دانشگاه الزهرا (س)

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه جهت اخذ کارشناسی ارشد

رشتهٔ ریاضی گرایش محض

عنوان

دو نمونه‌ی جدید معادله‌ی پخش غیرخطی غیرموضعی برای کاهش نویز

استاد راهنما

دکتر شهناز طاهری

استاد مشاور

دکترعلیمردان شاه رضایی

دانشجو

مهناز رحمانی

مهر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

همسرم علی

و

گل زندگیم صبا

که در همه حال مشوق و پشتیبان من بوده اند.

قدردانی و تشکر

حمد و سپاس خداوندی که ما را آفرید و اندیشیدن را در ما نهاد تا بیندیشیم و در راه علم و دانش قدم برداریم و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

اکنون که به حول و قوه‌ی الهی نگارش این رساله به پایان رسیده است از همسر و دختر عزیزم صبا و نیز پدر و مادر مهربانم، کمال قدردانی و تشکر را دارم که هر چه دارم مرهون لحظه لحظه تلاش و کوشش بی‌وقفه‌ی ایشان و از وجود پر مهر و عطوفت آن‌هاست.

در این جا لازم می‌بینم که از اساتید ارجمند، سرکار خانم دکتر شهناز طاهری و جناب آقای دکتر علیمردان شاه رضایی که در طول مسیر یاری‌ام نمودند، کمال قدردانی و تشکر را نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه دو نمونه‌ی جدید معادله‌ی پخش غیرخطی و غیرموضعی که برای کاهش نویز پیشنهاد شده‌اند، مورد بررسی و اجرا قرار می‌گیرند. این معادلات هر دو مرتبط با معادله‌ی مشهور پرونا-ملک هستند به نوعی می‌توان آن‌ها را الگوی منظم شده‌ی جدیدی برای معادله‌ی پرونا-ملک دانست. مطالب برگرفته از مقاله زیر است:

Patrick Guidotti, James V. Lambers, "Two New Nonlinear Nonlocal Diffusions for Noise Reduction," (2009) 33; 25-37

این دو مطلوب‌ترین خصوصیات معادله‌ی پرونا-ملک را حفظ کرده و بهبود می‌بخشند و هم‌زمان معادلات خوش‌خیمی را در اختیار می‌گذارند که گسسته‌سازی طبیعی و پایداری را پذیرا هستند. اما، برخلاف سایر الگوهای منظم‌شده، توابع هموار قطعه‌ای، توابعی با تعادل پایدار هستند و در نتیجه‌ی این امر، رفتار دینامیکی آن‌ها و رفتاری که مربوط به پیاده‌سازی گسسته است کاملاً قابل درک بوده و منجر به تناقض نمی‌شود. وجود این تعادل غیربدیهی توضیح می‌دهد که چرا محو و مات‌شدگی تحت کنترل می‌ماند. هم‌چنین خوش‌خیم بودن آن دو نیز به اثبات رسیده است. در این مقاله آزمایشات عددی معرفی شده‌اند که خصوصیات اصلی مدل‌های جدید را نشان می‌دهند و دید عمیقی در مورد رفتار جالب دینامیکی آن‌ها فراهم می‌آورند و به همان خوبی کارآمدی آن‌ها را به عنوان ابزار نویززدایی نمایش می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: *پخش غیرخطی، پخش غیرموضعی، نویززدایی، بازیابی تصویر، فیلترهای هموارسازی PDE، فیلترهای تطبیقی، فیلترهای دامنه‌ی فرکانس، تناقض پرونا-ملک، فیلتر پخش غیرخطی، معادله‌ی پرونا-ملک، الگوریتم غیرموضعی NL-means، تعادل غیربدیهی، خوش‌خیمی*

فهرست

لیست تصاویر

مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غالباً در ریاضیات، علوم طبیعی و مهندسی به کار می‌روند که زبانی بین رشته‌ای برای علوم تشکیل می‌دهند. معادله نفوذ از جمله معادلات دیفرانسیل جزئی است که در علم پردازش تصویر کاربرد دارد. نویززدایی یکی از اساسی‌ترین مسائل در پردازش تصویر است. این مسأله به همراه مسأله‌ی محوزدایی از اجزای اجتناب‌ناپذیر به دست آوردن تصویر است.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد:

در فصل اول، تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز فصل‌های بعدی ارائه می‌گردد ([۴]، [۵]، [۷]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۸]، [۱۹]، [۳۰]، [۳۶]، [۳۸]، [۴۰]، [۴۴]، [۴۸]). در فصل دوم، به معرفی علم پردازش تصویر و مروری بر چند الگوریتم نویززدایی می‌پردازیم یک الگوریتم جدید نویززدایی موسوم به Nl-means غیرموضعی معرفی شده و مقایسه‌ی آن با روش‌های ذکر شده و فیلتر پخش غیرخطی و نیز تناقض پرونا-ملک مورد بررسی قرار می‌گیرد ([۱]، [۱۱]، [۳۰]، [۴۵]). در فصل سوّم، خوش‌خیم بودن دو نمونه‌ی جدید معادله‌ی پخش غیرخطی به اثبات می‌رسد ([۲۵]، [۲۶]، [۲۷]). در فصل چهارم، پیاده‌سازی عددی و آزمایش‌های عددی را در ریاضی محض بیان می‌کنیم ([۱۰]، [۲۷]، [۴۰]).

chapter۱

فصل ۱

پردازش تصویر

۱.۱ مقدمه

در این فصل به معرفی علم پردازش تصویر و مروری بر چند الگوریتم نویززدای تصویر و یک الگوریتم جدید می‌پردازیم. تحقیق برای روش‌های کارآمد نویززدایی تصویر در اختلاط با آنالیز تابعی و آمار هم‌چنان به عنوان یک چالش به قوت خود باقی است. علی‌رغم پیچیدگی‌های روش‌هایی که به تازگی طرح شده، اکثر الگوریتم‌ها به سطح دلخواهی از کارایی نرسیده‌اند. تمام آن‌ها هنگام متناظر شدن نمونه‌ی تصویر با مفروضات الگوریتمی عملکرد برجسته‌ای دارند. اما در کل شکست خورده و مصنوعی جلوه می‌کنند یا ساختار ریز و ظریف تصویر را حذف می‌کنند. تمرکز اصلی در ابتدا تعریف یک روش ریاضی و آزمایش برای مقایسه و طبقه‌بندی الگوریتم‌های نویززدای تصویر کلاسیک است و در مرحله‌ی بعد ارائه‌ی یک الگوریتم جدید NL-means غیرموضعی[۱] با توجه به حفظ ساختار در یک تصویر دیجیتالی است.

آنالیز ریاضی بر مبنای آنالیز «نویزِ روش[۲]» تعریف شده است. مانند تفاوت بین یک تصویر

---

[۱] nonlocal

[۲] noise method

دیجیتالی[۳] و نمونه‌ی بدون نویز آن.

عملکرد نویززدایی در کل روش‌های مورد توجه، به چهار روش مقایسه می‌شوند [۱۱]:

۱- ریاضی: مرتبه‌ی مجانبیِ نویز روش تحت مفروضات منظم.

۲- ادراک- ریاضی: الگوریتم‌های ساخته شده و توضیح آن‌ها به عنوان اغتشاش مدل تصویر.

۳- آزمایش کمّی: تفاوت نسخه بدون نویز تا تصویر اولیه توسط جدول‌های $L^۲$.

۴- هر چند قوی‌ترین روش ارزیابی همان نگرش بر تأثیر نویز روش روی تصویر طبیعی می‌باشد. این نویز روش هر چه به یک نویز سفید نزدیک‌تر باشد، روش بهتر است.

۲.۱ پردازش تصویر

امروزه با گسترش روزافزون روش‌های مختلف، اخذ اطلاعات گسسته از وسایلی نظیر پویشگرها و دوربین‌های دیجیتالی، پردازش تصویر کاربرد فراوانی یافته است. تصاویر حاصله از این اطلاعات همواره کم و بیش همراه مقداری نویز بوده و مواردی نیز دارای مشکل محوشدگی مرزهای نمونه‌های داخل تصویر می‌باشند که موجب کاهش وضوح تصویر دریافتی می‌گردند. به مجموعه عملیات و روش‌هایی که به منظور کاهش عیوب و افزایش کیفیت ظاهری تصویر مورد استفاده قرار می‌گیرد، پردازش تصویر نامیده می‌شود [۲۸].

یک تصویر دیجیتالی، مرکب از تعداد متناهی عناصر است که هر کدام دارای مکان و مقدار خاصی است. این عناصر را پیکسل[۴] می‌نامند. اطلاعات مربوط به هر پیکسل به صورت یک عدد در کامپیوتر ذخیره می‌شود که در واقع درایه یک ماتریسِ تصویر را می‌سازد. این اطلاعات معمولاً به میزان رنگ یا میزان روشنایی آن نقطه مربوط می‌شوند. در تصاویر سیاه و سفید عدد مربوط به هر پیکسل عموماً میزان خاکستری بودن آن نقطه را نشان می‌دهد [۲۸].

۳ digital image

۴ pixel

یک تصویر پیوسته را می‌توان یک تابع دو بعدی مثل $f(x,y)$ در نظر گرفت که x و y مختصات مکان هستند و f در هر جفت از مختصات (x,y)، شدت یا سطح خاکستری تصویر در آن نقطه است. وقتی x و y و مقادیر شدت f متناهی و کمیت‌هایی گسسته باشند، تصویر را تصویر دیجیتالی می‌نامیم [۹].

اگرچه حوزه‌ی کار با تصویر بسیار وسیع است، ولی عموماً محدوده مورد توجه در چهار زمینه بهبود کیفیت ظاهری[۵]، بازسازی تصاویر مختل شده[۶]، فشرده‌سازی و رمزگزاری تصویر[۷] و تحلیل تصویر متمرکز می‌گردد. علی‌رغم تولید انبوه تصاویر دیجیتالی و همه نوع فیلم‌هایی که اغلب در شرایط ضعیفی گرفته می‌شوند، نیاز به روش‌های بازیابی کارآمد تصویر افزایش یافته است. یک تصویر دیجیتالی در کل مانند یک ماتریس سطح-خاکستری یا مقادیر رنگی رمزگزاری می‌شود. در مورد یک فیلم این ماتریس سه‌بعدی است که بعد سه متناظر با زمان است. هر زوج $(i,u(i))$، که $u(i)$ مقدار u در i است یک پیکسل در واقع کوتاه شده‌ی «عنصر تصویر» نامیده می‌شود. در مورد تصاویر سطح-خاکستری، i نقطه‌ای روی شبکه است و $u(i)$ یک مقدار حقیقی است. در مورد تصاویر رنگی کلاسیک، $u(i)$ یک سه تایی از مقادیر مؤلفه‌های قرمز، سبز، آبی است. تمام آن‌چه می‌توانیم بگوییم فیلم‌ها، تصاویر سه بعدی، تصاویر رنگی یا چند طیفی را به طور یکسان شامل می‌شود که در این جا به خاطر سادگی در نشانه‌گذاری و نمایش آزمایشات به تصاویر سطح-خاکستری دوبعدی مستطیلی بسنده می‌کنیم [۱۱].

دو محدودیت اصلی، در صحت و دقیقی تصویر به صورت تاری و نویز دسته‌بندی می‌شوند. برای سیستم‌های اکتساب تصویر، تاری به صورت ذاتی وجود دارد.

هرکدام از مقادیر پیکسلی $u(i)$، نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری شدت نور است که معمولاً توسط ماتریس (CCD) با یک سیستم متمرکز نوری به دست آمده است که در آن ماتریس (CCD) یک ماتریس ابزاری جفت شده‌ی بار الکتریکی است. هر رباینده‌ی CCD به‌طور تقریبی یک مربع است که در آن شمار فوتون‌های دریافتی برای یک دوره‌ی متناظر با زمان حساب می‌شود.

[۵] enhancement

[۶] restoration

[۷] compression and coding

وقتی که منبع نور دائمی است شمار فوتون‌های دریافتی توسط هر پیکسل براساس قضیه‌ی حد مرکزی حول و حوش میانگین خود نوسان می‌کنند. به عبارت دیگر برای n فوتون دریافتی می‌توان نوسان‌هایی از مرتبه‌ی $\sqrt{n}$ انتظار داشت. به‌علاوه اگر هر رباینده به اندازه کافی سرد نشود فوتون‌های ساختگی گرمایی دریافت می‌کند که آشفتگی نهایی را معمولاً نویز پنهانی می‌نامند. به طور تقریبی می‌توان نوشت:

$$v(i) = u(i) + n(i),$$

که در آن $i \in I$ و $v(i)$ مقدار مشاهده شده است و $u(i)$ «مقدار واقعی» در پیکسل i خواهد بود. مقداری که توسط میانگین گرفتن شمارش فوتون‌ها در بلند مدت مشاهده می‌شود و $n(i)$ آشفتگی نویز است. مقدار نویز وابسته به سیگنال[۸] است یعنی وقتی که $u(i)$ افزایش یابد، $n(i)$ افزایش می‌یابد. در مدل‌های نویز مقادیر نرمال شده‌ی $n(i)$ و $n(j)$ در پیکسل‌های مختلف، تصور می‌شود که متغیرهای تصادفی مستقل هستند به عنوان نمونه «نویز سفید» یکی از این موارد است [۱۱].

۳.۱ نسبت‌های سیگنال و نویز

با اندازه‌گیری مقدار نویز از طریق انحراف استاندارد[۹] $\sigma(n)$، نسبت سیگنال و نویز SNR به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SNR = \frac{\sigma(u)}{\sigma(n)},$$

که $\sigma(u)$ انحراف استاندارد تجربی از u را نشان می‌دهد و داریم:

$$\sigma(u) = (\frac{۱}{\mid I \mid}\sum_{i\in I}(u(i) - \overline{u})^{۲})^{\frac{۱}{۲}},$$

و $\overline{u} = \frac{۱}{|I|}\sum_{i\in I} u(i)$ مقدار میانگین سطح-خاکستری و I شبکه است.

۸ signal

۹ standarad deviation

انحراف استاندارد نویز را هم می‌توان به عنوان یک اندازه‌ی تجربی به دست آورد و یا زمانی که نمونه‌ی تصویر و پارامتر مشخص‌اند، می‌توان محاسبه کرد. یک تصویر با کیفیت، انحراف استانداردی حدود ۶۰ دارد. بهترین راه آزمایش تأثیر نویز روی یک تصویر دیجیتالی استاندارد اضافه کردن یک نویز سفید گاوسی[۱۰] است که در آن حالت $n(i)$ها متغیرهای حقیقی گاوسی $(i.i.d)$ به طور مستقل و یکسان پخش شده‌اند. وقتی که ۳ $= \sigma(n)$، هیچ تغییر مرئی معمولاً مشاهده نمی‌شود. بنابراین، ۲۰ $=$ $\frac{۶۰}{۳}$ =SNR تقریباً نامرئی است. به‌طور شگفت انگیزی می‌توان نویز سفید را تا نسبت $\frac{۲}{۱}$ افزایش داد و هم‌چنان همه چیز را در یک تصویر مشاهده نمود [۱۱]. شکل (۱.۱) را ببینید.

شکل ۱.۱: یک تصویر دیجیتالی با انحراف استاندارد ۵۵، همان با نویز افزوده شده (انحراف استاندارد ۳)، بنابراین SNR مساوی با ۱۸ می‌شود، همان با SNR کمی بزرگتر از ۲. در این تصویر دوم، هیچ تغییری دیده نمی‌شود. در سومی، یک نویز قابل توجه با انحراف از استاندارد ۲۵ اضافه شده است، اما به میزان شگفت آوری تمام جزئیات تصویر اولیه هنوز قابل رؤیت هستند.

فرض تمام روش‌های نویززدایی تصویر آن است که نویز نوسانی است و تصویر آن هموار یا قطعه به قطعه هموار است. بنابراین آن‌ها سعی می‌کنند قسمت هموار یا ناهمگن تصویر را از قسمت نوسانی جدا کنند. در واقع خیلی از ساختارهای ظریف تصاویر به اندازه‌ی نویز، نوسانی هستند. به‌طور برعکس، نویز سفید بسامدهای پایینی دارد. بنابراین مؤلفه‌های (اجزای) همواری دارد. پس یک روش جداسازی شناسه‌های هموار تنها اتفاقی است. الگوریتم‌های نویززدایی تفاوتی بین جزئیات کوچک و نویز قائل نیستند. بنابراین آن‌ها را پاک می‌کنند و در خیلی از موارد

[۱۰] gaussian white noise

اختلالات جدیدی ایجاد می‌کنند. لذا محققان یک مبنای طبقه‌بندی مصنوعات برطرف‌کننده‌ی نویز ایجاد کرده‌اند:
«طنین ایجاد کردن»، «تاری»، «اثر پلکانی»، «اثر صفحه‌ی شطرنجی»، «خطوط اصلی موج کوچک[۱۱]» و غیره.
تمام الگوریتم‌های برطرف کننده‌ی نویز:

- یک نمونه‌ی نویز

  یا

- یک تصویر هموار کلی، موضعی یا سرتاسری

  است.

۴.۱ نویز روش

تمام روش‌های نویززدایی تصویر وابسته به یک پارامتر فیلتری h هستند. این پارامتر درجه‌ی فیلتر به کار رفته در تصویر را اندازه‌گیری می‌کند. برای بیشتر روش‌ها، پارامتر h بستگی به یک برآورد واریانس نویز σ^2 دارد. نتیجه‌ی یک روش نویززدایی D_h را می‌توان مانند تجزیه‌ی هر تصویر v تعریف کرد:

$$v = D_h v + n(D_h, v), \qquad (۱.۱)$$

که در آن

۱- $D_h v$ هموارتر از v است.

۲- $n(D_h, v)$ نویز حدس زده شده‌ی روش است.

هموار کردن v برای اطمینان از این‌که $n(D_h, v)$ مانند یک نویز شود کافی نیست. در واقع روش‌های جدیدتر به فیلتر کردن قانع نیستند و سعی در بازیابی اطلاعات تلف شده در $n(D_h, v)$

[۱۱] wavelet outliers

دارند. بنابراین تمرکز روی $n(D_h, v)$ است.

تعریف ۱ (نویز روش). فرض کنید u یک تصویر (الزامی در نویزدار بودن نیست) باشد و $D_h u$ را عملگر نویززدایی وابسته به h قرار دهید. نویز روش u را به عنوان تفاضل تصویر تعریف می‌کنیم

$$n(D_h, u) = u - D_h u. \tag{۲.۱}$$

این نویز روش تا جایی که ممکن است شبیه به یک نویز سفید باشد [۱۱].

به‌علاوه، از آن جایی که نمی‌خواهیم تصویر اصلی u از طریق روش‌های نویززدایی تغییر کند نویز روش باید برای کار کردن با نظم صحیح تا حد امکان کوچک باشد. طبق بحث قبل، در مقایسه‌ی روش‌های نویززدایی چهار معیار بررسی می‌شوند:

- نمایش ساختارهای نوعی در تصاویر بدون نویز.
- نمایش تطبیقی نویز روشِ هر روش روی تصاویر واقعی با $\sigma = ۲/۵$. در بخش ۳.۲ ذکر کردیم که انحراف از استاندارد نویز کمتر از ۳ نهفته است و انتظار می‌رود که اکثر روش‌های دیجیتالی، این نوع نویز را تصدیق کنند.
- محاسبه‌ی مرسوم نویز روش روی تصاویر هموار، با برآورد کوچکی آن طبق همواری موضعی تصویر.
- قبول مقایسه‌ی کلاسیک براساس شبیه‌سازی نویز: که شامل گرفتن یک تصویر با کیفیت، اضافه کردن نویز سفید با σ شناخته شده وسپس محاسبه‌ی بهترین تصویر بازیابی شده از نمونه نویزی به دست آمده که از طریق هر روش می‌باشد.

یک جدول فواصل $L^۲$، از تصویر بازیابی شده تا تصویر اولیه می‌تواند ساخته شود: فاصله‌ی $L^۲$ ارزیابی با کیفیتی را تأمین نمی‌کند. هر چند که، دقیقاً عملکرد نسبی الگوریتم‌ها را منعکس می‌کند.

۵.۱ روش‌هایی که مقایسه می‌شوند، عبارتند از:

۱- مدل هموارسازی گاوسی

که همواری u از طریق انتگرال دیریکله[۱۲] $\int \mid Du \mid^{2}$ محاسبه می‌شود.

۲- مدل فیلتری ناهمسانگرد[۱۳].

۳- مدل تغییرات کلی و دو اصلاحیه‌ی تغییرات کلی تکراری پیشنهاد شده‌ی اخیر رودین-اوشر-فاطمی[۱۴].

۴- فیلترهای ناحیه‌ی یاروسلافسکی[۱۵] و یک نمونه‌ی دقیق فیلتر SUSAN.

۵- فیلتر آزمایشی موضعی وینر مانند مورد اجرا شده توسط یاروسلافسکی.

۶- DUDE، برطرف کننده‌ی نویز عام گسسته و UINTA، فیلتر کردن سازگار براساس تئوری اطلاعات نظارت شده، دو رویکرد بسیار جدید.

۷- الگوریتم NL-means غیرموضعی که در این جا معرفی و مورد بررسی قرار می‌گیرد و در آخر نیز با یک فرمول بسته‌ی ساده داده شده است.

فرض کنید که u در یک دامنه‌ی کراندار $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2}$ تعریف شده باشد، آن‌گاه:

$$NL(u)(\mathrm{x}) = \frac{1}{C(\mathrm{x})} \int e^{-\frac{(G_a * |u(\mathrm{x}+\cdot)-u(\mathrm{y}+\cdot)|^{2})(o)}{h^{2}}} u(\mathrm{y}) d\mathrm{y},$$

که در آن $\mathrm{x} \in \Omega$، G_a یک هسته‌ی گاوسین با انحراف استاندارد a و h عمل پارامتر فیلتر کردن را انجام می‌دهد و

$$C(\mathrm{x}) = \int e^{-\frac{(G_a * |u(\mathrm{x}+\cdot)-u(\mathrm{y}+\cdot)|^{2})(o)}{h^{2}}} d\mathrm{y},$$

[۱۲] Dirichlet integral

[۱۳] anisotropic

[۱۴] Rudin- Osher- Fatemi

[۱۵] Yaroslavsky