بسم الله الرحمن الرحیم

هست کلید در گنج حکیم

تو مگو ما را بر آن شه بار نیست
با کـریمان کارها دشـوار نیـست

حضرت مولانا

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بازی شلیک چیپ و b–رنگ آمیزی گراف‌ها

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

رامین جوادی جورتانی

استاد راهنما

دکتر بهناز عمومی

۱۳۸۶

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای رامین جوادی جورتانی

تحت عنوان

بازی شلیک چیپ و b–رنگ آمیزی گراف‌ها

در تاریخ ۸٦/٦/۳۱ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ – استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر بهناز عمومی
۲ – استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر سید عباداله محمودیان
۳ – استاد داور ۱	دکتر غلامرضا امیدی
۴ – استاد داور ۲	دکتر بیژن طائری

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر رسول نصر اصفهانی

تقدیم به:

عالی‌ترین معنای واژه ایثار و بهترین همدم تنهاییم، **مادرم**

و

صبورترین استاد و بهترین دوستم، **دکتر بهناز عمومی.**

فهرست مطالب

چکیده:

این پایان‌نامه از دو قسمت تشکیل شده است. در قسمت اول به بررسی یک بازی یا فرایند روی یک گراف به نام بازی شلیک چیپ می‌پردازیم. بازی شلیک چیپ یک بازی یک نفره یا یک فرایند انتشار روی یک گراف است. با وجودی که از تعریف این بازی بیش از ۲۰ سال نمی‌گذرد اما روابط جالبی که بین این فرایند و بسیاری از مفاهیم مهم مانند گشت‌های تصادفی، ماتریس لاپلاسین، چندجمله‌ای تات، چندجمله‌ای رنگی، نظریه جبری گراف، نظریه گروه‌ها و هم‌چنین فیزیک نظری وجود دارد، آن را به یک موضوع مهم و جذاب در ترکیبیات بدل کرده است. تاکنون نسخه‌های گوناگونی از این بازی تعریف و ویژگی‌های آن تحلیل شده است. در این قسمت بازی شلیک چیپ روی گراف‌های غیرجهت‌دار و جهت‌دار، هم‌چنین نسخه تغییر یافته‌ای از این بازی به نام بازی دلار را مورد تحلیل و بررسی جامع قرار می‌دهیم.

قسمت دوم این پایان‌نامه به پاسخ به برخی از سوالات باز در زمینه یک نوع رنگ‌آمیزی راسی روی گراف‌ها به نام $b-$رنگ‌آمیزی اختصاص یافته است. در این قسمت $b-$رنگ‌آمیزی حاصل‌ضرب دکارتی مسیرها، دورها و گراف‌های کامل و هم‌چنین گراف‌های کنسر را مطالعه می‌کنیم.

مقدمه

یکی از موضوعات جالب تحقیقاتی در ترکیبیات، تعریف بازی‌های مختلف روی یک گراف و بررسی خواص آن است. اولین بازی روی گراف‌ها توسط گراندی تعریف شد [۱۹] و تاکنون انواع متنوعی از بازی مانند بازی رنگ‌آمیزی[۴۱]، بازی احاطه‌گری[۱]، بازی رمزی[۳] و ... مورد مطالعه قرار گرفته است.

یکی از این بازی‌ها، یک بازی یک نفره یا یک فرایند انتشار روی یک گراف است که بازی شلیک چیپ خوانده می‌شود. اولین نسخه از این بازی توسط بورنر و دیگران [۸] معرفی شد. پس از آن نسخه‌های مختلفی از این بازی تعریف و خواص آن‌ها بررسی شده است. ویژگی مهم بازی شلیک چیپ، روابط جالبی است که بین این فرایند و بسیاری از مفاهیم مهم ترکیبیات مانند گشت‌های تصادفی، ماتریس لاپلاسین، چندجمله‌ای تات و چندجمله‌ای رنگی و هم‌چنین نظریه جبری گراف، نظریه گروه‌ها و حتی فیزیک نظری وجود دارد. قسمت اول این پایان‌نامه به مطالعه این بازی اختصاص داده شده است.

نسخه اولیه این بازی روی یک گراف غیر جهت‌دار اجرا می‌شود. یک گراف غیر جهت‌دار $G = (V, E)$ داده شده (یال چندگانه و طوقه مجاز است) و روی هر راس گراف تعدادی چیپ قرار گرفته است. شکل اولیه توزیع چیپ‌ها روی راس‌های گراف، آرایش شروع گفته شده و یک راس در یک آرایش را آماده می‌گویند هرگاه در این آرایش حداقل به تعداد درجه خود چیپ داشته باشد. بازی شلیک چیپ روی گراف G به این‌صورت انجام می‌شود که در هر آرایش یک راس آماده انتخاب و شلیک می‌شود. پس از شلیک یک راس، از هر یال واقع بر آن، یک چیپ به همسایه مجاور می‌رود. اگر در یک وضعیت، راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، بازی پایان می‌پذیرد. شلیک یک راس ممکن است یک راس ناآماده را آماده کند. در مرحله بعد بار دیگر یک راس آماده، انتخاب و شلیک می‌شود. وقتی که هیچ راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، بازی تمام می‌شود. شکل توزیع چیپ‌ها در پایان را آرایش پایانی می‌نامند. در فصل ۱ به بررسی بازی شلیک چیپ روی گراف‌های غیرجهت‌دار و مطالعه ویژگی‌های آن می‌پردازیم.

می‌توان با اندکی تغییر این بازی را روی یک گراف جهت‌دار اجرا کرد. این نسخه توسط بورنر و دیگران [۷] بررسی شد. در فصل ۲، تعمیم فرایند شلیک چیپ به گراف‌های جهت‌دار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این

فصل به سوالاتی در مورد پایان‌پذیری بازی، طول بازی و نقش ترتیب انتخاب راس‌ها می‌پردازیم. هم‌چنین ارتباط این بازی را با ماتریس لاپلاسین گراف‌های جهت‌دار و گشت‌های تصادفی روی گراف‌های جهت‌دار روشن می‌کنیم که ما را به سمت روابطی در مورد طول یک بازی متناهی و دوره تناوب یک بازی نامتناهی رهنمون می‌سازد.

اولین بار بیگز [۴] یک نسخه تغییر یافته از این بازی را معرفی کرد. این بازی روی گراف غیر جهت‌دار همبند $G = (V, E)$ اجرا می‌شود که یک راس خاص $q \in V$ مشخص شده و تعدادی چیپ روی راس‌های دیگر غیر از q توزیع شده است. در هر نوبت می‌توانیم یک راس آماده غیر از q (راسی که حداقل به تعداد درجه‌اش چیپ دارد) را شلیک کنیم. بازی تا جایی ادامه پیدا می‌کند که هیچ راس آماده‌ای غیر از q وجود نداشته باشد. در این حالت راس q شلیک می‌شود و بازی ادامه پیدا می‌کند. بنابراین راس q می‌تواند شلیک کند اگر و تنها اگر هیچ راس آماده‌ای غیر از q وجود نداشته باشد. وجود راس q تضمین می‌کند که بازی هیچ‌گاه پایان نپذیرد. در واقع می‌توانیم به جای چیپ‌ها با دلارها بازی کنیم و بازی را به عنوان یک "اقتصاد" و راس q را به عنوان "دولت" در نظر بگیریم. اقتصاد حرکت می‌کند و هرجا که به بن‌بست رسید دولت مقداری دلار به آن تزریق می‌کند و دوباره حرکت ادامه پیدا می‌کند. به همین دلیل این بازی به بازی دلار معروف است. در فصل ۳، این بازی را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که به کمک این بازی می‌توانیم یک گروه آبلی به هر گراف نسبت دهیم که گروه بحرانی نام دارد. در واقع خواهیم دید که مرتبه این گروه برابر تعداد درخت‌های فراگیر گراف G است. به کمک قضیه اساسی گروه‌های آبلی، ساختار این گروه را بررسی کرده و به ارتباط آن با چندجمله‌ای تات می‌پردازیم.

قسمت دوم این پایان‌نامه به پاسخ به برخی از سوالات باز در زمینه یک نوع رنگ‌آمیزی راسی روی گراف‌ها به نام b–رنگ‌آمیزی اختصاص یافته است. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. یک b–رنگ‌آمیزی از گراف G با k رنگ، یک رنگ‌آمیزی معتبر از راس‌های G با k رنگ است به طوری که در هر کلاس رنگی i یک راس x_i وجود دارد که در همه $k - ۱$ کلاس رنگی دیگر همسایه دارد. راس x_i را یک راس b–احاطه‌گر و مجموعه $\{x_۱, x_۲, \dots, x_k\}$ را یک سیستم b–احاطه‌گر می‌نامیم. بزرگترین عدد k که G دارای یک b–رنگ‌آمیزی با k رنگ است را عدد b–رنگی گراف G گفته و با $\varphi(G)$، نشان می‌دهیم. مفهوم b–رنگ‌آمیزی اولین بار توسط ایروینگ و منلاو [۲۳] معرفی شده است. در فصل ۴ به مطالعه b–رنگ‌آمیزی حاصل‌ضرب دکارتی گراف کامل و هر گراف دلخواه G و به طور خاص دورها، مسیرها و گراف کامل می‌پردازیم.

گراف G، b–پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر عدد صحیح k، $\chi(G) \leq k \leq \varphi(G)$ یک b–رنگ‌آمیزی برای G با k رنگ وجود داشته باشد. فرض کنید k و n دو عدد طبیعی هستند که $۲k < n$. برای مجموعه T از اندازه n، V را مجموعه همه زیرمجموعه‌های k عضوی S در نظر بگیرید. گراف کنسر با پارامترهای n و k که با $K(n, k)$ نشان داده می‌شود گرافی با مجموعه راس‌های V است به طوری که دو راس مجاورند اگر و تنها اگر زیر مجموعه‌های متناظر آن‌ها مجزا باشند. گراف‌های کنسر از دیدگاه‌های مختلف مورد مطالعه بوده است. در

فصل آخر ضمن بررسی $b-$رنگ آمیزی گراف‌های کنسر و محاسبه عدد $b-$رنگی این گراف‌ها برای پارامترهای خاص، ثابت می‌کنیم گراف کنسر $K(n,k)$ با پارامترهای $k = ۲$ و $n \geq ۱۶$، $b-$پیوسته است.

قسمت اول

بازی شلیک چیپ

فصل ۱

شلیک چیپ روی گراف‌های غیر جهت‌دار

در این فصل قصد داریم یک بازی یک نفره یا یک فرایند را روی گراف‌های غیر جهت‌دار معرفی و بررسی کنیم. این بازی اولین بار توسط بورنر و دیگران [۸] معرفی شد. یک گراف غیر جهت‌دار $G = (V, E)$ داده شده (یال چندگانه و طوقه مجاز است) و روی هر راس گراف تعدادی چیپ قرار گرفته است. شکل اولیه توزیع چیپ‌ها روی راس‌های گراف را آرایش شروع می‌گوییم. بازی شلیک چیپ روی گراف G به این‌صورت انجام می‌شود. در آرایش موجود یک راس را آماده گوییم هرگاه تعداد چیپ‌های روی آن راس حداقل به اندازه درجه آن راس باشد. در ابتدا یک راس آماده را انتخاب کرده و آن را شلیک می‌کنیم. وقتی یک راس آماده $k \in V$ شلیک می‌شود، از طریق هر یال روی v، یک چیپ به راس مجاور k منتقل می‌شود. شلیک یک راس ممکن است یک راس ناآماده را آماده کند. در مرحله بعد بار دیگر یک راس آماده انتخاب و شلیک می‌شود. وقتی که هیچ راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، بازی تمام می‌شود. شکل توزیع چیپ‌ها در پایان را آرایش پایانی می‌گوییم.

متعاقب تعریف این بازی دو سوال به طور طبیعی مطرح می‌شود. یکی این‌که در چه مواردی بازی بعد از تعداد متناهی حرکت تمام می‌شود و چه موقع بازی نامتناهی است؟ از طرف دیگر ممکن است در یک آرایش چند راس آماده وجود داشته باشد و بنابراین حرکت‌های مختلفی از آن آرایش قابل انجام است. از این رو سوال دوم این است که آیا متناهی بودن بازی و آرایش پایانی به حرکت‌های بازی و ترتیب راس‌های شلیک شده وابسته است یا این‌که تنها به آرایش شروع بستگی دارد؟ در این فصل پس از تعریف دقیق بازی شلیک چیپ به کمک نظریه گریدویدها ثابت می‌کنیم که متناهی بودن بازی و آرایش پایانی از حرکت‌های انجام شده مستقل

است و تنها به آرایش شروع بستگی دارد. سپس پایان‌پذیری بازی را بر اساس تعداد کل چیپ‌های روی راس‌ها بررسی کرده و در صورت پایان‌پذیر بودن بازی، کرانی برای طول بازی ارایه می‌کنیم.

۱—۱ تعاریف و مقدمات

ابتدا اجازه دهید تعریف بازی شلیک چیپ را به صورت دقیق‌تر و با نمادهای ریاضی بیان کنیم. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف غیر جهت‌دار باشد که راس‌های آن را با اعداد ۱، ۲، $n, \ldots$ برچسب‌گذاری کرده‌ایم. برای راس $k \in V$ تعداد یال‌های غیرطوقه روی k را با $\mathrm{exdeg}(k)$ و دو برابر تعداد طوقه‌های روی k را با $\mathrm{indeg}(k)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین درجه راس k را به صورت $\deg(k) = \mathrm{exdeg}(k) + \mathrm{indeg}(k)$ تعریف کرده و تعداد یال‌هایی که دو راس $i, j \in V$ را به هم وصل می‌کند با $d_{i,j}$ نشان می‌دهیم.

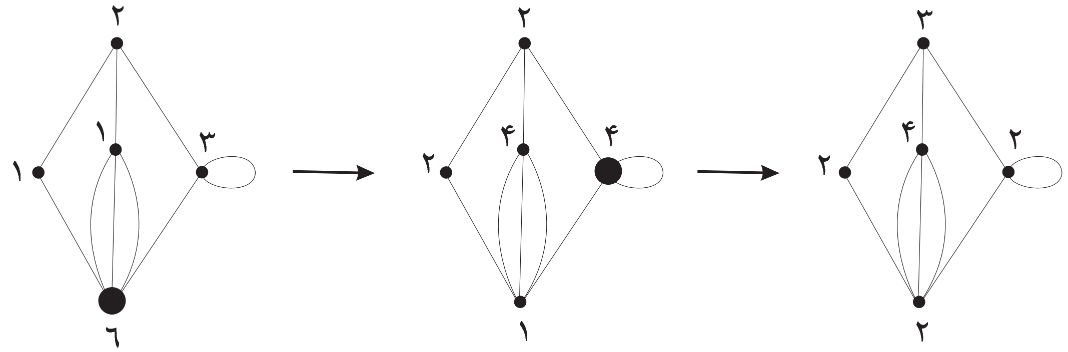
تعریف ۱—۱—۱ [۳۳] منظور از یک **آرایش** روی گراف $G = (V, E)$، یک تابع $\theta : V \to \mathbb{Z}$ است که برای هر $k \in V$، $\theta(k) \geq ۰$. در واقع $\theta(k)$ تعداد **چیپ‌های** روی راس k را نشان می‌دهد. در یک آرایش θ روی گراف غیر جهت‌دار G، راس k را **آماده** گوییم هرگاه $\theta(k) \geq \deg(k)$.

در یک حرکت می‌توانیم یک راس آماده در آرایش موجود را **شلیک** کنیم. پس از شلیک راس آماده $i \in V$، از چیپ‌های روی راس i به تعداد $\mathrm{exdeg}(i)$ کم شده و به هر راس $j \neq i$ به اندازه $d_{i,j}$ اضافه می‌شود. بنابراین آرایش θ به آرایش θ' تبدیل می‌شود
که θ' به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\theta'(j) = \begin{cases} \theta(j) + d_{i,j} & i \neq j, \\ \theta(i) - \mathrm{exdeg}(i) & i = j. \end{cases}$$

توجه کنید که اگر روی راس i یک طوقه وجود داشته باشد، آن‌گاه با شلیک راس i دو چیپ بر روی این طوقه حرکت می‌کنند و به راس i باز می‌گردند. بنابراین طوقه‌ها تاثیری در توزیع مجدد چیپ‌ها ندارند و تنها اثر آن‌ها در آماده بودن یا نبودن یک راس است. در شکل ۱—۱ آرایش شروع و دو حرکت متوالی در یک گراف نشان داده شده است. عدد کنار هر راس تعداد چیپ‌های روی آن راس را نشان می‌دهد و در هر آرایش، راسی که قرار است شلیک شود بزرگتر نشان داده شده است.

تعریف ۱—۱—۲ [۳۳] یک **دنباله قانونی** σ برای آرایش شروع $\theta = \theta_۰$، یک دنباله از راس‌های $(k_۰, k_۱, \ldots, k_{n-۱})$ است که برای هر $۰ \leq i \leq n - ۱$، راس k_i در آرایش θ_i آماده است و آرایش $\theta_{i+۱}$ از



شکل ۱—۱ دو مرحله از بازی شلیک چیپ روی یک گراف غیر جهت‌دار.

آرایش θ_i با شلیک راس k_i به دست می‌آید. فرایند شلیک متوالی راس‌های یک دنباله قانونی را یک **بازی قانونی** می‌گوییم. هم‌چنین **امتیاز** یک دنباله قانونی σ، یک بردار $[\sigma] \in \mathbb{Z}^{|V|}$ تعریف می‌شود که برای هر $k \in V$، $[\sigma]_k$ برابر تعداد دفعات شلیک راس k در آن دنباله است.

قانون شلیک یک راس را می‌توانیم به وسیله ماتریس لاپلاسین گراف بیان کنیم.

تعریف ۱—۱—۳ [۱۸] برای گراف غیر جهت‌دار G، **ماتریس لاپلاسین** این گراف $L(G) = L$ یک ماتریس $|V| \times |V|$ است که

$$L_{i,j} = \begin{cases} -d_{i,j} & i \neq j, \\ \mathrm{exdeg}(i) & i = j. \end{cases}$$

حال فرض کنید θ یک آرایش شروع و $\sigma = (k_0, \ldots, k_{n-1})$ یک دنباله قانونی برای θ باشد. اگر θ و $[\sigma]$ را به عنوان بردارهایی ستونی در $\mathbb{Z}^{|V|}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه با شلیک راس k_0 به آرایش $\theta - Le_{k_0}$ می‌رسیم که بردار e_{k_0} بردار شاخص k_0 در $\mathbb{Z}^{|V|}$ است. سپس با شلیک راس k_1 به آرایش $\theta - Le_{k_0} - Le_{k_1}$ می‌رسیم و الی آخر. در نتیجه اگر θ' آرایش حاصل بعد از اجرای بازی قانونی σ باشد، آن‌گاه

$$\theta' = \theta - L(e_{k_0} + \ldots + e_{k_{n-1}}) = \theta - L[\sigma].$$

این بحث علاوه بر نشان دادن ارتباط شلیک‌ها و ماتریس لاپلاسین، نتیجه زیر را به دنبال دارد.

نتیجه ۱—۱—۴ در یک بازی شلیک چیپ روی یک گراف غیر جهت‌دار، آرایش نهایی بعد از اجرای بازی قانونی σ، تنها به امتیاز دنباله σ یعنی $[\sigma]$ بستگی دارد، نه ترتیب شلیک راس‌ها.

۱—۲ شلیک چیپ و گریدویدهای با تکرار

فرض کنید گراف G و آرایش شروع θ داده شده است و مجموعه $\mathcal{L}$ را مجموعه همه دنباله‌های قانونی برای θ بگیرید. در این بخش پس از تعریف «پاد متروید با تکرار» ثابت می‌کنیم که $\mathcal{L}$ یک پاد متروید با تکرار است. به کمک این حقیقت ثابت می‌کنیم که در صورتی که آرایش شروع داده شده باشد، همه بازی‌های قانونی می‌توانند تا نامتناهی ادامه یابند یا همه بازی‌های قانونی بعد از تعداد متناهی و ثابتی حرکت پایان می‌یابند و در صورت اخیر تعداد دفعاتی که یک راس مشخص شلیک می‌شود در همه بازی‌های قانونی یکسان است. هم‌چنین در صورت متناهی بودن بازی، آرایش پایانی در همه بازی‌های قانونی یکسان است.

تعریف ۱—۲—۱ [۸] فرض کنید V یک مجموعه متناهی از حروف باشد که آن را **الفبا** می‌نامیم. مراد از یک **کلمه** یک دنباله متناهی از اعضای V است و مجموعه‌ای از کلمات را یک **زبان** گوییم. یک **زیر کلمه** از یک کلمه α با حذف چند حرف از آن به دست می آید و یک **پیشوند** از آن، چند حرف اول از آن کلمه است. **طول کلمه** α را با $\ell(\alpha)$ و امتیاز آن را با $[\alpha]$ نشان می‌دهیم. منظور از **امتیاز** α یک بردار $[\alpha] \in \mathbb{Z}^{|V|}$ است که برای هر حرف $x \in V$، $[\alpha]_x$ برابر تعداد دفعات تکرار حرف x در کلمه α می‌باشد.

برای دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^n$، نماد $u \vee v$ را برای بردار ماکزیمم مولفه به مولفه آن دو و نماد $u \wedge v$ را برای بردار مینیمم مولفه به مولفه آن دو استفاده می‌کنیم. هم‌چنین l_1—نرم بردار u را با $|u|$ و l_2—نرم بردار u را با $||u||$ نشان می‌دهیم؛ یعنی $|u| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$ و $||u|| = (\sum_{i=1}^{n} u_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

تعریف ۱—۲—۲ [۸] گوییم زبان $\mathcal{L}$ **موروثی—چپ** (یا به طور خلاصه موروثی) است، هرگاه:

(م چ) برای هر کلمه در $\mathcal{L}$، هر پیشوند از آن کلمه نیز در $\mathcal{L}$ باشد.

زبان $\mathcal{L}$ را **موضعاً آزاد** گوییم هرگاه:

(م آ) برای هر کلمه $\alpha \in \mathcal{L}$ و دو حرف متمایز $x, y \in V$، اگر $\alpha x \in \mathcal{L}$ و $\alpha y \in \mathcal{L}$، آن‌گاه $\alpha xy \in \mathcal{L}$.

زبان $\mathcal{L}$ را **جایگشت‌پذیر** می خوانیم هرگاه:

(ج پ) برای هر $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ و $x \in V$، اگر $[\alpha] = [\beta]$ و $\alpha x \in \mathcal{L}$، آن‌گاه $\beta x \in \mathcal{L}$.

لم ۱—۲—۳ [۸] فرض کنید G یک گراف و θ یک آرایش شروع در بازی شلیک چیپ روی G باشد و $\mathcal{L}$ را مجموعه همه دنباله‌های قانونی برای θ قرار دهید. در این‌صورت $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی چپ، موضعاً آزاد و جایگشت‌پذیر است.

برهان. موروثی بودن $\mathcal{L}$ بدیهی است. فرض کنید $\alpha \in \mathcal{L}$ یک دنباله قانونی و $x, y \in V(G)$ دو راس متمایز باشند که $\alpha x \in \mathcal{L}$ و $\alpha y \in \mathcal{L}$، در این‌صورت پس از شلیک متوالی دنباله راس‌های α به وضعیتی می‌رسیم که هر دو راس x و y در آن آماده هستند. چون با شلیک راس x، تعداد چیپ‌های روی y کاهش نمی‌یابد، لذا y پس از شلیک متوالی دنباله αx نیز آماده است و در نتیجه $\alpha xy \in \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ موضعاً آزاد است. حال فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$، $x \in V$، $[\alpha] = [\beta]$ و $\alpha x \in \mathcal{L}$، در این‌صورت طبق نتیجه ۱—۱—۴ بخش قبل آرایش حاصل پس از شلیک α با آرایش حاصل پس از شلیک β یکسان است. درنتیجه چون x پس از شلیک α آماده است، لذا x پس از شلیک β نیز آماده است و درنتیجه $\beta x \in \mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ جایگشت‌پذیر است. ■

این ویژگی‌های یک زبان، خاصیتی قوی را برای آن نتیجه می‌دهد که به **خاصیت تبدیل قوی** معروف است:

(ت‌ق) اگر $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$، آن‌گاه α شامل یک زیر کلمه α' است که $\beta\alpha' \in \mathcal{L}$ و $[\beta\alpha'] = [\alpha] \vee [\beta]$.

ویژگی اخیر حالت قوی‌تری از **خاصیت تبدیل گریدوید** است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

(ت‌گ) اگر $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ و $\ell(\beta) < \ell(\alpha)$، آن‌گاه حرف $x \in \alpha$ یافت می‌شود که $\beta x \in \mathcal{L}$.

تعریف ۱—۲—۴ [۹] زبان $\mathcal{L}$ **ساده** خوانده می‌شود هرگاه در همه کلمات آن، هر حرف حداکثر یک بار ظاهر شود. زبانی که ساده، موروثی و دارای خاصیت تبدیل گریدوید باشد را یک **گریدوید** می‌گوییم. در صورتی که شرط ساده بودن را از زبان برداریم، آن را **گریدوید با تکرار** می‌خوانیم. هرگاه ترتیب حروف در کلمات گریدوید مهم نباشد، آن را **متروید** گوییم. هم‌چنین زبان‌های ساده، موروثی و دارای خاصیت تبدیل قوی، دسته خاصی از گریدویدها را تشکیل می‌دهند که **پادمتروید** خوانده می‌شوند. در صورتی که شرط ساده بودن را از زبان برداریم، آن را **پادمتروید با تکرار** گوییم.

برای بررسی جامع گریدویدها [۲۶] و گریدویدهای با تکرار [۹] را ببینید. یک نتیجه از قضیه زیر این است که مجموعه دنباله‌های قانونی برای یک آرایش شروع θ یک پادمتروید با تکرار است.

قضیه ۱—۲—۵ [۸] فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی—چپ باشد، در این‌صورت $\mathcal{L}$ موضعاً آزاد و جایگشت‌پذیر است اگر و تنها اگر $\mathcal{L}$ دارای خاصیت تبدیل قوی باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید $\mathcal{L}$ دارای خاصیت تبدیل قوی باشد. اگر $\alpha \in \mathcal{L}$ و $x, y \in V$ دو حرف متمایز باشند که $\alpha x, \alpha y \in \mathcal{L}$، آن‌گاه طبق (ت‌ق) یک زیر کلمه α' از αy موجود است که $\alpha x \alpha' \in \mathcal{L}$ و $[\alpha x \alpha'] = [\alpha y] \vee [\alpha x]$. اما $[\alpha x y] = [\alpha x] \vee [\alpha y]$، پس $[\alpha x y] = [\alpha x \alpha']$ و لذا $\alpha' = y$. این نشان می‌دهد که $\alpha x y \in \mathcal{L}$ و خاصیت (م‌آ) برقرار است. حال فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$، $x \in V$، $\alpha x \in \mathcal{L}$ و $[\beta] = [\alpha]$، در این‌صورت طبق (ت‌ق) یک زیر کلمه α' از αx موجود است که $\beta\alpha' \in \mathcal{L}$ و $[\beta\alpha'] = [\beta] \vee [\alpha x]$. اما چون $[\beta] = [\alpha]$، پس $[\beta x] = [\beta] \vee [\alpha x]$ و لذا $\alpha' = x$. این نشان می‌دهد که $\beta x \in \mathcal{L}$ و لذا $\mathcal{L}$ در خاصیت (ج‌پ) صدق می‌کند.
حال برعکس فرض کنید $\mathcal{L}$ در خاصیت‌های (م‌چ)، (م‌آ) و (ج‌پ) صدق کند، ثابت می‌کنیم که $\mathcal{L}$ در خاصیت (ت‌ق) صدق می‌کند. این مطلب را با استقرا روی $\|[\beta] \vee [\alpha]\|$ نشان می‌دهیم. کلمه‌های $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ را در نظر بگیرید و برای هر حرف x در α، تعداد $[\beta]_x$ تکرار اول این حرف x در α را حذف کنید و کلمه به‌دست آمده را α' بنامید. واضح است که $[\beta\alpha'] = [\alpha] \vee [\beta]$، نشان می‌دهیم که $\beta\alpha' \in \mathcal{L}$.
کلمه α'' را طولانی‌ترین پیشوند α' بگیرید که $\beta\alpha'' \in \mathcal{L}$. با برهان خلف فرض کنید که $\alpha'' \neq \alpha'$ و x را حرف بعد از α'' در α' بگیرید. بنابراین

$$[\alpha]_x = [\beta]_x + [\alpha']_x > [\beta]_x + [\alpha'']_x = [\beta\alpha'']_x.$$

لذا می‌توانیم α را به صورت $\alpha_1 x \alpha_2$ بنویسیم که $[\alpha_1]_x = [\beta\alpha'']_x$.
حال $[\alpha_1] \leq [\beta\alpha'']$ و لذا $[\beta\alpha''] = [\beta\alpha''] \vee [\alpha_1]$. علاوه بر این $\|[\beta] \vee [\alpha]\| = |\beta\alpha'| < \|[\beta\alpha'']\|$، در نتیجه طبق فرض استقرا یک زیرکلمه γ از $\beta\alpha''$ موجود است که $\alpha_1\gamma \in \mathcal{L}$ و $[\beta\alpha''] = [\alpha_1\gamma]$. تساوی اخیر نشان می‌دهد که در γ حرف x وجود ندارد، هم‌چنین $\alpha x \in \mathcal{L}$ و $\alpha_1\gamma \in \mathcal{L}$، بنابراین می‌توانیم قانون (م‌آ) را چندین بار به‌کار بریم و به‌دست آوریم که $\alpha_1\gamma x \in \mathcal{L}$. اکنون با به‌کارگیری قانون (ج‌پ) به‌دست می‌آوریم $\beta\alpha'' x \in \mathcal{L}$ که خلاف فرض ماکسیم بودن α'' است. این نشان می‌دهد که $\beta\alpha' \in \mathcal{L}$. ■

تعریف ۱—۲—۶ [۸] فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی—چپ باشد. کلمه $\alpha \in \mathcal{L}$ را **اساسی** گویند هرگاه پیشوند سره‌ای از هیچ عضو $\mathcal{L}$ نباشد.

لم ۱—۲—۷ اگر $\mathcal{L}$ یک زبان موروثی—چپ با خاصیت تبدیل قوی باشد، آن‌گاه هر دو کلمه اساسی در $\mathcal{L}$ دارای امتیاز و طول یکسان است.

برهان. فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ دو کلمه اساسی باشند. در این‌صورت طبق خاصیت (ت‌ق)، زیرکلمه α' از α و زیرکلمه β' از β یافت می‌شوند که $\alpha\beta', \beta\alpha' \in \mathcal{L}$ و $[\alpha\beta'] = [\beta\alpha'] = [\alpha] \vee [\beta]$. اما با توجه به اساسی بودن α

و β، داریم $\alpha' = \beta' = \emptyset$. در نتیجه $[\alpha] = [\beta]$. از طرف دیگر برای هر کلمه $\gamma \in \mathcal{L}$، داریم $\ell(\gamma) = |[\gamma]|$، پس $\ell(\alpha) = \ell(\beta)$. ■

تعریف ۱—۲—۸ [۸] طول یک کلمه اساسی در زبان موروثی—چپ با خاصیت تبدیل قوی $\mathcal{L}$ را **رتبه** $\mathcal{L}$ گوییم و در صورتی که $\mathcal{L}$ کلمه اساسی نداشته باشد آن را از **رتبه بی‌نهایت** می‌خوانیم.

اکنون آن‌چه در این بخش در مورد زبان‌های موروثی با خاصیت تبدیل قوی گفتیم را برای زبان دنباله‌های قانونی روی گراف G با آرایش شروع θ، به‌کار می‌گیریم تا نتیجه اصلی این بخش را به‌دست آوریم. این حقیقت که در زبان دنباله‌های قانونی، کلمات اساسی همان دنباله‌های منجر به آرایش پایانی هستند، به همراه لم ۱—۲—۷ و نتیجه ۱—۱—۴ بی‌درنگ نتیجه زیر را حاصل می‌کنند.

نتیجه ۱—۲—۹ فرض کنید یک گراف غیر جهت‌دار G و آرایش شروع θ داده شده است. در این‌صورت هر بازی قانونی با شروع از θ می‌تواند به طور نامحدود ادامه یابد یا هر بازی قانونی با شروع از θ بعد از تعداد متناهی حرکت با یک آرایش پایانی یکسان خاتمه می‌یابد. در حالت دوم تعداد دفعاتی که یک راس شلیک می‌شود در همه بازی‌های قانونی منجر به وضعیت پایانی یکسان است.

۱—۳ پایان‌پذیری

هدف این بخش پاسخ دادن به این سوال است که در بازی شلیک چیپ کدام بازی‌ها پایان‌پذیر و کدام یک نامتناهی هستند. در اولین تلاش برای پاسخ دادن به این سوال دو لم ساده اما مهم زیر به‌دست می‌آیند.

لم ۱—۳—۱ [۸] اگر یک بازی شلیک چیپ روی گراف غیر جهت‌دار G پایان‌پذیر باشد، آن‌گاه یک راس وجود دارد که اصلاً شلیک نشده است.

برهان. طبق برهان خلف فرض کنید که همه راس‌ها شلیک شوند. راس k را راسی بگیرید که آخرین شلیک آن زودتر از آخرین شلیک همه راس‌ها باشد. در این‌صورت همه همسایه‌های k، بعد از آخرین شلیک k، حداقل یک بار شلیک می‌شوند و لذا k از هر همسایه‌اش حداقل یک چیپ دریافت می‌کند. این نشان می‌دهد که در

پایان تعداد چیپ‌های k حداقل برابر با $\deg(k)$ بوده که تناقض است. ■

لم ۱—۳—۲ [۳۷] اگر یک بازی شلیک چیپ روی گراف غیر جهت‌دار و همبند G نامتناهی باشد، آن‌گاه همه راس‌ها بی‌نهایت بار شلیک می‌شوند.

برهان. فرض کنید تعداد کل چیپ‌ها روی راس‌های G برابر N باشد. چون بازی نامتناهی است یک راس i وجود دارد که نامتناهی بار شلیک شده است. فرض کنید j راس مجاور i باشد. با هر بار شلیک راس i، راس j یک چیپ دریافت می‌کند. چون راس j نمی‌تواند بیشتر از N چیپ داشته باشد، بنابراین حتماً باید بی‌نهایت بار شلیک شود. با توجه به همبندی گراف، این بحث نشان می‌دهد که همه راس‌های گراف بی نهایت بار شلیک می‌شوند. ■

قضیه زیر بین تعداد کل چیپ‌ها و پایان پذیری بازی یک رابطه برقرار می‌کند.

قضیه ۱—۳—۳ [۸] فرض کنید G یک گراف همبند با n راس و m یال باشد و تعداد کل چیپ‌ها روی راس‌های G برابر N باشد. بازی شلیک چیپ را روی این گراف انجام می‌دهیم. در این‌صورت

الف) اگر $N > ۲m - n$، آن‌گاه بازی نامتناهی است.

ب) اگر $m \le N \le ۲m - n$، آن‌گاه یک آرایش شروع وجود دارد که متناهی بودن بازی را تضمین می کند و یک آرایش شروع وجود دارد که نامتناهی بودن بازی را تضمین می کند.

ج) اگر $N < m$، آن‌گاه بازی متناهی است.

برهان.

الف) اگر در یک آرایش θ، هیچ راس آماده‌ای وجود نداشته باشد، آن‌گاه برای هر $k \in V(G)$، $\theta(k) \le \deg(k) - ۱$. لذا $N = \sum_{k=۱}^{n} \theta(k) \le \sum_{k=۱}^{n} (\deg(k) - ۱) = ۲m - n$. پس در هر آرایش θ، یک راس آماده وجود دارد و در نتیجه بازی نامتناهی است.

ب) اگر $N < ۲m - n$، آن‌گاه روی هر راس k حداکثر به اندازه $\deg(k) - ۱$ چیپ قرار می‌دهیم و در نتیجه آرایش شروعی به‌دست می‌آوریم که در آن هیچ راس آماده‌ای وجود ندارد و بازی متناهی است. حال ثابت می‌کنیم که هرگاه $N \ge m$، یک آرایش شروع وجود دارد که بازی نامتناهی است. کافی است