دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

موجک‌های چندگانه روی بازه

استاد راهنما

دکتر مهرداد لکستانی

استاد مشاور

دکتر قدرت عبادی

پژوهشگر

رحیمه عباسی تقی‌آباد

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

خدایا...

به من زیستی عطا کن که در لحظهٔ مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن به خاطر تو، زندانی کشیدن به خاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست
او جانشین همه نداشتن‌هاست...

تقدیم به نگاه مهربان امام منتظرم

که هر صبح

برای بهاری شدن ما، فرج می خواند

و هر جمعه

از نیامدن ما نذبه می شود.

تقدیم به:

گرانبهاترین دارایی‌های زندگی

((مادر شفیق و پدر مهربانم))

دونیامین ان ده یرلی وارلیقلاری

((عزیز آنام و مهربان آتام))

اوچون.

سپاس‌گزاری . . .

همیشه دستان ربنایم را به‌سوی کسی می‌گیرم که مهربانی نگاهش را باور کرده‌ام، و امروز که اینجایم و از بی‌کران دانش خدا، به‌قدر بضاعتم آموخته‌ام، تمام قامت می‌ایستم و بلندترین شکرانه‌ام را قنوت می‌شوم.

و قدم‌های مادرم که یادم دادند، نماندن را، دویدن را و رسیدن را، می‌بوسم.

و از پدرم ممنونم که روی پا ایستادنم را قانون کرد.

از استاد راهنمای عالمم، جناب آقای دکتر**مهرداد لکستانی**، که صبورانه زکات دانایی‌شان را برایم کنار گذاشتند تا جا نمانم از دانستن، بی‌حساب ممنونم.

هم‌چنین از استاد مشاور ارجمندم، جناب آقای دکتر **قدرت عبادی**، که قبول زحمت فرمودند، سپاسگزارم.

مراتب قدردانی خود را از داور محترم این پایان‌نامه، سرکار خانم دکتر **فریبا بهرامی**، اعلام می‌کنم.

از خانم المیرا آشپززاده و آقای حسین فضلی به خاطر راهنمایی‌های ارزنده‌شان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

هر چقدر از سپاس می‌شناسم را هدیه می‌کنم به خواهران بی‌دریغ مهربانم و برادران همیشه خوبم که بی‌نظیرند در همراهی.

در آخر از خدای یگانه‌ام، برای تمامی چشم‌های آشنا و ناآشنایی که کوچه‌های رفتنم، به حضور روشنشان نور گرفته است، یک آسمان بهار طلب می‌کنم.

رحیمه عباسی تقی آباد

شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: عباسی تقی‌آباد نام: رحیمه

عنوان: موجک‌های چندگانه روی بازه

استاد راهنما : دکتر مهرداد لکستانی

استاد مشاور : دکتر قدرت عبادی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۹۶

کلید واژه‌ها: مرتبه دقت، قوانین جمع، همواری، تابع مقیاس، درونیاب هرمیتی کاردینالی، موجک چندگانه متعامد، موجک چندگانه دومتعامد، موجک چندگانه روی بازه.

چکیده

موجک‌های چندگانه متعامد و دومتعامدی هموار، روی خط حقیقی به همراه بردارهای تابع مقیاس‌شان که دارای محمل $[0, 1]$ می‌باشند در ساختن پایه‌های موجک روی بازه $[0, 1]$ به‌کار برده می‌شوند.

در این پایان‌نامه یک موجک چندگانه متعامد $\mathbb{C}^2$ متقارن با چندگانگی ۴ معرفی می‌گردد، به‌طوری‌که بردار تابع مقیاس متعامد آن دارای محمل $[0, 1]$ و دقت از مرتبه ۴ بوده و متعلق به فضای سوبولوف $W^{2.56288}$ می‌باشد. هم‌چنین موجک‌های چندگانه دو متعامدی با چندگانگی ۴ و ممان‌های صفر از مرتبه ۴ طراحی شده است که بردار تابع مقیاس اولیه دارای محمل $[-1, 1]$ و خواص درونیاب هرمیتی

بوده و متعلق به فضای سوبولوف $W^{۳/۶۳۲۹۸}$ می‌باشد و بردار تابع مقیاس دوگان دارای محمل $[-۱,۱]$ و متعلق به $W^{۱/۷۸۵۳۳}$ است. در ادامه یک بردار تابع مقیاس دوگان پیوسته، برای بردار تابع مقیاس اولیه که دارای خواص درونیاب هرمیتی کاردینالی با چندگانگی ۴ و محمل $[-۱,۱]$ هستند، معرفی می‌گردد. در نهایت، براساس موجک‌های چندگانه متعامد و دومتعامد ساخته شده در روی خط حقیقی، هر دو پایه‌ی موجک‌های چندگانه متعامد و دومتعامد روی بازه $[۰,۱]$ ارائه می‌شوند. چنین پایه‌های موجک چندگانه روی بازه $[۰,۱]$ تقارن، محمل کوچک، ممان‌های صفر بالا، همواری خوب و ساختار ساده دارند. تمامی فیلترهای موجک ساخته شده در این پایان‌نامه، فرم بسته دارند.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

پیشگفتار

چرا موجک؟

اولین کاربرد موجک‌ها در ژئوفیزیک، برای تحلیل داده‌های نقشه‌برداری شده از زلزله بود که در اکتشاف معدن و نفت برای تصویر گرفتن از لایه‌های زیرسطحی صخره‌ها، استفاده می‌شد. حدود بیست سال قبل از آن، ریاضیدانان آن‌ها را برای حل مسائل محض گسترش داده بودند، اما کاربردشان در پردازش سیگنال پیش‌بینی نشده بود.

نقشه‌های زلزله از تعدادی تصاویر دوبعدی یا قطعه‌هایی تشکیل شده‌اند که آنها را به یکدیگر وصل می‌کنند تا یک تصویر سه‌بعدی از ساختار سطح زیرین سخره به‌دست آید. هر لایه با کارگذاشتن لرزه‌نگار (میکروفون‌های زلزله) در فاصله‌های مساوی روی یک خط (خط زلزله) به‌دست می‌آیند. دینامیت را در انتهای هر خط قرار می‌دهند تا بر اثر انفجار، موج زلزله در زمین ایجاد کند. هر میکروفون زلزله، جابجایی زمین را بر اثر انفجار از ابتدا تا انتها ثبت می‌کند، و این ثبت اثر زلزله می‌باشد.

برای این‌که یک نقشه زلزله را در دست داشته باشیم باید تحلیل درستی از هر اثر داشته باشیم. تبدیل فوریه[1] در اینجا وسیله خوبی نیست، زیرا فقط اطلاعات فرکانسی (نوسان‌های شامل سیگنال) را بدست می‌دهد و در مورد زمانی که یک نوسان اتفاق می‌افتد، به طور مستقیم اطلاعاتی مشخص نمی‌کند. ابزار بهتر دیگر، تبدیل فوریه زمان کوتاه است. کل بازه زمانی به تعدادی بازه‌های زمانی مساوی کوچکتر تقسیم می‌شود. اطلاعات در این بازه‌ها با استفاده از تبدیل فوریه به‌طور منحصر به‌فردی تحلیل می‌شوند.

[1] Fourier

نتایج به‌دست آمده شامل اطاعات فرکانس و زمان می‌باشند. به هر حال، در این روش مشکلی وجود دارد. بازه‌های زمانی مساوی قابل تطبیق نیستند و هنگامی که یک انفجار در مدت زمان خیلی کم رخ می‌دهد، به سختی می‌توان فرکانس بالا را یافت.

ورود موجک‌ها : موجک‌ها می‌توانند اثر اطلاعات زمان و فرکانس را حفظ کنند، روی انفجارهای مذکور قبلی در بازه‌های زمانی بسیار کوچک متمرکز شوند و یا برای پیدا کردن فرکانس‌های پایین در بازه‌های زمانی بلند متمرکز شوند.

تاریخچه موجک به چند دهه اخیر باز می‌گردد. در این مدت کوتاه، این توابع در زمینه‌هایی نظیر پردازش سیگنال، فشرده‌سازی تصاویر، آنالیز عددی و ... به کار گرفته شده‌اند و توانایی این ابزار ساده ریاضی در زمینه‌های مذکور آشکار شده است. در سال ۱۹۱۰ آلفرد هار[۲] وقتی در حال ساخت پایه‌ای متعامد از تابع هار بود به موجک هار رسید، اما چنین نامی بر آن ننهاد و آن را فقط پایه هار نامید تا سال‌ها این پایه‌ها به عنوان موجک معرفی نشدند تا اینکه پل لوی[۳] وقتی در مطالعه حرکت براونی از این توابع استفاده کرد و مشاهده نمود که استفاده از پایه‌های هار منجر به نتایج بهتری نسبت به پایه‌ی فوریه می‌شود. بر اساس این مشاهدات بود که اندیشه نمایش یک تابع بر حسب توابع پایه‌ی موجک قوت گرفت. از طرفی روش‌های مبتنی بر تبدیل فوریه در برخی موارد دارای کارایی مناسب نبودند و هر چند فنون جدیدی چون فوریه پنجره‌ای[۴] جایگزین مناسبی بودند اما نیاز به یک ابزار مناسب‌تر احساس می‌شد در نهایت محققینی هم‌چون کالدرون[۵] و کویفمن[۶] در شناساندن نظریه موجک‌ها در سال‌های ۱۹۳۰ تا ۱۹۷۵ تلاش کردند. اما بیشترین سهم مربوط به مورلت[۷] و گروسمن[۸] است که پایه‌های تئوری موجک را بطور کلی بنا

[۲] Haar

[۳] Paul Levy

[۴] Windowed Fourier

[۵] Calderon

[۶] Coifman

[۷] Morlet

[۸] Grrosman

نهادند و واژه موجک را برای آن بکار بردند. سپس مورلت مفهوم آنالیز تجزیه چندگانه MRA را ارائه کرد که چهارجوبی مناسب برای ساخت موجک‌هاست. موجک‌ها مانند توابع چند جمله‌ای متعامد و فوریه برای فضای $L^2(R)$ یک پایه محسوب می‌شوند. از این دیدگاه می‌توان آنها را به عنوان پایه در روشهای تصویری به‌کار برد. از طرفی با توجه به تنوع سیستم‌های موجکی، می‌توان یک پایه مناسب را طوری انتخاب کرد که برای مسئله خاص منجر به ساده‌سازی مراحل حل بالا رفتن مرتبه همگرایی شود. در سال ۱۹۹۱ بیلکین[۹] و دیگران موجک‌ها را به منظور ایجاد الگوریتم‌های سریع برای حل مسائل عددی بکار بردند. آنها الگوریتمی با پیچیدگی $O(n\, log\, n)$ برای حل دسته‌ای از معادلات انتگرال ارائه نمودند که در آن n پارامتر گسسته‌سازی است. انگیزه این کار در فشرده‌سازی گسستن عملگر انتقال به منظور رسیدن به ماتریس‌های تنک است. استفاده از ماتریس‌های تنک منجر به دستگاه‌های تنک می‌شود که هزینه حل ونگهداری آن در مقایسه با دستگاه‌های غیرتنک بسیار کمتر می‌باشد. در ادامه ساخت موجک‌ها، آلپرت[۱۰] بعد از مشاهده ضعف موجک‌های کلاسیک در داشتن توأم خواصی از قبیل تعامد، مرتبه تقریب بالا، محمل فشرده و $\cdots$ تصمیم به ساخت موجک‌هایی کرد که همه خواص مذکور را داشته باشند. وی به‌جای استفاده از یک تابع مقیاس و یک تابع موجک از چند تابع مقیاس و موجک استفاده کرد که این نوع از موجک‌ها به موجک‌های چندگانه معروف شدند.

به‌طور عمده مزیت موجک‌ها مربوط به ممان‌های صفر بالا و محمل فشرده است که ابزار رقابتی در طراحی‌موجک‌ها هستند. برای داشتن این خصوصیات باید موجک‌های چندگانه با چندگانگی بالا مورد بررسی قرار گیرند. یک موجک چندگانه با چندگانگی ۱۱ در [۱۰] ارائه شده است. با این وجود با چندگانگی بالا، ساختار موجک‌ها و الگوریتم اجرای تبدیل موجک متناظر بسیار پیچیده می‌باشد. چندین موجک چندگانه متعامد (دومتعامدی) با چندگانگی ۲ در [۱۹، ۱۵، ۱۱، ۸] گزارش شده است. موجک‌های متعامد و دومتعامدی بر روی خط حقیقی که دارای ممان‌های صفر بالا می‌باشند درکاربردهای

[۹] Beylkin

[۱۰] Alpert

گوناگونی مفید می‌باشد با این وجود در بسیاری از کاربردها مانند جواب‌های معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی و پردازش تصویر، مسائلی که به یک بازه محدود شده‌اند، مورد توجه می‌باشند.
یک ساختار از پایه‌های موجک متعامد روی بازه $[0, 1]$ توسط کوهن[۱۱] دوبیشی[۱۲] و ویال[۱۳] [۵] با تصحیح موجک‌های متعامد دوبیشی روی خط حقیقی به بازه $[0, 1]$ معرفی شده است و هم‌چنین چندین روش دیگر برای به‌دست آوردن موجک‌ها در روی بازه با تصحیح موجک‌ها روی خط حقیقی در [۲۷، ۱۵، ۱۰، ۸] گزارش شده است.
ترتیب مطالب این پایان‌نامه به شرح زیر می‌باشد؛
در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی معرفی می‌شود. در فصل دوم که بر اساس مرجع [۱۲] تنظیم شده است، روش‌های کلی برای ساخت انواع موجک ارائه شده است. در فصل سوم نحوه ساخت موجک‌های چندگانه متعامد و دومتعامدی بر روی خط حقیقی بیان گردیده است. نهایتا در فصل چهارم با استفاده از موجک‌های چندگانه ساخته شده در فصل ۳، موجک‌های چندگانه روی بازه $[0, 1]$ ساخته می‌شوند. مطالب فصل‌های ۳ و۴ بر اساس مرجع [۱۳] ارائه شده است. این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۱۳] تدوین شده است.

[۱۱] Cohen
[۱۲] Daubechies
[۱۳] Vial

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

کاربردها

هدف از نظریه موجک‌ها بازسازی مجدد هر تابع دلخواه f با استفاده از توابع ساده‌تر، در یک بازه مشخص می‌باشد، بطوریکه هر گاه بخواهیم f را در مقیاس‌ها یا انتقال‌های مختلف بازه‌ی مورد نظر بازسازی کنیم، مجددا همان توابع ساده‌ی اولیه جوابگوی نیاز ما باشند. همین مساله باعث کاربرد زیاد موجک‌ها در بسیاری از رشته‌های علوم و مهندسی، فیزیک و ریاضیات کاربردی شده است. در آنالیز موجک هم مانند آنالیز فوریه با بسط توابع سروکار داریم ولی این بسط بر حسب « موجک‌ها» انجام می‌شود. موجک، تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط بر حسب انتقال‌ها و اتساع‌های این تابع

انجام می‌گیرد. برخلاف چندجمله‌ای‌های مثلثاتی، موجک‌ها در فضا به صورت موضعی بررسی می‌شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیکتری بین بعضی توابع و ضرایب آنها امکان‌پذیر می‌شود و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می‌گردد. هر کاربردی را که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است می‌توان با استفاده از موجک‌ها فرمول‌بندی کرد واطلاعات فضایی (یا زمانی) موضعی بیشتری بدست آورد. به‌طور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم‌های عددی سریع برای محاسبه‌ی عملگرهای انتگرالی اثر می‌گذارد. آنالیز موجک حاصل ۵۰ سال کار ریاضی (نظریه‌ی لیتلوود[۱] - پیلی و کالدرون[۲] - زیگموند[۳]) است که طی آن، با توجه به مشکلاتی که در پاسخ به ساده‌ترین پرسش‌های مربوط به تبدیل فوریه وجود داشت، جانشین‌های انعطاف‌پذیر ساده‌تری از طریق آنالیز همساز ارائه شدند. در طی دهه‌ی گذشته صورت‌های مختلفی از این رهیافت چندمقیاسی[۴] در پردازش تصویر، صوت، کدگذاری (به شکل فیلترهای آیینه‌ای متعامد و الگوریتم‌های هرمی) و استخراج نفت دیده شده است.

آنالیز موجک همراه با تبدیل سریع فوریه در تحلیل سیگنال‌های گذرایی که سریعا تغییر می‌کنند، صدا و سیگنال‌های صوتی، جریان‌های الکتریکی در مغز، صداهای زیرآبی ضربه‌ای و داده‌های طیف‌نمایی (NMR) و در کنترل نیروگاه‌های برق از طریق صفحه نمایش برق کامپیوتر به‌کار رفته است، و نیز به عنوان یک ابزار علمی برای روشن ساختن ساختار جریان‌های جوی و در بررسی ساختارهای ستاره‌ای از آن استفاده شده است. این آنالیز به عنوان یک ابزار عددی می‌تواند مانند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی محاسبات با مقیاس بزرگ بکاهد. بدین ترتیب که با تغییر هموار ضریب، ماتریس‌های متراکم را به شکل تنکی درآورد که به سرعت قابل محاسبه باشند. راحتی و سادگی این آنالیز باعث ساختن تراشه‌هایی شده است که قادر به کدگذاری به نحوی بسیار کارا و فشرده‌سازی سیگنال‌ها و تصاویرند.

[۱] Lit loud

[۲] Calderon

[۳] Zigmond

[۴] Multi Scale

آنالیز موجک امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می‌توان به کاربرد آن در تصویر برداری پزشکی (MRI) و سی‌تی اسکن، جداسازی بافت‌های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس، تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی[۵] و عملکردهای تشدید مغناطیسی اشاره نمود.
در این بخش برخی مفاهیم کلی و مورد نیاز بیان شده و سپس موجک‌ها و برخی از خواص آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۱ مجموعه‌های متعامد، متعامد یکه وپایه‌های متعامد یکه

تعاریف و قضایای این قسمت ازمراجع [۲۶، ۶] انتخاب شده‌اند.

۱.۱.۱ فضای توابع $L^P(a,b)$

فضای توابع $L^P(a,b)$ شامل توابع اندازه‌پذیر $f(t)$ حقیقی (مختلط) است به‌طوریکه

$$\int_a^b \left(\mid f(t) \mid^p \right) dt < \infty$$

با فرض $P = ۲$، اگر $f,g \in L^۲(a,b)$ آنگاه ضرب داخلی دو تابع حقیقی fو g به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

با تعریف فوق $L^۲(a,b)$ یک فضای ضرب داخلی است. نرم تابع حقیقی $f \in L^۲(a,b)$ را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گفت

$$\parallel f \parallel_۲ = \left(\langle f,f \rangle\right)^{\frac{۱}{۲}} = \left(\int_a^b f^۲(t)dt \right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

به این ترتیب فضای $L^۲(a,b)$ تشکیل یک فضای برداری نرم‌دار کامل می‌دهد.

[۵] MR Spectrorscopy

۲.۱.۱ تعامد در یک فضای ضرب داخلی

با فرض اینکه $(X,\langle,\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی می‌باشد. دو عضو $x,y\in X$ را متعامد می‌گویند و با $x\perp y$ نشان می‌دهند هرگاه $\langle x,y\rangle=0$ باشد. همچنین زیر مجموعه A از فضای ضرب داخلی $(X,\langle,\rangle)$ متعامد است هرگاه هر دو عضو متمایز آن بر هم عمود باشند. یعنی

$$\forall x,y\in A,\quad x\neq y\Rightarrow\langle x,y\rangle=0$$

اگر مجموعه A متعامد بوده ونیز برای هر $x\in A$، $\|x\|=1$ باشد، آنگاه مجموعه A را متعامد یکه می‌نامند.

مثال ۱.۱.۱. در فضای ضرب داخلی $L^2(0,\pi)$ مجموعه زیر متعامد یکه است

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(t),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2t),\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}sin(t),\cdots\right\}.$$

زیرا به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(mt)\sin(nt)dt=\begin{cases}1, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

می‌توان نشان داد که هر زیر مجموعه متعامد از یک فضای ضرب داخلی تفکیک‌پذیر، شمارش‌پذیر است [۲۹].

قضیه ۲.۱.۱. *شرط لازم وکافی برای تفکیک‌پذیر بودن یک فضای هیلبرت آن است که هر زیر مجموعه متعامد یکه آن شمارش‌پذیر باشد.*

برهان. ر. ک به مرجع [۲۹] □

مثال ۳.۱.۱. فضای حقیقی $L^2(a,b)$ یک فضای هیلبرت تفکیک‌پذیر است و هر زیر مجموعه متعامد یکه آن شمارش‌پذیر است.