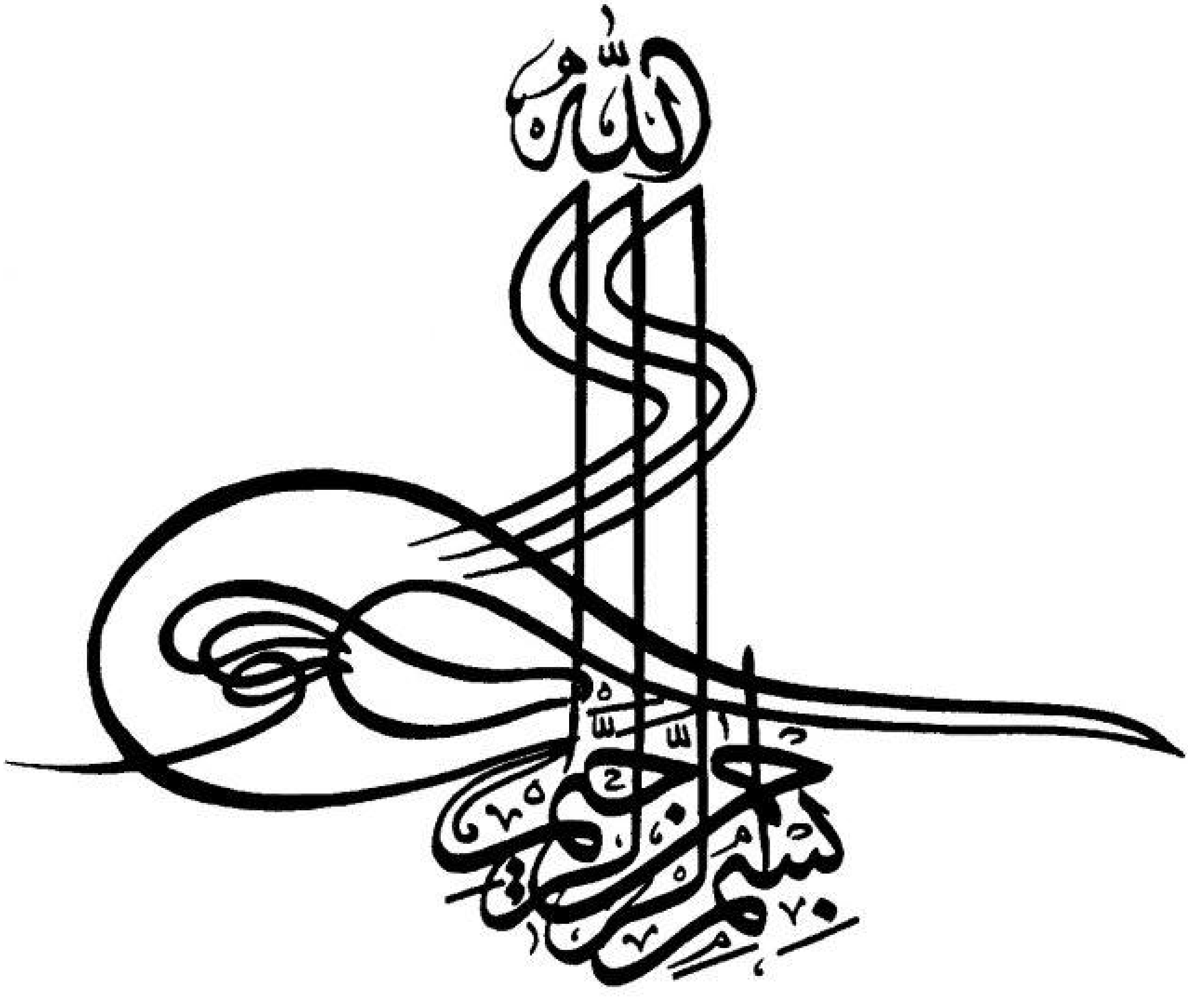
بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی
دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه آمار و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی آمار ریاضی

عنوان:

برآورد بیز و بیز تجربی پارامتر n در توزیع‌های دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی

استاد راهنما:

دکتر مسعود گنجی

استاد مشاور:

دکتر نسرین اقبالی

پژوهشگر:

مسعود عظیمیان

بهمن ماه ۱۳۹۲

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

و کسانی که دوستشان می دارم

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت. به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌توقع، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای فرزانه‌ی خود، جناب آقای **دکتر مسعود گنجی** صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از سرکارخانم **دکتر نسرین اقبالی** که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال تشکر را دارم.

از استاد گرانقدرجناب آقای **دکتر ولی زاردشت** که زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را تقبّل فرمودند، سپاسگذاری می‌کنم.

از آقای دکتر صفر پارسی نیز که همواره از هیچ کمکی دریغ ننموده‌اند کمال تشکر را دارم.

و در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکرمی‌کنم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند. همچنین از تمامی دوستان دوران تحصیل که همواره یار و همدمم بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

خدایا چنان کن سرانجام کار تو خشنود باشی و ما رستگار.

مسعود عظیمیان

زمستان ۱۳۹۲

نام خانوادگی: عظیمیان نام: مسعود

عنوان پایان‌نامه:
برآورد بیز و بیز تجربی پارامتر n در توزیع‌های دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی

استاد راهنما: دکتر مسعود گنجی
استاد مشاور: دکتر نسرین اقبالی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: آمار ریاضی گرایش: محض
دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ دفاع: ۹۲/۱۱/۰۵ تعداد صفحات: ۱۳۶

چکیده

در این پایان‌نامه مسئله‌ی برآورد پارامتر n در توزیع‌های دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی از دیدگاه بیزی در دو حالت معلوم و نامعلوم بودن پارامتر θ (احتمال موفقیت) بررسی گردیده است. پارامتر n در توزیع دوجمله‌ای تعداد آزمایش‌ها و در توزیع دوجمله‌ای منفی تعداد موفقیت‌ها را در یک دنباله از آزمایش‌های برنولی نشان می‌دهد. برآوردگربیز و بیزتجربی پارامتر n، در هر توزیع با در نظر گرفتن یک توزیع پیشین از چپ بریده شده برای n و یک توزیع بتا برای θ تحت تابع زیان مربع خطا بدست آورده شده‌اند. روش‌های دیگر برآورد، از جمله روش گشتاوری و ماکسیمم درستنمایی و غیره که توسط محققان دیگر بکار برده شده‌اند نیز معرفی گردیده است. در پایان برآوردگرهای بیز و بیز تجربی بدست آمده با برآوردگرهای قبلی مقایسه می‌گردد.

کلیدواژه‌ها: برآورد بیزی، برآورد بیز تجربی، توزیع دوجمله‌ای، توزیع دوجمله‌ای منفی

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

پیشگفتار

برآورد پارامتر n در توزیع دوجمله‌ای به عنوان یک مسئله، بیش از نیم قرن است که توجه محققین را به خود جلب کرده است. درباره‌ی برآورد پارامتر n وقتی θ (احتمال موفقیت) معلوم یا نامعلوم است مقالات بسیاری به چاپ رسیده است. اما این مسئله هنوز هم حداقل به چهار دلیل زیر حائز اهمیت است:

۱- کم برآورد [۱] شدید n که یک مشکل اساسی در کاربردهای عملی است.

۲-عدم وجود راه حلی با محاسبات ساده و مقایسه‌ی برآوردهای معرفی شده و انتخاب یکی به عنوان برآورد بهینه.

۳-ناپایداری برآوردهای معرفی شده (به گونه‌ای که با تغییر کوچکی در یک یا دو مشاهده از نمونه شاهد نوسانات بسیار زیادی در برآورد پارامتر n هستیم).

۴-کاربردهای بسیار این مدل احتمال در زیست‌شناسی و هر زمینه‌ی دیگری که درآن تعداد کل یک جمعیت متناهی مجهول بوده و بخواهیم بر اساس دنباله‌ای از مشاهدات آن را برآورد کنیم.

برخی از آماردانان این مسئله را از دیدگاه کلاسیک و برخی دیگر آن را از دیدگاه بیزی مورد بررسی قرار داده‌اند. در این پایان‌نامه این برآوردگرها را معرفی و به مقایسه آن‌ها از لحاظ معیار میانگین مربع خطا می‌پردازیم. این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی بایوود [۲] (۲۰۱۱) تدوین شده است. مسئله‌ی دیگر که در اینجا مورد بررسی قرار گرفته است برآورد پارامتر n (تعداد موفقیت‌ها) در

[۱] underestimate
[۲] Bayoud

توزیع دوجمله‌ای منفی است که با روش بیز و روش بیز تجربی به دست آورده می‌شود. این کار در فصل چهارم از این پایان‌نامه ارائه گردیده که حاصل آن یک مقاله می‌باشد (گنجی و همکاران [۱] (۲۰۱۳)). این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد: در فصل‌های اول و دوم تعاریف و موضوعات لازم که برای فصل‌های بعدی مورد نیازاست، بیان می‌گردد. در فصل سوم برآوردهای پارامتر n در توزیع دوجمله‌ای و مقایسه آنها بیان می‌گردد و در فصل چهارم همانطور که گفتیم برآوردهای پارامتر n درتوزیع دوجمله‌ای منفی معرفی شده است. در این پایان‌نامه از نرم‌افزار متمتیکا [۲] برای محاسبات عددی و شبیه‌سازی استفاده شده است.

[۱] Ganji et al.
[۲] Mathematica

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم و تعاریف اولیه و همچنین موضوعات و قضایای لازم که در فصل‌های بعدی لازم می‌باشد را بیان می‌کنیم. در واقع این فصل شامل بخش‌های روش‌های برآوردیابی، قضایا و نامساوی‌های معروف، توزیع‌های آماری، روش‌های محاسبه‌ی عددی انتگرال و استنباط بیزی می‌باشد. در هر کدام از این بخش‌ها، تعاریف و قضایای مربوط به هر بخش بیان شده‌است.

۲.۱ روش‌های برآوردیابی

تعریف ۱.۲.۱. تابع درستنمایی [۱]: فرض کنید $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ ($\boldsymbol{\Theta}$ فضای پارامترهای نامعلوم است) و $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ بردار n متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال توأم $f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$ باشد. برای هر مقدار داده شده‌ی $\mathbf{X} = \mathbf{x}$، تابع درستنمایی $\mathbf{x}$ را تابع چگالی احتمال توأم $\mathbf{X}$، یعنی $f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$، تعریف می‌کنیم که به صورت تابعی از $\boldsymbol{\theta}$ در نظر گرفته می‌شود و آن را با نماد $L(\boldsymbol{\theta})$ نمایش می‌دهیم، به عبارتی $L(\boldsymbol{\theta}) = f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$.

تعریف ۲.۲.۱. برآورد ماکسیمم درستنمایی: اگر $\delta(\mathbf{X})$ برآوردگری برای $\boldsymbol{\theta}$ باشد به طوری که

۱)برای هر $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ $\quad P_{\boldsymbol{\theta}}(\delta(\mathbf{X}) \in \boldsymbol{\Theta}) = 1,$

۲)برای هر $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ $\quad L(\delta(\mathbf{X})) \geqslant L(\boldsymbol{\theta}),$

آنگاه $\delta(\mathbf{X})$ به عنوان برآوردگر ماکسیمم درستنمایی [۲] (MLE) $\boldsymbol{\theta}$ تعریف می‌شود.

در واقع روش ماکسیمم درستنمایی عبارت است از ماکسیمم‌کردن تابع درستنمایی نسبت به $\boldsymbol{\theta}$، و آن مقدار $\boldsymbol{\theta}$ که تابع درستنمایی را ماکسیمم می‌کند، برآورد ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ می‌نامیم.

[۱] Likelihood function
[۲] Maximum Likelihood estimation

تعریف ۳.۲.۱. برآورد گشتاوری: فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از توزیع $F_{\boldsymbol{\theta}}$ باشد به طوری که $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_k) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. همچنین فرض کنید k گشتاور اول این توزیع که به صورت توابعی از $\boldsymbol{\theta}$ هستند، وجود داشته باشد. می‌دانیم که گشتاور $r-$ام، در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \mu_r &= \mu_r(\boldsymbol{\theta}) \\ &= E_\theta(X_1^r) \quad r = 1, ..., k \end{aligned}$$

اگر

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \quad r = 1, ..., k;$$

نمایانگر $r-$امین گشتاور نمونه‌ای بر پایه‌ی نمونه‌ی تصادفی داده شده باشد، آنگاه برآوردهای گشتاوری پارامترهای مجهول $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_k)$ از حل k معادله‌ی زیر حاصل می‌شوند:

$$\mu_r = M_r \quad r = 1, ..., k;$$

معمولاً برآورد گشتاوری [1] (MME) $\boldsymbol{\theta}$ را با $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ نمایش می‌دهند و لزومی ندارد که منحصر به فرد باشد.

تعریف ۴.۲.۱. فضای برآوردگرها: مجموعه کلیه‌ی برآوردگرهای ممکن پارامتر را فضای برآوردگرها (کلاس برآوردگرها) گوییم و با D نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. برآوردگر پایدار [2] و برآوردگر ناپایدار [3]: یک برآوردگر را که براساس نمونه تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ بدست آمده است را ناپایدار گویند، اگر نسبت به تغییرات کوچک در مقادیر نمونه بسیار حساس باشد و با تغییر نمونه دچار تغییرات بسیار زیادی شود و در غیر اینصورت آن را پایدار گویند.

[1] Method of moment estimation
[2] stable
[3] unstable

تعریف ۶.۲.۱. اگر $\mathbf{X} = (X_1, X_2..., X_k)$ یک نمونه تصادفی باشد، آنگاه آماره‌های ترتیبی متناظر را با $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(k)}$ نشان می‌دهیم که درآن $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(k)}$.

تعریف ۷.۲.۱. تابع زیان [1]: فرض کنید در برآورد پارامتر $\theta \in \Theta$ برآوردگر $\delta(\mathbf{X}) \in D$ را در نظر بگیریم. مهمترین خصوصیت یک برآوردگر خوب آن است که برآوردی را برای θ بدست دهد که تا حد ممکن به مقدار واقعی θ نزدیک باشد. میزان این نزدیکی را با تابع زیان اندازه گیری می‌کنیم که با تابع $L(\theta, \delta(\mathbf{X})) : \Theta \times D \to [0, +\infty)$ نمایش داده می‌شود که برای هر θ و $\delta(\mathbf{X})$، $L(\theta, \delta(\mathbf{X})) \geqslant 0$ و اگر $\theta = \delta(\mathbf{X})$ آنگاه $L(\theta, \delta(\mathbf{X})) = 0$. چند تابع زیان مشهور عبارتند از :

۱-تابع زیان مربع خطا $\quad L(\theta, \delta(\mathbf{X})) = (\delta(\mathbf{X}) - \theta)^2$

۲-تابع زیان قدرمطلق خطا $\quad L(\theta, \delta(\mathbf{X})) = |\delta(\mathbf{X}) - \theta|$

۳-تابع زیان لاینکس[2] $\quad L(\theta, \delta(\mathbf{X})) = b(e^{a(\delta(\mathbf{X})-\theta)} - a(\delta(\mathbf{X})-\theta) - 1)$

چون تابع زیان بستگی به $\delta(\mathbf{X})$ دارد پس مقدار آن ثابت نیست و یک متغیر تصادفی است. برای مقایسه دو برآوردگر، امید ریاضی تابع زیان این دو برآوردگر را که تابعی از θ می‌باشد با یکدیگر مقایسه می‌کنند که به آن تابع مخاطره [3] گویند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(\mathbf{X}))].$$

تعریف ۸.۲.۱. تابع توزیع تجربی [4]: فرض کنید X_1،X_2،...،X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع تجمعی $F(t)$ باشند. آنگاه تابع توزیع تجربی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{F}_n(t) = \frac{\#(X_i \leqslant t)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,t]}(X_i)$$

که درآن $\#(X_i \leqslant t)$ برابر تعداد xهای کوچکتر یا مساوی t است و $I_A(x)$ یک تابع نشانگر برای پیشامد A است که اگر $x \in A$ برابر یک و در غیر اینصورت برابر صفر است. برای یک t ثابت، تابع نشانگر $I_{(-\infty,t]}(X_i)$، یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر $p = F(t)$ است. بنابراین $n\hat{F}_n(t)$ یک

[1] Loss Function
[2] Linex Function
[3] Risk Function
[4] Empirical Distribution Function

متغیر تصادفی دوجمله‌ای با میانگین $nF(t)$ و واریانس $nF(t)(1-F(t))$ است که در واقع بیانگر این است که، $\hat{F}_n(t)$ یک برآوردگر نااریب برای $F(t)$ است. $\hat{F}_n(t)$ یک تابع پله‌ای است که در هر مقدار مشاهده شده به میزان $\frac{1}{n}$ پرش دارد.

۳.۱ قضایا و نامساوی‌های معروف

قضیه ۱.۳.۱. *قانون قوی اعداد بزرگ:* *فرض کنید* $X_1, X_2, \ldots$ *یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع روی فضای احتمال* $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ *باشند. قرار دهید* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ، $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ *و* $E(X_n) = \mu$ ، *آنگاه*

$$P[\lim_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu] = 1$$

یا به طور معادل وقتی $n \to \infty$ ، *تقریباً همه‌جا* $\bar{X}_n \longrightarrow \mu$. *به عبارتی می‌توان گفت میانگین نمونه در احتمال تقریبا همه جا به میانگین جامعه میل می‌کند.*

تعریف ۱.۳.۱. تقریب استرلینگ: به ازای n های بزرگ : $n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

۴.۱ توزیع‌های آماری

تعریف ۱.۴.۱. توزیع بتا : اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{Beta(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0;$$

باشد، آنگاه گوییم X دارای توزیع بتا است و با نماد $X \sim Beta(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهیم. میانگین و واریانس این توزیع بترتیب برابر است با:

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}, \qquad E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی توزیع بتا عبارت است از:

$$F_X(x;\alpha,\beta) = I_{(0,1)}(x) \int_0^x \frac{1}{B(\alpha,\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du + I_{(1,\infty)}(x).$$

که $\int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du$ را بتای ناقص می‌نامند.

تعریف ۲.۴.۱. توزیع بتا-دوجمله‌ای: اگر متغیر تصادفی گسسته‌ی X دارای تابع جرم احتمال

$$f_X(x;n,\alpha,\beta)=\left(\begin{array}{c}n\\x\end{array}\right)\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}I_{\{0,1,\dots,n\}}(x),$$

باشد که درآن $\alpha>0,\beta>0$ و n یک عدد صحیح نامنفی است. گوییم که X دارای توزیع بتا-دوجمله‌ای با پارامترهای n، α و β است و آن را با نماد $X\sim BB(n,\alpha,\beta)$ نمایش می‌دهیم. میانگین و واریانس این توزیع به ترتیب برابر است با:

$$Var(X)=\frac{n\alpha\beta(n+\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)},\qquad E(X)=\frac{n\alpha}{\alpha+\beta}.$$

تعریف ۳.۴.۱. توزیع دوجمله‌ای منفی: اگر متغیر تصادفی گسسته‌ی X دارای تابع جرم احتمال

$$f_X(x;n,\theta)=\left(\begin{array}{c}n+x-1\\x\end{array}\right)\theta^n(1-\theta)^x,\quad x=0,1,2,\dots$$

باشد که درآن $n=1,2,3,\dots$ و $0<\theta<1$. گوییم که X دارای توزیع دوجمله‌ای منفی است و آن را با نماد $X\sim NB(n,\theta)$ نمایش می‌دهیم. میانگین و واریانس این توزیع به ترتیب برابر است با:

$$Var(X)=\frac{n(1-\theta)}{(\theta)^2},\qquad E(X)=\frac{n(1-\theta)}{\theta}.$$

رابطه‌ی بین توزیع‌های دوجمله‌ای و پواسن: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و دارای توزیع پواسن به ترتیب با پارامترهای λ و λ' باشند آنگاه $Z=X+Y$ دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda+\lambda'$ است و $X|Z=z$ نیز دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای z و $\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}$ است.

$$Z=X+Y\sim Poisson(\lambda+\lambda'),\quad X|Z=z\sim Bin(z,\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}).$$

۵.۱ روش‌های محاسبه‌ی عددی انتگرال

در حل مسائل اقصادی و همچنین در زمینه‌های دیگر معمولا به انتگرال‌هایی برخورد می‌کنیم که به شکل $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}f(x)dx$ یا $\int_0^{\infty} e^{-x}f(x)dx$ هستند. برای محاسبه‌ی(عددی) این چنین انتگرال‌هایی به

ترتیب از دو روش گاوس-هرمیت [1] و روش مربع‌سازی گاوس-لاگر [2] استفاده می‌شود. ما دراینجا روش مربع سازی گاوس-لاگر را توضیح می‌دهیم.

در این روش برای محاسبه‌ی انتگرال $\int\limits_0^\infty e^{-x}f(x)dx$، این انتگرال را با مجموع $\sum\limits_{j=1}^{m} w_j f(x_j)$ تقریب می‌زنیم، یعنی $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}f(x)dx \simeq \sum\limits_{j=1}^{m} w_j f(x_j)$ که درآن x_j مقادیر صفرهای چند جمله‌ای لاگر هستند و w_jها وزن‌هایی هستند که به صورت $w_j = \frac{(n!)^2}{x_i(L'_m(x_i))^2}$ تعریف می‌شوند. در ریاضیات چند جمله‌ای‌های لاگر عبارتند از حل معادله‌ی لاگر ($xy'' + (1-x)y' + my = 0$) ، که معمولاً با دنباله چندجمله‌ای های $L_0, L_1 ...$, نشان داده می‌شوند و جملات این دنباله با فرمول زیر مشخص می‌شوند:

$$L_m(x) = \frac{e^x}{m!}\frac{d^m}{dx^m}(e^{-x}x^m).$$

به عنوان مثال برای محاسبه $\int\limits_0^1 e^{-x}\sin x dx$ که دارای مقدار ۰/۵ است با این روش داریم :

$$\int\limits_0^1 e^{-x}\sin x dx \approx \sum_{i=1}^{3} w_i(x)\sin x_i = 0/4989$$

البته با افزایش m مقدار تقریب نیز دقیق‌ترمی‌شود. آبراموویتز و استگان [3] (۱۹۷۰) مقادیر x_jها و w_jها را برای مقادیر مختلف m بدست آورده ودر یک جدول مرتب کرده‌اند که برای $m = 8$ و $m = 15$ جدول مقادیر این بردارها و همچنین برنامه متمتیکای مربوط به تولید آنها را در پیوست الف ضمیمه کرده‌ایم که برای هر m دلخواه می‌توان این بردارها را تولید کرد. .

۶.۱ استنباط بیزی

همانطور که می‌دانیم در روش‌های کلاسیک پارامتر θ را یک مقدار ثابت نامعلوم در نظرمی‌گیریم و یک نمونه‌ی تصادفی X_1،X_2،...،X_n از جامعه‌ای که دارای توزیع $F_\theta(x)$ بود جمع‌آوری کرده و براساس آن در مورد θ استنباط می‌کنیم. در روش بیزی θ را یک کمیتی در نظر می‌گیریم که خود

[1] Gauss-Hermit
[2] Gauss-Laguerre quadrature
[3] Abramowitz and Stegun