n 2x)]}{2^n} - f(2x) \| \leq \theta \| 2x \|^p \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m(p-1)}.$$

با تقسیم رابطه فوق بر ۲ داریم

$$\| \frac{[f(2^{n+1} x)]}{2^n} - \frac{1}{2} f(2x) \| \leq \theta \| x \|^p \sum_{m=1}^{n} 2^{m(p-1)}.$$

اکنون با استفاده از نامساوی مثلث نامساوی های زیر حاصل می شوند

$$\begin{aligned}\| \tfrac{1}{2^{n+1}} \left[f(2^{n+1}x)\right]-f(x) \| &\leq \| \tfrac{1}{2^{n+1}} \left[f(2^{n+1}x)\right]-\tfrac{1}{2}f(2x) \| \\ &+\tfrac{1}{2}\left[f(2x)\right]-f(x) \| \\ &\leq \theta \| x \|^p \textstyle\sum_{m=1}^{n} 2^{m(p-1)} + \theta \| x \|^p \\ &= \theta \| x \|^p \textstyle\sum_{m=0}^{n} 2^{m(p-1)}\end{aligned}$$

رابطه (۵.۱) برای هر عدد صحیح n برقرار است. از طرفی چون $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(p-1)}$ به ازای $p \in [0,1)$ به $\frac{2}{2-2^p}$ همگراست، بنابراین داریم

$$\| \frac{[f(2^n x)]}{2^n} - f(x) \| \leq \| x \|^p \frac{2\theta}{2-2^p} \qquad (x, y \in E_1) \tag{۷.۱}$$

اکنون فرض می کنیم $m > n > 0$ باشد، در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\| \tfrac{1}{2^m} \left[f(2^m x)\right]-\tfrac{1}{2^n}\left[f(2^n x)\right]\| &= \tfrac{1}{2^n} \| \tfrac{1}{2^{m-n}}\left[f(2^m x)\right]-\left[f(2^n x)\right] \\ &= \tfrac{1}{2^n} \| \tfrac{1}{2^{m-n}} f(2^{m-n}2^n x) - \left[f(2^n x)\right]\| \\ &< 2^{-n}\tfrac{2\theta}{2-2^p} \| 2^n x \|^p \\ &= 2^{n(p-1)}\tfrac{2\theta}{2-2^p} \| x \|^p\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \| \tfrac{1}{2^m} \left[f(2^m x)\right]-\tfrac{1}{2^n}\left[f(2^n x)\right]\|= 0.$$

از طرفی چون E_2 فضای باناخ است، بنابراین دنباله $\{\frac{[f(2^n x)]}{2^n}\}$ برای هر $x \in E_1$ همگراست.
اکنون تابع T را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$T(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left[f(2^n x)\right]$$

با جایگذاری $2^n x$ و $2^n y$ به جای x و y در رابطه (۳.۱) داریم

$$\| f\left[2^n(x+y)\right] - f\left[2^n x\right] - f\left[2^n y\right] \| \leq \theta(\| 2^n x \|^p + \| 2^n y \|^p) = 2^{np}\theta(\| x \|^p + \| y \|^p) \qquad (۸.۱)$$

از تقسیم رابطه (۸.۱) بر 2^n داریم

$$\frac{1}{2^n} \| f\left[2^n(x+y)\right] - f\left[2^n x\right] - f\left[2^n y\right] \| \leq 2^{n(p-1)}\theta(\| x \|^p + \| y \|^p)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \| f\left[2^n(x+y)\right] - f\left[2^n x\right] - f\left[2^n y\right] \| \leq \lim_{n\to\infty} 2^{n(p-1)}\theta(\| x \|^p + \| y \|^p)$$

$$\| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} f\left[2^n(x+y)\right] - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} f\left[2^n x\right] - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} f\left[2^n y\right] \| = 0$$

$$\Longrightarrow T(x+y) = T(x) + T(y)$$

بنابراین تابع T به ازای هر $x, y \in E_1$ یک تابع جمعی است. حال ثابت می کنیم برای هر عدد گویای $r = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$

$$T(rx) = rT(x)$$

می دانیم

$$T(x) = T(\tfrac{n}{n}x) = nT(\tfrac{x}{n}) \Longrightarrow T(\tfrac{x}{n}) = \tfrac{1}{n}T(x)$$

چون T یک تابع جمعی است. بنابراین داریم

$$T(\tfrac{mx}{n}) = mT(\tfrac{x}{n}) = \tfrac{m}{n}T(x)$$

حال $x_0 \in E_1, \rho \in E_2^*$ را ثابت در نظر می گیریم و تابع $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم

$$\Phi(t) = \rho\left[T(tx_0)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho[f(2^n tx)}{2^n}$$

که $t \to f(tx)$ تابعی پیوسته و ρ عملگر کرانداری است، بنابراین $\frac{\rho[f(2^n tx)]}{2^n}$ پیوسته است، لذا $(\frac{\rho[f(2^n tx)]}{2^n})$ دنباله ای از توابع پیوسته است که $\Phi(t)$ حد نقطه ای از دنباله این توابع است در نتیجه اندازه پذیر است. حال نشان می دهیم که نگاشت Φ خاصیت جمعی دارد

$$\begin{aligned}
\Phi(t+s) &= \rho(T(t+s)x_0) \\
&= \rho(T(tx_0) + T(sx_0)) \\
&= \rho(T(tx_0)) + \rho(T(sx_0)) \\
&= \Phi(t) + \Phi(s)
\end{aligned}$$

بنابراین Φ جمعی است در نتیجه تابع جمعی Φ پیوسته است. حال اگر $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع اندازه پذیر باشد و خاصیت جمعی داشته باشد آ ن گاه Φ پیوسته است و این موضوع زمانی که $\mathbb{R}^n$ را با هر گروه آبلی فشرده و جدایی پذیر عوض کنیم برقرار است. در ادامه فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و $a = \lim_{n\to\infty} r_n$

و $\{r_n\}$ دنباله ای از اعداد گویا باشد در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\Phi(at) &= \Phi(\lim_{n\to\infty} r_n t) \\ &= \Phi(t \lim_{n\to\infty} r_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi(t r_n) \\ &= (\lim_{n\to\infty} r_n)\Phi(t)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Phi(at) = a\Phi(t)$$

بنابر این:

$$T(ax) = aT(x) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

در نتیجه T یک نگاشت خطی است. حال با استفاده از رابطه (۷.۱) رابطه (۴.۱) حاصل می شود

$$\lim_{n\to\infty} \| \tfrac{1}{2^n} f\left[2^n x\right] - f(x) \| \leq \| x \|^p \lim_{n\to\infty} \tfrac{2\theta}{2-2^p}$$

$$\Longrightarrow \| T(x) - f(x) \| \leq \| x \|^p \frac{2\theta}{2-2^p} \qquad (۹.۱)$$

حال برای اثبات منحصر بودن T نگاشت $g : E_1 \to E_2$ را چنان فرض کنید که برای هر $x \in E_1$ ، $T(x) \neq g(x)$. و $\epsilon \geq 0$ و $q \in [0, 1)$ وجود داشته باشند به طوری که $\| g(x) - f(x) \| \leq \| x \|^p \epsilon_1$ برقرار باشد. در این صورت با استفاده از نامساوی مثلثی داریم

$$\begin{aligned}\| T(x) - g(x) \| &\leq \| T(x) - f(x) \| + \| f(x) - g(x) \| \\ &\leq \epsilon \| x \|^p + \epsilon_1 \| x \|^q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| T(x) - g(x) \| &= \| \tfrac{1}{n}T(nx) - \tfrac{1}{n}g(nx) \| \\ &\leq \tfrac{1}{n}\,[\epsilon \| nx \|^p + \epsilon_1 \| nx \|^q\,] \\ &= n^{p-1}\epsilon \| nx \|^p + n^{q-1}\epsilon_1 \| nx \|^p \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$\lim_{n\to\infty} \| T(x) - q(x) \| = 0 \Longrightarrow T(x) = q(x)$

$\square$

۲.۱ پایداری نگاشت های منبسط موضعی

در این بخش ابتدا نگاشت های منبسط موضعی را تعریف می کنیم سپس پایداری نگاشت های منبسط موضعی را بیان و اثبات می کنیم.

در ادامه این فصل (X, d) را یک فضای متریک کامل در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $\delta > 0$ و $\Phi : X \to X$ داده شده باشند. دنباله $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ یک δ–شبه مدار برای Φ است اگر نا مساوی زیر برقرار باشد

$$d(x_{k+1}, \Phi(x_k)) \leq \delta \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

هر 0– شبه مدار یک مدار نامیده می شود. دنباله $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ یک مدار نامیده می شود اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $r, R > 0$ ، در این صورت نگاشت $\Phi : X \to X$ یک $(r, R)-$ معکوس پذیر موضعی در $x_0 \in X$ است اگر برای هر $y \in B(\Phi(x_0), R)$ عضو منحصر به فردی مانند $x \in B(x_0, r)$ موجود باشد به طوری که $y = \Phi(x)$.

اگر نگاشت Φ در هر $x_0 \in X$ ، $(r, R)-$ معکوس پذیر موضعی باشد آنگاه نگاشت Φ ، $(r, R)-$ معکوس پذیر موضعی است و همچنین اگر نگاشت Φ در هر $x \in X$، $(r, R)-$ معکوس پذیر موضعی باشد، آنگاه

$$\Phi_{x_0}^{-1} : B(\Phi(x_0), R) \to B(x_0, r)$$

تابعی است که هر $y \in B(\Phi(x_0), R)$ را به یک $x \in X$ منحصر به فردی که در رابطه $y = \Phi(x)$ صدق می کند می نگارد.

علاوه بر این $lip_R\Phi^{-1}$ ثابت لیپ شوتز از Φ^{-1} است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$lip_R\Phi^{-1} \equiv \sup_{x_0 \in X} lip(\Phi_{x_0}^{-1}).$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $A \subseteq X$ ، نگاشت Φ یک $(r, R)-$ معکوس پذیر موضعی روی A است اگر برای هر $x_0 \in A$ ، نگاشت Φ یک $(r, R)-$ معکوس پذیر موضعی باشد. بنابر این اگر نگاشت Φ یک $(r, R)-$ معکوس پذیر موضعی روی A باشد آن گاه داریم

$$lip_R(\Phi^{-1}, A) \equiv \sup_{a \in A} lip_R(\Phi^{-1}).$$

همچنین Φ را یک نگاشت مبسوط موضعی روی مجموعه A می نامیم اگر برای $R > 0$ داشته باشیم

$$lip_R(\Phi^{-1}, A) < 1.$$

برای دنباله های $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y=(y_n)_{n\mathbb{N}}\subset X$ متریک $d_{\sup}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$d_{\sup}(x,y):=\sup_{n\in\mathbb{N}} d(x_n,y_n).$$

گزاره ۴.۲.۱. فرض کنید $l\in(0,1)$ ، $R\in(0,\infty)$. و X یک فضای متریک کامل باشدبرای $x\in X$ثابت می کنیم $\chi=\{y\subset X; d_{\sup}(x,y)\le lR\}$ یک فضای متریک کامل است.

برهان. فرض کنید $\{Z_n\}$ یک دنباله کشی در χ باشد. یعنی:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} \quad s.t \quad \forall n,m>n_0 \qquad d_{\sup}(Z_n,Z_m)<\epsilon \tag{۱۰.۱}$$

یعنی داریم

$$Z_1\in\chi\longrightarrow Z_1: z_{11},z_{12},\cdots,z_{1i},\cdots,z_{1n}$$

$$Z_2\in\chi\longrightarrow Z_2: z_{21},z_{22},\cdots,z_{2i},\cdots,z_{2n}$$

$$Z_3\in\chi\longrightarrow Z_2: z_{31},z_{32},\cdots,z_{3i},\cdots,z_{3n}$$

$$\vdots$$

$$Z_n\in\chi\longrightarrow Z_n: z_{n1},z_{n2},\cdots,z_{ni},\cdots,z_{nn}$$

$$\Longrightarrow\forall n,m>n_0 \qquad \sup_{i\in\mathbb{N}}(d(z_{ni},z_{mi}))<\epsilon\longrightarrow d(z_{ni},z_{mi})<\epsilon \qquad (i\in\mathbb{N})$$

حال چون $\{z_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ برای هر $i\in\mathbb{N}$ یک دنباله کوشی در فضای متریک کامل χ است بنابراین $z_i\in\chi$ موجود است به طوری که:

$$z_{ni}\longrightarrow z_i$$

اگر $z = z_i$ قرار دهیم آن گاه $z_n \longrightarrow z$.

به علاوه نشان می دهیم $z \in \chi$.

$$d_{\sup}(x,z) \leq d_{\sup}(x,z_n) + d_{\sup}(z_n,z) \leq lR \Longrightarrow z \in \chi.$$

$\square$

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید X یک فضای متریک کامل، $A \subset U \subset X$ ، $l \in (0,1)$، $R \in (0,\infty)$ ، و $\Phi : U \to X$ یک $(lR,R)-$ معکوس پذیر موضعی روی مجموعه A باشد به طوری که:

$$lip_R(\Phi^{-1}, A) \leq lR.$$

اگر دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک $\delta-$ شبه مدار دلخواه در A که $\delta \leq (1-l)R$ باشد آن گاه مدار منحصر به فرد مانند $y \in U$ موجود است به طوری که

$$d_{\sup}(x,y) \leq lR$$

$$d_{\sup}(x,y) \leq \frac{l\delta}{1-l}.$$

برهان. بنا بر گزاره (۵.۱) مجموعه χ یک فضای متریک کامل و دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک $\delta-$ شبه مدار است. لذا داریم

$$d(x_{n+1}, \Phi(x_n)) \leq \delta \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

حال نگاشت $p : \chi \longrightarrow \chi$ با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$(p_y)_n \equiv \Phi_{x_n}^{-1}(y_{n+1}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$