چکیده

براساس داده‌های مشاهداتی و تجربی ناشی از آزمایش‌های خاص در فیزیک هسته‌ای مشخص گردیده است که معادله‌ی دیراک با یک پتانسیل خاص به‌طور کامل طیف انرژی و تبهگنی آن را نمی‌دهد، اما اگر تغییر خاصی که به q - دگرگونش معروف است بر پتانسیل تحمیل کنیم، نتیجه‌ی حاصل، با داده‌های مشاهداتی در توافق بیشتری است. بنابراین هدف ما در این پایان‌نامه، بررسی راه‌حل‌های تحلیلی معادله‌ی دیراک با برخی پتانسیل‌های q - دگرگون شده است. تحت شرایط تقارن اسپین یا تقارن شبه اسپین، طیف انرژی و تابع موج متناظر با آن را به‌طور تقریبی (با استفاده از تقریب پکریس) برای هر کدام از پتانسیل‌ها به‌دست‌می‌آوریم.

واژهای کلیدی: معادله دیراک، تقارن اسپین، تقارن شبه اسپین، پتانسیل‌های q - دگرگون شده، تقریب پکریس.

فهرست مطالب

لیست جداول

فصل ۱

مقدمه

این موضوع به‌خوبی شناخته شده است که جواب‌های دقیق نقش مهمی را در مکانیک کوانتومی بازی می‌کنند جایی‌که آن‌ها تمام اطلاعات لازم در خصوص مدل کوانتومی تحت مطالعه را دارا هستند. جواب‌های دقیق معادله‌ی شرودینگر[۱] تنها برای اتم هیدروژن و برای نوسانگر هارمونیک سه بعدی امکان‌پذیر است [۱]. اگرچه، زمانی‌که ذره در یک میدان پتانسیل قوی است، تأثیرات نسبیتی باید درنظرگرفته شود، پس باید اصلاحاتی روی مفاهیم کوانتومی غیرنسبیتی صورت گیرد [۲]. با درنظرگرفتن این اصلاحات، ذره در یک میدان پتانسیل قوی باید توسط معادلات کلاین-گوردن[۲](KG) و دیراک[۳] توصیف شود. در سال‌های اخیر، علاقه‌مندی زیادی در پیداکردن حل‌دقیق معادلات شرودینگر، کلاین-گوردن، دیراک و سالپتر[۴] برای پتانسیل‌های مختلف نشان داده شده است [۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴]. مسائلی که به‌توان معادلات KG و دیراک را به‌طور دقیق حل کرد به‌جز چند مثال انگشت شماری چون اتم هیدروژن و الکترون در یک میدان مغناطیسی یکنواخت بسیار اندک است. اخیراً نویسندگانی معادلات نسبیتی را برای برخی از پتانسیل‌ها حل کرده‌اند. دکتره ستاره و حیدری [۴] معادله‌ی دیراک را با فرض برابری پتانسیل برداری و اسکالر پتانسیل دیویدسون[۵] حل کرده‌اند.

[۱] Schrödinger
[۲] Klein-Gordan
[۳] Dirac
[۴] Salpeter
[۵] Davidson

هم‌چنین، آن‌ها در مقاله‌ی [۵] به حل‌دقیق معادله‌ی دیراک برای موج-s با پتانسیل‌های بدون بازتاب[۱]، روزن-مورس[۲] و منینگ-روزن[۳] پرداخته‌اند. اخدیر[۴] [۶] جواب حالت مقید D -بعدی معادله‌ی کلاین-گوردن را برای پتانسیل برداری و اسکالر تعمیم‌یافته هالتن[۵] به ازای عدد اختیاری ℓ با استفاده از روش NU[۶] را به‌دست‌آورده است. علاوه‌براین، ایگریفز[۷] و سور[۸] [۷] جواب حالت مقید یک بعدی معادله‌ی دیراک تحت تقارن PT حقیقی و مختلط را برای پتانسیل تعمیم‌یافته‌ی هالتن را بررسی کرده‌اند. دکتر ستاره و نظری [۸] معادله‌ی انرژی را در نظریه دیراک برای پتانسیل نمایی پنج پارامتری[۹] با استفاده از روش (SUSY) [۱۰] به‌دست‌آورده‌اند. اخدیر و سور معادله‌ی سالپتر بدون اسپین یک بعدی را تحت تقارن PT حقیقی و مختلط برای پتانسیل تعمیم‌یافته‌ی هالتن به‌طور تحلیلی حل کرده‌اند و طیف انرژی حالت مقید و تابع موج‌ها را به‌طور دقیق به‌دست‌آورده‌اند [۱۱]. اخدیر و سور هم‌چنین جواب‌های تحلیلی شبه دقیق حالت مقید معادله‌ی کلاین-گوردن را در چارچوب موقعیت وابسته به جرم مؤثر برای پتانسیل‌های برداری و اسکالر هالتن در D -بعد به ازای هر عدد کوانتومی ℓ با استفاده از روش NU با مدل تقریب جدیدی به‌جای جمله‌ی مرکزگریز به‌دست‌آورده‌اند [۱۳].

برای سیستم‌های هسته‌ای واقعی‌تر که نوکلئون‌ها در میدان نسبیتی با پتانسیل اسکالر جاذب $V_s(\vec{r})$ و پتانسیل برداری دافع $V_v(\vec{r})$ توصیف می‌شوند، برای $\ell \neq ۰$ راه‌حل دقیقی را نمی‌توان تعیین کرد، هرچند راه‌حل‌های عددی که در آن‌ها تکنیک‌های تقریبی متعددی پیشنهاد شده‌اند که به‌طور گسترده و با درجه دقت متفاوت مورد استفاده قرار می‌گیرند. تقریبی که به‌طور گسترده‌ای شناخته شده و برای به‌دست‌آوردن جواب‌های نیمه کلاسیک استفاده می‌شود توسط پکریس[۱۱] ابداع شده است [۱۵]. این تقریب بر این اساس

[۱] Reflectionless-type
[۲] Rosen–Morse
[۳] Manning–Rosen
[۴] Ikhdair
[۵] Hulthén
[۶] Nikiforov-Uvarov
[۷] Eğrifes
[۸] Sever
[۹] five-parameter exponent-type
[۱۰] supersymmetry
[۱۱] Pekeris

است که ترم مرکزگریز را در یک سری نمایی وابسته به فاصله درون مولکولی بسط دهیم. در سال‌های اخیر، به‌دست‌آوردن ویژه‌مقادیر انرژی حالت مقید تحت شرایط تقارن اسپین $V_s(\vec{r}) \sim V_v(\vec{r})$ و تقارن شبه اسپین $V_s(\vec{r}) \sim -V_v(\vec{r})$، و متناظر با آن تابع موج‌های بالا و پایین اسپینور در چارچوب روش NU مورد توجه بسیار قرار گرفته است. بنابراین، در این پایان‌نامه، ما معادله‌ی دیراک را برای یک ذره که در دام پتانسیل‌های متقارن کروی q - دگرگون شده افتاده تحت شرایط تقارن اسپین یا تقارن شبه اسپین با درنظرگرفتن تقریبی به‌جای جمله‌ی مرکزگریز و یا شبه مرکزگریز حل می‌کنیم، و تابع موج دو مؤلفه‌ی بالا و پایین اسپینور و طیف انرژی را به ازای عدد کوانتومی اختیاری اسپین- مدار κ برای حالت‌های مقید با استفاده از روش NU به‌دست‌می‌آوریم.

در فیزیک هسته‌ای، شکل پتانسیل نقش مهمی به ویژه هنگام مطالعه‌ی ساختار دگرگون شده‌ی هسته و یا تعامل بین آن‌ها ایفا می‌کند [۱۶]. بنابراین، در کار حاضر، به بررسی راه‌حل‌های تحلیلی حالت مقید معادله دیراک با پتانسیل‌های هسته‌ای q - دگرگون شده‌ی یوکاوا[۱] و وود-ساکسون[۲] پرداخته‌ایم. هم‌چنین، این رویکرد حاضر (q - دگرگون کردن پتانسیل‌ها) مقدار اطلاعات دقیق‌تری در مورد ساختار، دینامیک و حتی بحث تشدید انرژی در برخورد با مولکول‌ها به ما می‌دهد [۱۷]. پس، در این خصوص نیز در این پایان‌نامه به مثال‌هایی چون پتانسیل q - دگرگون شده‌ی مننینگ- روزن پرداخته شده است.

در فصل۲، برای اینکه بحث ما برای خوانندگانی که با تقارن‌های نسبیتی آشنایی ندارند، ساده و قابل فهم باشد بیشتر روی مفاهیم تقارن اسپین و تقارن شبه اسپین کار می‌کنیم. هم‌چنین، این فصل شامل معرفی روش q - دگرگون کردن پتانسیل‌ها و روش NU است که نقش مهمی در فهم مطالب دارند و در فصول بعد از آن‌ها استفاده می‌کنیم و در ادامه تقریب پکریس به‌اختصار توضیح داده می‌شود.

در فصل۳، مروری داریم بر کارهایی که قبلاً در این خصوص صورت گرفته است از جمله: حل معادله‌ی دیراک با در نظرگرفتن تقارن اسپین یا تقارن شبه اسپین برای پتانسیل‌های q - دگرگون شده‌ی وود- ساکسون

[۱] Yukawa
[۲] Woods-Saxon

[۱۸]، روزن-مورس [۱۹] و مورس[۳] [۲۰، ۲۱] .

در فصل ۴، که در واقع فصل اصلی پایان‌نامه است، و کاری است که به‌پاس راهنمایی بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدرضا ستاره مطالعه و به سر انجام رسیده است را ارائه خواهم داد. در این فصل هدف این است که این مطالعات را با پتانسیل‌های q - دگرگون شده‌ی یوکاوا [۲۲، ۲۳] و منینگ-روزن [۲۴] بررسی کنیم . برای پتانسیل های q - دگرگون شده‌ی مذکور نشان می‌دهیم که نتایج در حد $q = 1$ با حل معادله‌ی دیراک برای این پتانسیل‌ها در شکل استاندارد در توافق است. همچنین، برخی از نتایج عددی را برای پتانسیل یوکاوا تحت شرایط تقارن اسپین و تقارن شبه اسپین به‌دست‌می‌آوریم و مشاهده می‌کنیم که تبهگنی سیستم تحت q - دگرگون کردن پتانسیل یوکاوا از بین می‌رود.

[۳] Morse

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۲ معادله‌ی دیراک با تقارن‌های نسبیتی در هسته

تعاریف و مفاهیم به‌کار رفته در این قسمت، به‌جز مواردی که به روشنی ذکر شده است، از مرجع [۲۵] گرفته شده‌اند.

سال‌های زیادی است که به وجود تقارن‌های نسبیتی هامیلتونی دیراک پی برده‌اند اما تنها اخیراً این تقارن‌ها به‌طور تجربی در طیف هسته و هادرون‌ها شناخته شده‌اند. داده‌های تجربی وجود تقارن اسپین را در طیف هادرون‌ها و تقارن شبه اسپین را در طیف هسته‌ها تأیید می‌کنند.

۱.۱.۲ تقارن‌های هامیلتونی دیراک

معادله دیراک هموردای لورنتس [۱] برای یک ذره با جرم M به صورت:

$$[\gamma^{\mu}[cP_{\mu} + g_v A_{\mu}(x^{\mu})] + Mc^{2} + V_s(x^{\mu})]\psi(x^{\mu}) = 0 \qquad (۱.۲)$$

که $x^{\mu} = (ct, \vec{r})$ بردار چهار بعدی، $\vec{r} = (x, y, z)$ بردار سه بعدی، $P_{\mu} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ تکانه خطی، $A_{\mu}(x^{\mu})$ پتانسیل برداری لورنتس $(A_0(x^{\mu}), \vec{A}(x^{\mu}))$، c سرعت نور و $V_s(x^{\mu})$ پتانسیل اسکالر لورنتس می‌باشند. ماتریس‌های دیراک، ماتریس‌های ۴ × ۴ به فرم زیر می‌باشند.

[۱] Lorentz covariant Dirac equation

$$\gamma^{\circ} = \beta = \begin{pmatrix} I & \circ \\ \circ & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \circ & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \circ \end{pmatrix} \qquad (۲.۲)$$

که I ماتریس ۲ × ۲ واحد است و $\vec{\sigma}$ ماتریس‌های ۲ × ۲ پاؤلی[۱] می‌باشند. اگر پتانسیل‌ها را مستقل از زمان در نظربگیریم، تابع موج معادله‌ی دیراک می‌تواند به صورت حاصل‌ضرب $\psi(x_\mu) = e^{-\frac{Et}{\hbar}}\phi(\vec{r})$ نوشته شود. با ضرب کردن معادله ۱.۲ در β ، معادله‌ی دیراک به معادله ویژه‌مقداری زیر کاهش می‌یابد.

$$H\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r}) \qquad (۳.۲)$$

که E انرژی و

$$H = \vec{\alpha}.[c\vec{P} + g_v\vec{A}(\vec{r})] + V_v(\vec{r}) + \beta[Mc^{۲} + V_s(\vec{r})] \qquad (۴.۲)$$

هامیلتونی دیراک [۲] است و $V_v(\vec{r}) = g_v A_{\circ}(\vec{r})$. اگر ما ثابت‌هایی به صورت اختیاری به پتانسیل‌های اسکالر و برداری اضافه کنیم

$$V_v(\vec{r}) \longrightarrow V_v(\vec{r}) + C_s \quad , V_s(\vec{r}) \longrightarrow V_s(\vec{r}) + C_s \qquad (۵.۲)$$

معادله‌ی دیراک تغییر نمی‌کند زیرا می‌توان همین ثابت‌ها را به انرژی و جرم بیفزاییم.

$$E \longrightarrow E + C_s, \quad Mc^{۲} \longrightarrow Mc^{۲} - C_s \qquad (۶.۲)$$

ویژه تابع دیراک با در نظرگرفتن ۳ مؤلفه‌ی غیر صفر پتانسیل برداری لورنتس، $A(\vec{r}) \neq \circ$ ، تحت پاریته پایستار نیست. بنابراین، برای دینامیک تک ذره $A(\vec{r}) \neq \circ$ کاربردی ندارد. پس، ما باید برای بررسی تقارن‌ها از حد $A(\vec{r}) = \circ$ استفاده کنیم.

[۱] Pauli matrices
[۲] Dirac Hamiltonian

۲.۱.۲ تقارن اسپین

تقارن اسپین زمانی رخ می‌دهد که $V_v(\vec{r}) + C_s = V_s(\vec{r})$ که C_s ثابت است. پس هامیلتونی دیراک با تقارن اسپین خواهد شد:

$$H_s = \vec{\alpha}.c\vec{P} + V_v(\vec{r})(1+\beta) + \beta(Mc^2 + C_s) \tag{۷.۲}$$

و مولد اسپین به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \vec{s} & 0 \\ 0 & \tilde{\vec{s}} \end{pmatrix} \tag{۸.۲}$$

که $\vec{s} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ و $\tilde{\vec{s}} = U_p \vec{s} U_p$ که $U_p = \vec{\sigma}.\vec{p}$ تبدیل یکانی هلیسیته [۱] است. ما می‌توانیم ویژه حالت هامیلتونی دیراک $\phi^s_{\kappa,\mu}(\vec{r})$ را به صورت زیر بنویسیم.

$$H_s \phi^s_{\kappa,\mu}(\vec{r}) = E_\kappa \phi^s_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \tag{۹.۲}$$

که یک بردار چهار بعدی است،

$$\phi^s_{\kappa,\mu}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g^+_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \\ g^-_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \\ if^+_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \\ if^-_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{۱۰.۲}$$

که $g^\pm_{\kappa,\mu}(\vec{r})$ مؤلفه‌های بالایی تابع موج دیراک و $f^\pm_{\kappa,\mu}(\vec{r})$ مؤلفه‌های پایینی تابع موج دیراک هستند و $+$ و $-$ به‌ترتیب به اسپین up و اسپین down اشاره دارند.

مولدهای اسپین $\vec{S}$ یک گروه $SU(2)$ را تشکیل می‌دهند و با هامیلتونی دیراک H_s جابه‌جا می‌شوند.

$$[S^{'}_i, S^{'}_j] = i\epsilon_{ijk} S^{'}_k, \qquad [S^{'}_i, H_s] = 0. \tag{۱۱.۲}$$

پس، هامیلتونی دیراک H_s تحت عمل $SU(2)$ که چرخش‌هایی در صفحه مختلط دو بعدی را نمایش می‌دهند ناورداست. بنابراین، ویژه حالت‌های هامیلتونی باید به نمایش اسپینور گروه اسپین با بزرگی $\mu = \pm\frac{1}{2}$

[۱] helicity unitary transformation

نیز تعلق داشته باشند.

$$S_z\phi^s_{\kappa,\mu}(\vec{r}) = \mu\phi^s_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \tag{۱۲.۲}$$

و ویژه حالت‌های دوتایی (زوج قرین)ها به وسیله‌ی مولدهای $S_\pm$ به‌هم مربوط می‌شوند.

$$S_\pm\phi^s_{\kappa,\mu}(\vec{r}) = \sqrt{(\frac{۱}{۲} \mp \mu)(\frac{۳}{۲} \pm \mu)}\phi^s_{\kappa,\mu\pm۱}(\vec{r}) \tag{۱۳.۲}$$

از تعریف مولد اسپین در معادله ۸.۲ و با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم که:

$$g^+_{\kappa,-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = g^-_{\kappa,\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = ۰, \tag{۱۴.۲}$$

$$g^+_{\kappa,\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = g^-_{\kappa,-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = g_\kappa(\vec{r}). \tag{۱۵.۲}$$

برای مؤلفه‌ی پایین رابطه‌ها کمی پیچیده‌تر می‌شود زیرا عملگر $\vec{s}$ قسمت‌های فضایی و اسپین را به واسطه‌ی وابستگی به تکانه به‌هم مربوط می‌کند. ما تابع $\tilde{f}^\pm_{\kappa,\mu}$ را معرفی می‌کنیم که به‌توانیم به‌سادگی مؤلفه پایین تابع موج را استخراج کنیم.

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}^+_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \\ \tilde{f}^-_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} = U_p \begin{pmatrix} f^+_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \\ f^-_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{۱۶.۲}$$

که وارون آن نیز خواهد شد:

$$\begin{pmatrix} f^+_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \\ f^-_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} = U_p \begin{pmatrix} \tilde{f}^+_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \\ \tilde{f}^-_{\kappa,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{۱۷.۲}$$

سپس از معادلات ۱۲.۲ ، ۱۶.۲ و

$$U_p = \begin{pmatrix} P_z & P_- \\ P_+ & -P_z \end{pmatrix} \tag{۱۸.۲}$$

که $P_\pm = P_x \pm iP_y$، ما نتیجه می‌گیریم که $P_i\tilde{f}^+_{\kappa,-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = P_i\tilde{f}^-_{\kappa,\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = ۰$ که $i = z, \pm$ و این منجر می‌شود به:

$$\tilde{f}^-_{\kappa,\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = \tilde{f}^-_{\kappa,\frac{۱}{۲}}, \quad \tilde{f}^+_{\kappa,-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = \tilde{f}^+_{\kappa,-\frac{۱}{۲}}; \tag{۱۹.۲}$$

که $\tilde{f}^{-}_{\kappa,\frac{۱}{۲}}$ و $\tilde{f}^{+}_{\kappa,-\frac{۱}{۲}}$ دامنه‌های ثابتی هستند. و برای دیگر دامنه‌ها ما به‌دست می‌آوریم:

$$f^{+}_{\kappa,+\frac{1}{2}}(\vec{r}) = \frac{P_z}{P}\tilde{f}^{\pm}_{\kappa,\pm\frac{1}{2}}(\vec{r}) = -f^{-}_{\kappa,-\frac{1}{2}}(\vec{r}), \qquad (۲۰.۲)$$

و

$$f^{+}_{\kappa,-\frac{1}{2}}(\vec{r}) = \frac{P_-}{P}\tilde{f}^{\pm}_{\kappa,\pm\frac{1}{2}}(\vec{r}), \quad f^{-}_{\kappa,+\frac{1}{2}}(\vec{r}) = \frac{P_+}{P}\tilde{f}^{\pm}_{\kappa,\pm\frac{1}{2}}(\vec{r}) \qquad (۲۱.۲)$$

همچنین، از معادلات ۲۰.۲ و ۲۱.۲ خواهیم داشت:

$$f^{+}_{\kappa,\frac{1}{2}}(\vec{r}) = -f^{-}_{\kappa,-\frac{1}{2}}(\vec{r}) = f_\kappa(\vec{r}), \qquad (۲۲.۲)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})f^{+}_{\kappa,-\frac{1}{2}}(\vec{r}) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f^{-}_{\kappa,\frac{1}{2}}(\vec{r}), \qquad (۲۳.۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}f^{\pm}_{\kappa,\mp\frac{1}{2}}(\vec{r}) = \pm(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\frac{\partial}{\partial y})f^{\pm}_{\kappa,\pm\frac{1}{2}}(\vec{r}). \qquad (۲۴.۲)$$

بنابراین، تقارن اسپین ایجاب می‌کند که تابع موج دیراک به صورت:

$$\phi^{s}_{\kappa,\frac{1}{2}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_\kappa(\vec{r}) \\ 0 \\ if_\kappa(\vec{r}) \\ if^{-}_{\kappa,\frac{1}{2}}(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad \phi^{s}_{\kappa,-\frac{1}{2}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_\kappa(\vec{r}) \\ if^{+}_{\kappa,-\frac{1}{2}}(\vec{r}) \\ -if_\kappa(\vec{r}) \end{pmatrix} \qquad (۲۵.۲)$$

بیان شود.

پتانسیل‌های متقارن کروی

اگر پتانسیل‌ها داری تقارن کروی باشند هامیلتونی دیراک دارای یک تقارن اضافی $SU_L(2)$ خواهد شد. تقارن کروی به‌دین معناست که $V_s(\vec{r}) = V_s(r)$، $V_v(\vec{r}) = V_v(r)$ که $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ یا به‌عبارت دیگر پتانسیل‌ها به زاویه قطبی θ و زاویه سمتی φ وابسته نیستند. هامیلتونی دیراک تحت دوران حول هر سه

محور ثابت خواهد بود، $[L_i, H_s] = ۰$ که

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \vec{\ell} & ۰ \\ ۰ & \vec{\tilde{\ell}} \end{pmatrix} \qquad (۲۶.۲)$$

و $\vec{\tilde{\ell}} = U_p \vec{\ell} U_p$ و گروه ناوردا $SU_s(۲) \times SU_L(۲)$ خواهد شد. ویژه حالت‌های دیراک به‌طور هم‌زمان ویژه تابع $\vec{L}.\vec{L}$ و نیز L_z و J_z می‌باشد.

$$\vec{L}.\vec{L}\phi^s_{n_r,\ell,m,\mu}(\vec{r}) = \ell(\ell+۱)\phi^s_{n_r,\ell,m,\mu}(\vec{r}), \qquad (۲۷.۲)$$

$$L_z\phi^s_{n_r,\ell,m,\mu}(\vec{r}) = m\phi^s_{n_r,\ell,m,\mu}(\vec{r}), \qquad (۲۸.۲)$$

$$J_z\phi^s_{n_r,\ell,m,\mu}(\vec{r}) = M\phi^s_{n_r,\ell,m,\mu}(\vec{r}), \quad M = m+\mu, \qquad (۲۹.۲)$$

که n_r عدد کوانتومی شعاعی است و تعداد گره‌های دامنه‌ی بالایی تابع موج را در نقاط $r \neq ۰, \infty$ می‌شمارد، ℓ تکانه زاویه‌ای مداری و m تصویر آن روی محور z است و مولدهای $\vec{L}$ حالت‌هایی با ℓ یکسان و m مختلف به‌هم مربوط می‌کنند.

$$L_\pm\phi^s_{n_r,\ell,m,\mu}(\vec{r}) = \sqrt{(\ell \mp m)(\ell \pm m + ۱)}\phi^s_{n_r,\ell,m\pm۱,\mu}(\vec{r}), \qquad (۳۰.۲)$$

پس در مختصات کروی داریم:

$$\phi^s_{n_r,\ell,m,\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_{n_r,\ell}(r)Y^{(\ell)}_m(\theta,\varphi) \\ ۰ \\ i\sum_{j=\ell-\frac{۱}{۲}}^{\ell+\frac{۱}{۲}} A^j_m f_{n_r,\ell,j}(r)Y^{(\ell_j)}_m(\theta,\varphi) \\ i\sum_{j=\ell-\frac{۱}{۲}}^{\ell+\frac{۱}{۲}} B^j_{m,۱} f_{n_r,\ell,j}(r)Y^{(\ell_j)}_{m+۱}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \quad M = m + \frac{۱}{۲} \qquad (۳۱.۲)$$

$$\phi^s_{n_r,\ell,m,-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} ۰ \\ g_{n_r,\ell}(r)Y^{(\ell)}_m(\theta,\varphi) \\ i\sum_{j=\ell-\frac{۱}{۲}}^{\ell+\frac{۱}{۲}} B^j_{m,-۱} f_{n_r,\ell,j}(r)Y^{(\ell_j)}_{m-۱}(\theta,\varphi) \\ -i\sum_{j=\ell-\frac{۱}{۲}}^{\ell+\frac{۱}{۲}} A^j_m f_{n_r,\ell,j}(r)Y^{(\ell_j)}_m(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \quad M = m - \frac{۱}{۲} \qquad (۳۲.۲)$$

که $Y_m^{(\ell)}(\theta,\varphi)$ تابع هارمونیک کروی از مرتبه‌ی ℓ و ℓ_j می‌باشد که با رابطه‌ی زیر داده می‌شوند

$$\ell_{\ell+\frac{۱}{۲}} = \ell + ۱, \quad \ell_{\ell-\frac{۱}{۲}} = \ell - ۱ \tag{۳۳.۲}$$

و

$$A_m^j = -\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{(j+\frac{۱}{۲}+m)(j+\frac{۱}{۲}-m)}{j(j+۱)}}, \tag{۳۴.۲}$$

$$B_{m,\pm ۱}^j = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{(j+۱\pm(\ell_j-\ell)(m\pm\frac{۱}{۲}))(j\pm(\ell_j-\ell)(m\pm\frac{۱}{۲}))}{j(j+۱)}} \tag{۳۵.۲}$$

دلیل این‌که $\ell \pm ۱$ در دامنه‌ی پایین تابع موج ظاهر شده است وجود تبدیل یکانی U_p در مؤلفه‌ی پایین تکانه زاویه‌ای مداری است که ویژه‌مقدار پاریته و هم عدد تکانه زاویه‌ای مداری را به اندازه‌ی یک واحد تغییر می‌دهد. بنابراین، تقارن کروی تعداد دامنه‌های دوتایی(زوج قرین) ها را از چهار به سه کاهش می‌دهد و دو مورد از این دامنه‌ها به وسیله‌ی معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر به‌هم مربوط می‌شوند.

$$(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\ell+۲}{r})f_{n_r,\ell,\ell+\frac{۱}{۲}}(r) = (\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell-۱}{r})f_{n_r,\ell,\ell-\frac{۱}{۲}}(r) \tag{۳۶.۲}$$

با توجه به تعریف تکانه زاویه‌ای کل، $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ، می‌توان از پایه‌های جدید برای نوشتن تابع موج استفاده کرد که از پایه‌های اولیه ساخته شده باشد،

$$\psi^s_{n_r,\ell,j,M}(\vec{r}) = \sum_{m,\mu} C^{\ell(\frac{۱}{۲})j}_{m\mu M}\phi^s_{n_r,\ell,m,\mu}(\vec{r}) \tag{۳۷.۲}$$

که در این پایه‌ی جدید ویژه حالت هامیلتونی دیراک ویژه تابع L_z نیست اما ویژه تابع عملگر J_z است.

$$\vec{J}.\vec{J}\psi^s_{n_r,\ell,j,M}(\vec{r}) = j(j+۱)\psi^s_{n_r,\ell,j,M}(\vec{r}), \tag{۳۸.۲}$$

$$\vec{L}.\vec{L}\psi^s_{n_r,\ell,j,M}(\vec{r}) = \ell(\ell+۱)\psi^s_{n_r,\ell,j,M}(\vec{r}), \tag{۳۹.۲}$$

$$J_z\psi^s_{n_r,\ell,j,M}(\vec{r}) = M\psi^s_{n_r,\ell,j,M}(\vec{r}), \tag{۴۰.۲}$$

به‌جای استفاده از یک پایه‌ی چهارتایی برای این ویژه تابع بهتر است که یک تابع اسپین χ_μ را صریحاً معرفی کنیم. حالت‌هایی که دوتایی تبهگن هستند، حالت‌هایی هستند که با $j = \ell \pm \frac{۱}{۲}$ مشخص می‌شوند، پس ویژه تابع موج را در یک پایه‌ی دوتایی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi^s_{n_r,\ell,j,M}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_{n_r,\ell}(r)[Y^{(\ell)}(\theta,\varphi)\chi]^{(j)}_M \\ if_{n_r,\ell,j}(r)[Y^{(\ell_j)}(\theta,\varphi)\chi]^{(j)}_M \end{pmatrix} \tag{۴۱.۲}$$

که $[Y^{(\ell)}(\theta,\varphi)\chi]^{(j)}_M = \sum_{m\mu} C^{\ell(\frac{۱}{۲})j}_{m\mu M} Y^{(\ell)}_m(\theta,\varphi)\chi_\mu$.

۳.۱.۲ تقارن شبه اسپین

تقارن شبه اسپین زمانی رخ می‌دهد که $V_v(\vec{r}) = +C_{ps} - V_s(\vec{r})$ که C_{ps} ثابت است. پس هامیلتونی دیراک با تقارن شبه اسپین خواهد شد:

$$H_{ps} = \vec{\alpha}.c\vec{P} + V_v(\vec{r})(۱-\beta) + \beta(Mc^۲ + C_{ps}) \tag{۴۲.۲}$$

و مولد شبه اسپین به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\vec{\tilde{S}} = \begin{pmatrix} \vec{\tilde{s}} & ۰ \\ ۰ & \vec{s} \end{pmatrix} \tag{۴۳.۲}$$

بنابراین، $\vec{\tilde{S}} = \gamma_۵\vec{S}\gamma_۵$ که $\gamma_۵ = \begin{pmatrix} ۰ & I \\ I & ۰ \end{pmatrix}$. به‌دنبال استدلالی مشابه بخش قبل ما به‌دست‌می‌آوریم که:

$$f^+_{\tilde{\kappa},-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = f^-_{\tilde{\kappa},\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = ۰, \tag{۴۴.۲}$$

$$f^+_{\tilde{\kappa},\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = f^-_{\tilde{\kappa},-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = f_{\tilde{\kappa}}(\vec{r}), \tag{۴۵.۲}$$

$$g^+_{\tilde{\kappa},\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = -g^-_{\tilde{\kappa},-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = g_{\tilde{\kappa}}(\vec{r}), \tag{۴۶.۲}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})g^{+}_{\tilde{\kappa},-\frac{۱}{۲}}(\vec{r})=(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})g^{-}_{\tilde{\kappa},\frac{۱}{۲}}(\vec{r}), \qquad (۴۷.۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}g^{\pm}_{\tilde{\kappa},\mp\frac{۱}{۲}}(\vec{r})=\pm(\frac{\partial}{\partial x}\mp i\frac{\partial}{\partial y})g^{\pm}_{\tilde{\kappa},\pm\frac{۱}{۲}}(\vec{r}). \qquad (۴۸.۲)$$

بنابراین، برای تقارن شبه اسپین مؤلفه‌های پایین تابع موج دوتایی(زوج قرین)ها تابع موج فضایی مشابهی دارند، در صورتی‌که مؤلفه‌های بالایی آن‌ها توابع موج فضایی مختلفی دارند. مؤلفه‌های بالا، مؤلفه‌هایی هستند که در اکثر کاوش‌های آزمایشگاهی مربوط به هسته‌ها مورد توجه هستند.

بنابراین، ویژه حالت این دوتایی‌ها به صورت:

$$\phi^{ps}_{\tilde{\kappa},\frac{۱}{۲}}(\vec{r})=\begin{pmatrix} g_{\tilde{\kappa}}(\vec{r}) \\ g^{-}_{\tilde{\kappa},\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) \\ if_{\tilde{\kappa}}(\vec{r}) \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad \phi^{ps}_{\tilde{\kappa},-\frac{۱}{۲}}(\vec{r})=\begin{pmatrix} g^{+}_{\tilde{\kappa},-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) \\ -g_{\tilde{\kappa}}(\vec{r}) \\ ۰ \\ f_{\tilde{\kappa}}(\vec{r}) \end{pmatrix}. \qquad (۴۹.۲)$$

بیان می شود. پس، به‌جای هشت دامنه‌ی غیر مستقل برای این ویژه حالت دوتایی، چهار دامنه، که یکی برای مؤلفه‌ی پایین ($f_{\tilde{\kappa}}(\vec{r})$) و سه دامنه‌ی مختلف ($g_{\tilde{\kappa}}(\vec{r})$، $g^{+}_{\tilde{\kappa},-\frac{۱}{۲}}(\vec{r})$، $g^{-}_{\tilde{\kappa},\frac{۱}{۲}}(\vec{r})$) برای مؤلفه‌ی بالا خواهیم داشت که با معادله دیفرانسیل مرتبه اول در معادلات ۴۷.۲ و ۴۸.۲ به‌هم مربوط می‌شوند.

پتانسیل‌های متقارن کروی

اگر پتانسیل‌ها داری تقارن کروی باشند هامیلتونی دیراک نیز دارای یک تقارن اضافی $SU_{\tilde{L}}(۲)$ خواهد شد. در این صورت هامیلتونی دیراک تحت دوران حول هر سه محور ناوردا است، $[L_i, H_s]=۰$، که

$$\vec{\tilde{L}}=\begin{pmatrix} \vec{\tilde{\ell}} & ۰ \\ ۰ & \vec{\ell} \end{pmatrix} \qquad (۵۰.۲)$$

ویژه حالت‌های دیراک به‌طور هم‌زمان ویژه تابع $\vec{\tilde{L}}.\vec{\tilde{L}}$ و نیز $\tilde{L}_z$ و J_z می‌باشند.

$$\vec{\tilde{L}}.\vec{\tilde{L}}\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r})=\tilde{\ell}(\tilde{\ell}+۱)\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}), \qquad (۵۱.۲)$$

$$\tilde{L}_z\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) = \tilde{m}\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}), \tag{۵۲.۲}$$

$$J_z\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) = M\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}), \tag{۵۳.۲}$$

که $\tilde{n_r}$ عدد کوانتومی شبه شعاعی است، $M = \tilde{m} + \tilde{\mu}$ و مولدهای شبه تکانه زاویه‌ای مداری حالت‌هایی با $\tilde{\ell}$ یکسان و $\tilde{m}$ مختلف را به‌هم مربوط می‌کند.

$$\tilde{L}_\pm\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{(\tilde{\ell}\mp\tilde{m})(\tilde{\ell}\pm\tilde{m}+۱)}{۲}}\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}), \tag{۵۴.۲}$$

پس، ویژه حالت‌های هامیلتونی دیراک در مختصات کروی به فرم زیر نوشته می‌شوند:

$$\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=\tilde{\ell}-\frac{۱}{۲}}^{\tilde{\ell}+\frac{۱}{۲}} A^{\tilde{\ell}\tilde{\ell}_j}_{\tilde{m}\tilde{m}} g_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j}(r) Y^{(\tilde{\ell}_j)}_{\tilde{m}}(\theta,\varphi) \\ \sum_{j=\tilde{\ell}-\frac{۱}{۲}}^{\tilde{\ell}+\frac{۱}{۲}} A^{\tilde{\ell}\tilde{\ell}_j}_{\tilde{m}\tilde{m}+۱} g_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j}(r) Y^{(\tilde{\ell}_j)}_{\tilde{m}+۱}(\theta,\varphi) \\ i f_{\tilde{n_r},\tilde{\ell}}(r) Y^{(\tilde{\ell})}_{\tilde{m}}(\theta,\varphi) \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad M' = \tilde{m} + \frac{۱}{۲} \tag{۵۵.۲}$$

$$\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},-\frac{۱}{۲}}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=\tilde{\ell}-\frac{۱}{۲}}^{\tilde{\ell}+\frac{۱}{۲}} A^{\tilde{\ell}\tilde{\ell}_j}_{\tilde{m}\tilde{m}-۱} g_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j}(r) Y^{(\tilde{\ell}_j)}_{\tilde{m}-۱}(\theta,\varphi) \\ -\sum_{j=\tilde{\ell}-\frac{۱}{۲}}^{\tilde{\ell}+\frac{۱}{۲}} A^{\tilde{\ell}\tilde{\ell}_j}_{\tilde{m}\tilde{m}} g_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j}(r) Y^{(\tilde{\ell}_j)}_{\tilde{m}}(\theta,\varphi) \\ ۰ \\ i f_{\tilde{n_r},\tilde{\ell}}(r) Y^{(\tilde{\ell})}_{\tilde{m}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \quad M' = \tilde{m} - \frac{۱}{۲} \tag{۵۶.۲}$$

درست همانند تقارن اسپین، تقارن کروی تعداد دامنه‌های غیر مستقل ویژه حالت‌دوتایی‌ها را از چهار دامنه به سه دامنه کاهش می‌دهد و دو مورد از این دامنه‌ها را با معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر به‌هم مربوط می‌سازد.

$$(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\tilde{\ell}+۲}{r})g_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{\ell}+\frac{۱}{۲}}(r) = (\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tilde{\ell}-۱}{r})g_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{\ell}-\frac{۱}{۲}}(r) \tag{۵۷.۲}$$

با توجه به تعریف تکانه زاویه‌ای کل، $\vec{J}=\vec{\tilde{L}}+\vec{\tilde{S}}$ ، می‌توان از پایه‌های جدید برای نوشتن تابع موج استفاده کرد که از پایه‌های اولیه ساخته شده باشد،

$$\psi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j,M}(\vec{r})=\sum_{\tilde{m},\tilde{\mu}}C^{\tilde{\ell}(\frac{1}{2})j}_{\tilde{m}\tilde{\mu}M}\phi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) \qquad (۵۸.۲)$$

که در این پایه‌ی جدید ویژه حالت هامیلتونی دیراک ویژه تابع $\tilde{L}_z$ نیست اما ویژه تابع عملگر $\vec{J}.\vec{J}$ است.

$$\vec{J}.\vec{J}\psi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j,M}(\vec{r})=j(j+1)\psi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j,M}(\vec{r}), \qquad (۵۹.۲)$$

$$\vec{\tilde{L}}.\vec{\tilde{L}}\psi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j,M}(\vec{r})=\tilde{\ell}(\tilde{\ell}+1)\psi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j,M}(\vec{r}), \qquad (۶۰.۲)$$

$$J_z\psi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j,M}(\vec{r})=M\psi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j,M}(\vec{r}), \qquad (۶۱.۲)$$

به‌جای استفاده از یک پایه‌ی چهارتایی برای این ویژه تابع بهتر است که یک تابع اسپین $\chi_{\tilde{\mu}}$ را صریحاً معرفی کنیم. حالت‌هایی که دوتایی تبهگن هستند، حالت‌هایی هستند که با $j=\tilde{\ell}\pm\frac{1}{2}$ مشخص می‌شوند، پس ویژه تابع موج را در یک پایه‌ی دوتایی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi^{ps}_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j,M}(\vec{r})=\begin{pmatrix} g_{\tilde{n_r},\tilde{\ell},j}(r)[Y^{(\tilde{\ell}_j)}(\theta,\varphi)\chi]^{(j)}_M \\ if_{\tilde{n_r},\tilde{\ell}}(r)[Y^{(\tilde{\ell})}(\theta,\varphi)\chi]^{(j)}_M \end{pmatrix} \qquad (۶۲.۲)$$

پس تقارن کروی تعداد دامنه‌های غیر مستقل برای مؤلفه‌ی بالا به دو دامنه و برای مؤلفه‌ی پایین به یک دامنه کاهش می‌دهد.

برای تقارن شبه اسپین دامنه‌ی فضایی مؤلفه‌ی پایین برای این دوتایی(زوج قرین)ها یکسان است و بنابراین مناسب‌تر خواهد بود که مؤلفه‌ی پایین ویژه تابع با اعداد کوانتومی شعاعی و تکانه زاویه‌ای مداری برچسب زده شوند. البته، ویژه توابع مؤلفه‌ی بالا نیز بر اساس اعداد کوانتومی شعاعی و تکانه زاویه‌ای مداری برچسب زده می‌شوند. ما می‌بینیم که تکانه زاویه‌ای مداری مؤلفه‌ی بالا $\tilde{\ell}_j$ است و از معادله‌ی ۳۳.۲ ارتباط

بین تکانه زاویه‌ای مؤلفه‌ی بالا و تکانه زاویه‌ای شبه مداری بیان شده است.

$$\ell = \tilde{\ell} - ۱ \qquad for \quad j = \tilde{\ell} - \frac{۱}{۲} = \ell + \frac{۱}{۲}\,, \tag{۶۳.۲}$$

$$\ell' = \tilde{\ell} + ۱ = \ell + ۲ \qquad for \quad j = \tilde{\ell} + \frac{۱}{۲} = \ell' - \frac{۱}{۲}\,. \tag{۶۴.۲}$$

۲.۲ گره‌های شعاعی و حالت‌های مقید

در حالت کلی، ویژه حالت‌های دیراک چهار دامنه‌ی فضایی دارد که در معادله‌ی ۱۰.۲ مشاهده می‌شوند. تقارن اسپین یا تقارن شبه اسپین ارتباطی بین مؤلفه‌های بالا و بین مؤلفه‌های پایین تحمیل می‌کنند اما این شرایط ارتباطی بین خود مؤلفه‌های بالا با مؤلفه‌های پایین ایجاد نمی‌کنند. به‌هرحال، ویژه تابع دیراک ۳.۲ این دامنه‌ها را به وسیله‌ی معادله دیفرانسیل مرتبه اول در مختصات فضایی به‌هم مرتبط می‌کند.

$$\begin{pmatrix} f^{+}(\vec{r}) \\ f^{-}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{-ic}{E + Mc^{۲} + V_s - V_v} \begin{pmatrix} P_z g^{+}(\vec{r}) + P_{-} g^{-}(\vec{r}) \\ -P_z g^{-}(\vec{r}) + P_{+} g^{+}(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{۶۵.۲}$$

$$\begin{pmatrix} g^{+}(\vec{r}) \\ g^{-}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{ic}{E - Mc^{۲} - V_s - V_v} \begin{pmatrix} P_z f^{+}(\vec{r}) + P_{-} f^{-}(\vec{r}) \\ -P_z f^{-}(\vec{r}) + P_{+} f^{+}(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{۶۶.۲}$$

که ما در اینجا اعداد کوانتومی را ذکر نکردیم. بنابراین، ما می‌توانیم این سؤال را مطرح کنیم که: معنی و مفهوم این ارتباط‌ها چیست؟ در حالت کلی، ما باید چگونگی این ارتباط‌ها را بیابیم. برای تقارن کروی ما این سؤال را به جستجو می‌پردازیم و بایستی به‌توانیم نتیجه‌ی نهایی و قطعی را استخراج کنیم.