دانشگاه یزد

دانشکده ی ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله

جهت اخذ درجه دکتری در رشته ریاضی کاربردی

عنوان:

حل عددی معادلات انتگرالی با استفاده از توابع پایه ای شعاعی

استاد راهنما:

قاسم برید لقمانی

اساتید مشاور:

مهدی دهقان و علی دلاور خلفی

پژوهش و نگارش: زکیه عوض زاده

مهر ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس

باشد که بلند پروازی هایمان ما را بر بامی بلندتر فرود آرد...

بارالها شکرت برای آن چه بی دریغ به من ارزانی داشتی، بی نهایت سپاس برای آنکه توفیقم دادی تا بلند پرواز بمانم را جامه عمل بپوشانم و مرا مهیا کردی تا مسیر رویاهایم را آغاز کنم.

بر خود واجب می دانم مراتب سپاس خود را از اساتید گرانقدرم دکتر قاسم برید لقمانی استاد راهنما و دکتر مهدی دهقان استاد مشاور، که عبور از این راه دشوار را برایم سهل تر نمودند اعلام دارم.

از دیگر اساتید بزرگوار دکتر محمود محسنی مقدم، دکتر فرید مالک قاینی، دکتر سید محمد مهدی حسینی و دکتر علی دلاور خلفی که با صبر و حوصله برای بهبود پایان نامه وقت صرف نمودند صمیمانه متشکرم.

برای همه دوستان عزیزی که آشنایی با آنان بهانه ای شد تا لحظه های دشوار تحصیل تبدیل به خاطراتی شیرین گردد، آرزوهایی طلایی دارم.

از خانواده خوبم که همراهی های فکری، معنوی و مالی ایشان گذر از این راه را برایم ممکن ساخت قدردانم به ویژه مادر دلسوزم که در مقابل فداکاری او چیزی برای گفتن ندارم؛ پدر، خواهران و برادران عزیزم که همواره محبت های بی دریغشان امید بخش راهم بود. امیدوارم در مقابل این همه لطف و اعتماد، روزی امیدهایشان برای آنچه می توانم باشم، محقق گردد.

چکیده

در این پایان‌نامه، به حل انواع معادلات انتگرالی به عنوان یکی از مهمترین ابزار علوم پایه و مهندسی می‌پردازیم. روش‌های ارائه شده شامل تلفیقی از روش هم‌محلی، توابع پایه‌ای شعاعی، تفاضلات متناهی و برخی دیگر از روش‌های عددی می‌باشد. با توجه به این که روش توابع پایه‌ای شعاعی برای ابعاد بالا انعطاف‌پذیری مناسبی دارد، هدف اصلی پایان‌نامه توسعه روش توابع پایه‌ای شعاعی برای حل انواع معادلات انتگرال دوبعدیِ ولترا، فردهلم ، ولترا-فردهلم و نیز حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد.

در ابتدا، توابع پایه‌ای شعاعی به عنوان ابزار تقریب معرفی و سپس در هر بخش روش عددی برای حصول جواب معادلات انتگرالیِ مورد بحث توصیف می‌گردد. در هر قسمت همگرایی، دقت و کارایی روش نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. علاوه بر این مثال‌ها و نتایج عددی، قابلیت‌ها و کارایی روش را به صورت تجربی نیز تایید می‌کند.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرالی ولترا؛ فردهلم و ولترا-فردهلم؛ معادلات انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی؛ توابع پایه‌ای شعاعی؛ همگرایی نمایی؛ روش هم‌محلی؛ روش تفاضلات متناهی؛ روش‌های تقریب انتگرال‌گیری عددی گوس و ذوزنقه.

فهرست مطالب

پیشگفتار

معادلات انتگرال به عنوان یکی از مهمترین ابزارهای مهندسی و علوم، محور اصلی تحقیق در این پایان‌نامه می‌باشد. بنابراین در ابتدا به بررسی و معرفی تحقیقات اخیر در زمینه حل عددی معادلات انتگرال می‌پردازیم. سپس به برخی کاربردهای این دسته از معادلات اشاره داشته و بدین ترتیب انگیزه‌های محققان برای مطالعات بیشتر برای ارائه راه‌حل‌های جدید و کارآمد روشن می‌گردد. این مطالعه با هدف توسعه روش‌های موجود با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی صورت گرفت و گزارش آن به طور خلاصه بدین شرح است: ابتدا در بخش اول، به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی لازم می‌پردازیم. این بخش همچنین شامل تاریخچه مختصری از چگونگی پیدایش و نیز طبقه‌بندی اجمالی معادلات انتگرال می‌باشد. در ادامه در بخش دوم، توابع پایه‌ای شعاعی به عنوان ابزار اصلی حل معادلات انتگرالی معرفی می‌گردند. بخش سوم پس از گزارش مختصری از روش‌های موجودِ حل معادلات انتگرال، چگونگی حل برخی انواع معادلات انتگرال در ابعاد بالا را با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی و روش هم‌محلی توضیح می‌دهد. بخش چهارم دسته دیگری از معادلات انتگرالی دو بعدی که شامل مشتقات جزئی تابع مجهول می‌باشد یا به عبارتی معادلات انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی و روش تفاضلات متناهی تشریح می‌گردد. سپس در بخش پنجم، حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با روش هم‌محلی شرح می‌دهیم. در هر قسمت شرح مباحثی در رابطه با سرعت همگرایی و نیز حل مثال‌های عددی کارایی و قابلیت‌های روش را تضمین می‌کند.

ضمناً در انتهای پایان‌نامه، پس از مباحث تکمیلی و نتیجه‌گیری، پیشنهاداتی در این زمینه برای علاقمندان ارائه شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

مقدمه

معادلات انتگرال نقش بسیار مهمی در علوم مهندسی و پایه ایفا می‌کنند و مطالعات زیادی برای ارائه روش‌های کارآمد جهت حل این معادلات صورت گرفته است [۷، ۶۷، ۹۷، ۱۱۹]. این معادلات در شکل‌های گوناگون ظاهر شده و با توجه به پیچیدگی‌های حل آن‌ها، طبقه‌بندی و تعریف کلاس‌های متفاوت کمک موثری برای توسعه تحقیقات در این زمینه می‌باشد. کتاب راهنمای پولیانین [۹۴] ، طبقه‌بندی جامعی برای معادلات انتگرالی و روش‌های حل آن‌ها در اختیار علاقمندان قرار می‌دهد؛ گرچه این مرجع بیشتر شامل روش‌های سابق حل این معادلات می‌باشد و برای دست‌یابی به تحقیقات جدیدتر به هیچ وجه کافی نیست [۲، ۸، ۱۱، ۲۵، ۶۹]. در این بخش ابتدا به معرفی انواع معادلات انتگرالی می‌پردازیم و سپس به طور مختصر روش‌های هم محلی، تفاضلات متناهی و روش‌های عددی انتگرال‌گیری را که در فصل های بعد، برای حل این دسته از معادلات به کار رفته‌اند، شرح می‌دهیم.

۱.۱ انواع معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل

پیدایش معادلات انتگرال [۱]

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار دارد. بنا به نظر بوچر [۲] نام معادله انتگرال توسط دوبوا- ریموند [۳] در سال ۱۸۸۸ پیشنهاد شده بود، هر چند اولین پیدایش معادله انتگرال به آبل [۴] منسوب است. آبل در کار پایان‌نامه‌اش در سال‌های ۱۸۲۳ تا ۱۸۲۶ مشغول مطالعه روی معادلاتی از قبیل

$$f(x) = \int_a^x (x-t)^{-\alpha} g(t)dt, \qquad ۰ < \alpha < ۱, \tag{۱.۱}$$

[۱] بر گرفته از کتاب "مقدمه‌ای بر معادلات انتگرال و کاربردها" اثر عبدل جی. جری [۶۷].

[۲] Bocher

[۳] Du Bois-Reymond

[۴] Abel

بود، که f تابعی پیوسته و معلوم بوده و در شرط $f(a)=0$ صدق می کرد. همچنین بنا به روایتی دیگر، پیدایش معادله انتگرال به لاپلاس[۱] در سال ۱۷۸۲ برمی‌گردد که در حال مطالعه روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آن‌ها بود.

در سال ۱۸۲۰ فوریه مفهوم تبدیلات فوریه را مطرح کرد که پیدا کردن تبدیل معکوس فوریه به حل معادله انتگرال منجر می‌شود. در سال ۱۸۷۰ نیومان[۲] ثابت کرد که یافتن جواب مسئله دیریکله معادل است با یافتن جواب یک معادله انتگرالی که اصطلاحاً به آن معادله انتگرال مرزی می‌گویند. در سال ۱۸۹۶ ولترا[۳] و در سال ۱۹۰۰ نیز فردهلم[۴] معادلات انتگرالی مشهور خود را ارائه کردند.

۱.۱.۱ معادلات انتگرال یک بعدی

معادلات به صورت کلی زیر را

$$\phi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}K(x,t,u(t))dt, \qquad (۲.۱)$$

معادلات انتگرال گویند که در آن $u(x)$ تابعی مجهول و نیز $\phi(x)$، $f(x)$، $\alpha(x)$، $\beta(x)$ و $K(x,t,u(t))$ توابع حقیقی، λ پارامتر و همگی معلوم هستند. اگر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توأما ثابت باشند معادله‌ی فوق فردهلم و در غیر این‌صورت ولتراست.

اگر تابع K که هسته‌ی معادله نامیده می‌شود نسبت به u خطی باشد آنگاه معادله انتگرالی حاصل را خطی و در غیر این‌صورت معادله انتگرالی را غیرخطی می‌نامیم. اگر در یک معادله خطی $f(x)=0$ باشد، آنگاه معادله انتگرالی همگن و در غیر این صورت ناهمگن نامیده می‌شود.

صورت استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم که در آن ها حدود پایین و بالای انتگرال‌گیری اعداد ثابت هستند به صورت زیر می‌باشد

$$\phi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,t)u(t)dt, \qquad a\leqslant x,t\leqslant b, \qquad (۳.۱)$$

که در آن هسته‌ی $K(x,t)$، تابع $f(x)$ و پارامتر λ معلوم می‌باشند.

---

[۱] Laplace

[۲] Neumann

[۳] Volterra

[۴] Fredholm

بر حسب اینکه $\phi(x)$ چگونه تعریف شود، معادلات انتگرال خطی فردهلم به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند: اگر $\phi(x) = ۰$ باشد آنگاه معادله فوق یک معادله انتگرال فردهلم خطی نوع اول خواهد بود. همچنین اگر $\phi(x)$ در بازه $[a, b]$ هیچگاه برابر با صفر نگردد، آن گاه با تقسیم طرفین بر $\phi(x)$ و نامگذاری‌های جدید داریم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \tag{۴.۱}$$

که آن را معادله انتگرال خطی فردهلم نوع دوم گویند.

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا که در آن حد بالای انتگرالگیری متغیر و حد پایین ثابت می‌باشد، به صورت زیر است

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \tag{۵.۱}$$

مشابه قبل، این نوع معادلات نیز با توجه به چگونگی تعریف تابع $\phi(x)$ به دو صورت نوع اول و دوم نامگذاری می‌شوند. در حالتی که $\phi(x) = ۰$، معادله به صورت زیر خواهد بود

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = ۰, \tag{۶.۱}$$

که آن را معادله انتگرال خطی ولترای نوع اول می‌نامند و اگر $\phi(x) = ۱$ داریم

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \tag{۷.۱}$$

که معادله انتگرال خطی ولترای نوع دوم نامیده می‌شود. تعاریف برای معادلات انتگرال غیر خطی مشابه است.

۲.۱.۱ معادلات انتگرال- دیفرانسیل

ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ در حال مطالعه رشد جمعیت و به‌خصوص تاثیر وراثت بود که با معادلات انتگرال- دیفرانسیل مواجه شد. زمانی‌که در یک معادله تابع مجهول $u(x)$ و مشتقاتش ظاهر شوند به طوری‌که حداقل یکی از آن‌ها در زیر انتگرال قرار گیرد، معادله را انتگرال- دیفرانسیل می‌نامند[۱]. بنابراین مشتق یا مشتقات معمولی ممکن است زیر علامت انتگرال یا خارج آن در یک یا هر دو طرف معادله ظاهر شود. بنابراین شکل خاصی برای این گونه معادلات وجود ندارد. لازم به ذکر است که دسته‌بندی معادلات انتگرال- دیفرانسیل

[۱] بر گرفته از کتاب "معادلات انتگرال و کاربردهای آن" اثر متیور رحمان [۹۷]

همانند دسته بندی معادلات انتگرال قبلی است و نیازی به توضیح مجدد نیست. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از این نوع معادلات هستند

$$u''(x) = e^x - x + \int_0^x xtu'(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \tag{8.1}$$

$$u'(x) = -sin(x) - 1 - \int_0^1 u(t)dt, \quad u(0) = 1, \tag{9.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i(x)u^{(i)}(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)[u(t)]^4 dt, \tag{10.1}$$

$$s.t. \qquad u^{(i)}(a) = \alpha_i \qquad i = 0, 1, ..., n-1.$$

معادله (۸.۱) معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترای خطی است که مشتقات در هر دو طرف ظاهر شده‌اند. معادلات (۹.۱) و (۱۰.۱) نیز به‌ترتیب معادلات انتگرال- دیفرانسیل خطی و غیرخطی فردهلم می باشند.

پدیده‌های زیادی در زیست‌شناسی و فیزیک به کمک این نوع معادلات انتگرال- دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شوند [۵۸]. همچنین برخی از این معادلات ممکن است در حین تبدیل یک معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرال به وجود آمده باشند.

۳.۱.۱ معادلات انتگرال منفرد

یک معادله انتگرال را منفرد[۱] گویند اگر حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری آن بی‌نهایت، یا هسته‌ی معادله در حداقل یکی از نقاط بازه‌ی انتگرال‌گیری نامتناهی باشد. معادله انتگرال زیر

$$\phi(x)\, u(x) = \psi(x)f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt, \tag{11.1}$$

منفرد گویند اگر حد پایین $\alpha(x)$، یا حد بالای $\beta(x)$ و یا هر دو حدود انتگرال‌گیری بی‌نهایت باشند. همچنین معادله انتگرال را منفرد گویند اگر هسته $K(x,t)$ در یک نقطه یا نقاطی از دامنه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد. لازم به ذکر است که اگر $\psi(x) = 0$، معادله انتگرال را منفرد و چنان که $\psi(x) = 1$ باشد معادله را به طور ضعیف منفرد[۲] می‌نامند. همچنین معادله انتگرال را همگن گوییم هرگاه $\phi(x) = 0$، و در صورتی که $\phi(x) = 1$ باشد معادله انتگرال، ناهمگن خواهد بود.

[۱] Singular

[۲] Weakly singular

در زیر دو مثال از معادلات انتگرال با دامنه نامتناهی ارائه شده است

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} u(t) dt, \tag{۱۲.۱}$$

$$L[u(x)] = \int_{\circ}^{\infty} e^{-\lambda t} u(t) dt, \tag{۱۳.۱}$$

که به ترتیب تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس تابع $u(x)$ می‌باشند. همچنین مثال‌های زیر، معادلات انتگرالی منفرد با هسته‌های تکین هستند.

◄ معادله انتگرال تعمیم یافته آبل

$$f(x) = \int_{\circ}^{x} \frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad \circ < \alpha < ۱, \tag{۱۴.۱}$$

که اگر $\alpha = \frac{۱}{۲}$ معادله آبل معمولی نوع اول به دست می‌آید.

◄ معادله انتگرال ولترای نوع دوم به طور ضعیف منفرد (معادله‌ی آبل نوع دوم)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\circ}^{x} \frac{u(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \quad x \in [\circ, T], \ \circ < \alpha < ۱, \tag{۱۵.۱}$$

این معادلات در بسیاری از زمینه‌های فیزیک، ریاضی و شیمی نظیر انتقال گرما و الکتروشیمی و غیره ظاهر می‌شوند. باید توجه کرد که λ یک پارامتر است و $T = ۱, ۲, ۳, \ldots$ بستگی به معادله تحت مطالعه دارد. همچنین لازم است $f(x)$ به قدر کافی هموار باشد به طوری‌که وجود یک جواب منحصربه‌فرد برای معادله تضمین شود.

به طور کلی حل معادلات انتگرالی منفرد در هر یک از دو حالت فوق کاری دشوار است و روش‌های معمولی حل معادلات انتگرالی برای تولید نتایج معتبر، به هیچ‌وجه کافی نیست. اگر چه حل تحلیلی این معادلات منجر به جواب‌های دقیق‌تری می‌گردد اما به علت انعطاف‌پذیری کم این روش‌ها، توسعه روش‌های عددی همچنان ادامه دارد [۱۳، ۱۴، ۳، ۴۸، ۹۳].