دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

نامساوی‌ها برای عملگرهای فشرده

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

الهه زاهدی نژاد

استاد راهنما

دکتر سید محمود منجگانی

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز) خانم الهه زاهدی نژاد

تحت عنوان

نامساوی‌ها برای عملگرهای فشرده

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر سید محمود منجگانی

۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه   دکتر فرید بهرامی

۳ــ استاد داور ۱

()

۴ــ استاد داور ۲

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر رسول نصر اصفهانی

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه برخی از نامساوی‌های عددی را برای عملگرهای فشرده بررسی می‌کنیم.
اگر چه توسیعی از کارهای مربوط به نامساوی‌های عملگری بویژه در زمینه‌ی توابع یکنوا عملگری و محدب عملگری وجود دارد، اما نتایج بیشتری در مورد نامساوی‌های عملگری بواسطه‌ی طیف یا مقادیر ویژه بدست می‌آیند. تامسون اولین نامساوی اساسی، یعنی نامساوی مثلث را برای ماتریس‌های مختلط $n \times n$ اثبات نمود. نتایج تامسون توسط آکمان—اندرسن و پدرسن به جبرهای فون نویمان تعمیم داده شد. آندو گونه‌ای از نامساوی یانگ را برای ماتریس‌ها اثبات نمود:
فرض کنیم $q,p \in (۱,\infty)$ به طوری در شرط $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ صدق نمایند، در این صورت برای ماتریس‌های $n \times n$ مختلط a و b، ماتریس یکانی u وابسته به a و b وجود دارد به طوری که $u|ab^*|u^* \leq \frac{۱}{p}|a|^p + \frac{۱}{q}|b|^q$. نامساوی یانگ توسط ارلیجمن، فارنیک و زنگ به عملگرهای فشرده توسعه داده شد:
اگر a و b عملگرهای فشرده روی فضای هیلبرت جدایی‌پذیر مختلط باشند، آن‌گاه طولپای جزیی u وجود دارد به طوری که فضای ابتدایی u برابر است با $(\ker|ab^*|)^\perp$ و برای هر $q,p \in (۱,\infty)$ که در شرط $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ صدق کنند، داریم

$$u|ab^*|u^* \leq \frac{۱}{p}|a|^p + \frac{۱}{q}|b|^q.$$

علاوه‌براین، اگر $|ab^*|$ یک به یک باشد، آن‌گاه عملگر u در نامساوی بالا را می‌توان یکانی در نظر گرفت.
در این پایان‌نامه ضمن بررسی خاصیت‌های فوق، حالت تساوی این نامساوی را نیز برای عملگرهای فشرده‌ی نرمال جابجایی بررسی می‌کنیم. سپس به نامساوی یانگ ماتریسی برای نرم هیلبرت—اشمیت و نامساوی مثلث می‌پردازیم.

فصل ۱

مقدمه

دراین پایان‌نامه سعی شده است که یک گونه‌ی تعمیم یافته‌ای از نامساوی میانگین هندسی [1] تحت عنوان نامساوی یانگ [2] را برای عملگرهای فشرده روی فضاهای هیلبرت مختلط، معرفی و در بعضی حالات آن را اثبات کنیم.

بخش اول این فصل به اهداف این پایان‌نامه می‌پردازد و برخی مطالعات و بررسی‌های پیشین متناسب با موضوع مورد مطالعه را به طور خلاصه باز بینی می‌کند. بخش دوم نتایج اصلی را که در اینجا به‌دست آمده است بیان می‌کند.

۱—۱ اهداف رساله

فرم‌هایی از نامساوی‌های کلاسیک ماتریسی و عملگری وجود دارند که از اهمیت ویژه برخوردار هستند. برای مثال می‌توانید به [۱, ۵, ۷, ۸, ۱۱, ۱۲, ۱۹, ۲۰, ۲۱] رجوع کنید. از طرف دیگر بسیاری از نامساوی‌های عملگری که مورد مطالعه قرار گرفته‌اند نامساوی‌هایی بین نرم‌های عملگرها است.

نتایج این پایان‌نامه در سطح گسترده‌ای متاثر از پیشگامی تامسون [3] [۱۹, ۲۰, ۲۱] برای نزدیک شدن به نامساوی اساسی در آنالیز، یعنی نامساوی مثلثی برای اعداد مختلط است. طبیعی‌ترین سوالی که در

[1] Geometric Mean Inequality
[2] Young's Inequality
[3] Tompson

اینجا مطرح می‌شود این است که چگونه می‌توان نامساوی مثلث[۴] را به ماتریس‌های مختلط، عملگرها و یا عناصری در C^*—جبر توسعه داد. این مسایل علاوه بر تامسون، آکمان[۵]، اندرسن[۶]، پدرسن[۷] [۱] توسط فارنیک[۸] و ساراکوس[۹] [۸] نیز طبقه‌بندی شده‌اند و نتایج جالب و فرمول‌های غیربدیهی از نامساوی مثلثی برای ماتریس‌ها و عملگرها ارایه دادند. به ویژه نکته اساسی در این جهت نامساوی مثلثی آکمان—اندرسن—پدرسن است که: هرگاه a و b عناصری از جبر فون نویمان M باشند در این صورت طولپاهای u و v در M وجود دارند به طوری که $|a+b| \leq u|a|u^* + v|b|v^*$، که در آن برای هر $x \in M$، $|x|$ همان عملگر $(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ است. به هر حال، نامساوی مثلثی در مفهوم عملگری، حتی برای عملگرهای فشرده نیز تاکنون به طور کامل حل نشده است. برای بحث بیشتر می‌توانید به [۱] مراجعه کنید.

نامساوی اساسی دیگری که در اینجا از اهمیت ویژه برخوردار است نامساوی میانگین هندسی است که تعمیم آن در قالب نامساوی یانگ است.

برای اعداد حقیقی و مثبت a و b نامساوی میانگین هندسی به صورت زیر است

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

با تعویض نقش a و b با ریشه‌هایشان نامساوی بالا را می‌توان به صورت

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

نیز نوشت.

باهتیا[۱۰] و کیتانه[۱۱] [۵] نامساوی میانگین هندسی را برای ماتریس‌های مثبت (شبه مثبت) a و b به صورت زیر توسعه دادند: برای ماتریس‌های n×n مثبت a و b ماتریس یکانی $n \times n$ مانند u وجود دارد به طوری که

$$u|ab|u^* \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$$

(برای هر ماتریس مختلط y، قدر مطلق آن به صورت

$$|y| = (y^*y)^{\frac{1}{2}}$$

[۴] Triangle Inequality

[۵] Akemann

[۶] Anderson

[۷] Pedersen

[۸] Farenick

[۹] Psarrakos

[۱۰] Bhatia

[۱۱] Kittaneh

تعریف می‌شود.)
باید توجه داشت که حاصلضرب دو ماتریس مثبت a و b لزوماً مثبت نیست.

مثال ۱.۱ اگر

$$a = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

و

$$b = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

ماتریس‌هایی در $M_۲(\mathbb{R})$ باشند آن‌گاه a و b ماتریس‌هایی مثبت هستند. اما ab نمی‌تواند مثبت باشد چون در یک C^*−جبر حاصلضرب دو عضو مثبت، مثبت است اگر و تنها اگر جابجایی باشد. اما در اینجا $ab \neq ba$.

نامساوی یانگ تعمیمی از نامساوی میانگین هندسی است:
برای اعداد حقیقی مثبت a و b و هر $q, p \in (۱, \infty)$ که در رابطه‌ی $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ صدق کنند، داریم

$$ab \leq \frac{۱}{p}a^p + \frac{۱}{q}b^q$$

آندو[۱۲] [۲] نشان داد که نامساوی یانگ برای ماتریس‌ها مشابه با قضیه‌ی باهتیا− کیتانه برقرار است: اگر $q, p \in (۱, \infty)$ در شرط $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ صدق کنند، آن‌گاه برای هر جفت از ماتریس‌های $n \times n$ مختلط a و b، ماتریس یکانی u وجود دارد به طوری که

$$u|ab^*|u^* \leq \frac{۱}{p}|a|^p + \frac{۱}{q}|b|^q$$

اگر چه عملگرهای رتبه متناهی، در مجموعه‌ی تمام عملگرهای فشرده روی یک فضای هیلبرت، نسبت به متر القا شده توسط نرم، چگال هستند اما نامساوی‌های آندو− باهتیا− کیتانه نظیر بیشتر نامساوی‌های ماتریسی، فوراً از طریق روش‌های تقریب معمولی برای عملگرهای فشرده نتیجه نمی‌شوند و بنابراین تنها تعداد اندکی از نامساوی‌های ماتریسی شناخته شده وجود دارند که برای عملگرهای فشرده نیز برقرار هستند.

هدف اصلی این پایان نامه، به‌دست آوردن تکنیکی است که نتایج آندو−باهتیا−کیتانه را به عملگرهای فشرده توسعه دهد.

[۱۲] Ando

۱–۲ نتایج اصلی

نتیجه‌ی اصلی که در اینجا ثابت می‌شود گونه‌ای از نامساوی یانگ است.

قضیه ۲.۱ اگر a و b عملگرهای فشرده روی یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر باشند و $q, p \in (۱, \infty)$ در شرط $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ صدق کنند، آن‌گاه طولپای جزیی مانند u با فضای ابتدایی $(\ker |ab^*|)^\perp$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$u|ab^*|u^* \leq \frac{۱}{p}|a|^p + \frac{۱}{q}|b|^q$$

علاوه‌براین، اگر $|ab^*|$ یک به یک باشد، آن‌گاه عملگر u در نامساوی بالا را می‌توان یکانی در نظر گرفت.

در نتیجه‌ی زیر، حالت خاصی از قضیه‌ی ۲.۱ بیان می‌شود.

نتیجه ۳.۱ اگر a و b عملگرهای مثبت فشرده با هسته‌های بدیهی و $t \in [۰, ۱]$ باشد، آن‌گاه عملگر یکانی u وجود دارد به طوری که

$$u|a^t b^{۱-t}|u^* \leq ta + (۱ - t)b.$$

در آینده مشاهده می‌کنیم که هرگاه H فضای هیلبرت یک بعدی روی میدان اعداد مختلط باشد و اگر $t = \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه نتیجه‌ی ۳.۱ دقیقاً نامساوی میانگین هندسی برای اعداد حقیقی مثبت است.

نامساوی عملگری در قضیه‌ی ۲.۱ دو پیچیدگی اساسی به آن داده است: ابتدا ظاهر شدن الحاقی b و سپس استفاده از طولپای جزیی u است. حالت اول به این دلیل است که جبر مورد بررسی جابجایی نیست و حالت دوم به خاطر نامتناهی البعد بودن فضای هیلبرت است. اما اگر a و b عملگرهای نرمال جابجایی باشند این دو پیچیدگی برطرف می‌شود (قضیه‌ی ۴.۱ را ببینید).

قضیه‌ی ۲.۱ متفاوت از نامساوی یانگ ماتریسی است که توسط آندو ثابت شده است. در آن عملگر u نوعاً یک طولپای جزیی است در حالی که در حالت ماتریسی u همیشه یکانی در نظر گرفته می‌شود. این تفاوت به خاطر این حقیقت است که برای عملگرهایی که روی فضاهای نامتناهی البعد اثر می‌کنند بعد هسته‌ی یک عملگر مثبت در حالت کلی توسط بعد برد عملگر مشخص نمی‌شود. اما اگر $|ab^*|$ هسته‌ی بدیهی داشته باشد، آن‌گاه طولپای جزیی u در حقیقت یک طولپا است. به هر حال در فصل پنجم نشان می‌دهیم که عملگر u در این حالت می‌تواند یکانی در نظر گرفته شود. برای یک C^*–جبر جابجایی، نتیجه‌ی زیر را داریم.

قضیه ۴.۱ اگر A یک C^*−جبر جابجایی با عضو همانی ضرب باشد و $q,p \in (۱,\infty)$ در شرط $\frac{۱}{q} + \frac{۱}{p} = ۱$ صدق کنند، آن‌گاه برای هر $b,a \in A$ داریم

$$|ab| \leq \frac{۱}{p}|a|^p + \frac{۱}{q}|b|^q$$

علاوه‌براین اگر تساوی برقرار باشد، آن‌گاه $|b| = |a|^{p-۱}$.

همچنین با حالت تساوی نامساوی یانگ برای عملگرهای فشرده و ماتریسی سروکار پیدا می‌کنیم و نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۵.۱ فرض کنیم $b,a \in B(H)$ عملگرهای نرمال فشرده تعویض‌پذیر و یک به یک با برد چگال باشند. اگر عملگر یکانی u وجود داشته باشد به طوری که برای هر $q,p \in (۱,\infty)$ با شرط $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ داشته باشیم $u|ab^*|u^* = \frac{۱}{p}|a|^p + \frac{۱}{q}|b|^q$، آن‌گاه $|b| = |a|^{p-۱}$.

نتیجه ۶.۱ اگر H از بعد متناهی باشد، آن‌گاه ۵.۱ حتی در حالتی که $|ab^*|$ یک به یک نباشد نیز برقرار است.

قضیه ۷.۱ فرض کنیم a و b عناصری در $M_n(\mathbb{C})$ با شرط $a \geq ۰$ و $b \geq ۰$ باشند. اگر یکانی u وجود داشته باشد به طوری که

$$۲u|ab|u^* = a^۲ + b^۲$$

آن‌گاه u با a جابجا می شود و $b = ۰$.

برای اثبات قضیه‌ی ۲.۱، در این پایان‌نامه روش آندو را دنبال می‌کنیم، اما در بسیاری از جاها برای فضاهای نامتناهی البعد اصلاحاتی را روی روش آندو انجام می‌دهیم.
برای انجام بررسی‌های فوق، فصول این پایان‌نامه به شرح زیر تنظیم شده‌اند. در فصل دوم و سوم، تنها به بیان مختصری از تعاریف و قضایایی در آنالیز تابعی و نظریه‌ی عملگرها می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در فصل چهارم و پنجم، ابتدا لم‌ها، گزاره‌ها و قضایایی را بیان می‌کنیم. سپس در انتهای فصل پنجم به اثبات قضیه‌ی ۲.۱ که یک نتیجه‌ی اساسی در این پایان‌نامه است، می‌پردازیم.

در فصل ششم، حالت تساوی نامساوی یانگ را برای عملگرهای خاص مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل هفتم، ابتدا مقادیر منفرد یک ماتریس را معرفی می‌کنیم و با تعریف نرم هیلبرت—اشمیت برای یک ماتریس، نامساوی یانگ ماتریسی را برای نرم هیلبرت—اشمیت بیان می‌کنیم.

فصل هشتم را به نامساوی مثلث برای عملگرها اختصاص می‌دهیم و با ارایه‌ی مثالی نشان می‌دهیم که نامساوی مثلث به فرم $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$ برای هر $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$، برای عملگرها برقرار نیست. در این فصل، همچنین شرط تساوی نامساوی مثلث را برای عملگرهای روی $B(H)$ بررسی می‌کنیم.

فصل ۲

پیش‌نیازها

مطالب این فصل عمدتاً از مراجع [۱۶] و [۱۸] گردآوری شده‌اند.

۲—۱ مفاهیم پایه برای نظریه عملگرها

تعریف ۱.۲ یک فضای متری را جدایی‌پذیرمی‌نامیم هرگاه شامل زیر مجموعه‌ای چگال و شمارش‌پذیر باشد.

تعریف ۲.۲ فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. نگاشت $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ را یک نرم روی X نامیم هرگاه

۱) برای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲) برای هر $x \in X$ و $\lambda \in \mathbb{F}$، $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

۳) برای هر $y, x \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این حالت، $(X, \|\cdot\|)$ را فضای خطی نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۳.۲ فرض کنیم H یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. نگاشت $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to F$ رایک ضرب داخلی روی H می‌نامیم هرگاه

۱) برای هر $x \in H$، $\langle x,x\rangle \geq ۰$ و $\langle x,x\rangle = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

۲) برای هر $y,x \in H$، $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

۳) برای هر $z,y,x \in H$ و هر $\mu,\lambda \in \mathbb{F}$، $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle$.

در این صورت $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم.

تعریف ۴.۲ هرگاه تابع $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف نماییم،

$$\|x\| := (\langle x,x\rangle)^{\frac{۱}{۲}}, \qquad \forall x \in H$$

در این صورت $(H,\|\cdot\|)$ یک فضای خطی نرم‌دار خواهد بود.

حال فرض کنیم $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد. اگر تحت نرم متناظر، H کامل باشد، آن‌گاه H را فضای هیلبرت می‌نامیم.

قضیه ۵.۲ (نامساوی کوشی-شوارتز[۱]) به ازای هر y,x در فضای ضرب داخلی، داریم

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\ \|y\|$$

تعریف ۶.۲ برای هر زیر مجموعه‌ی $S \subseteq H$، مجموعه $S^{\perp}$ زیر فضای بسته‌ای از H است که به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S^{\perp} = \{\gamma \in H; \langle\gamma,\eta\rangle = ۰, \forall\ \eta \in H\}$$

$S^{\perp}$ را مکمل متعامد S می‌نامیم.

تعریف ۷.۲ اگر $x : H \longrightarrow H$ یک تبدیل خطی باشد، آن‌گاه x را یک عملگر (روی H) می‌نامیم به شرطی که x تحت توپولوژی نرم روی H پیوسته باشد. مجموعه‌ی تمام عملگرهای روی H را با $B(H)$ نمایش می‌دهیم.

[۱] Cauchy-Schwarz Inequality

تذکر **۸.۲** در حالی که تمام تبدیلات خطی روی فضای هیلبرت متناهی البعد عملگر هستند، اما با توجه به گزاره‌ی زیر تبدیلات خطی‌ای روی فضاهای هیلبرت نامتناهی البعد وجود دارند که پیوسته نیستند.

گزاره **۹.۲** فرض کنیم V و W فضاهای برداری نرم‌دار باشند. اگر V نامتناهی البعد و $W \neq \{\circ\}$ باشند، آن‌گاه تبدیل خطی $T : V \to W$ وجود دارد به طوری که T در هر $v_\circ \in V$ ناپیوسته است.

اثبات. چون W مخالف صفر است، در این صورت حداقل یک بردار $w \in W$ وجود دارد به طوری که $\|w\| = ۱$. فضای برداری نرم‌دار V یک پایه خطی مانند $\mathcal{B}$ دارد؛ بنا به فرض، هر پایه خطی از V نامتناهی است. بنابراین، زیر مجموعه‌ی نامتناهی شمارش‌پذیر $\{y_k|\ k \in \mathbb{N}\}$ از $\mathcal{B}$ وجود دارد. بردارهای y_k را می‌توان به گونه‌ای اختیار کرد که طول هر کدام برابر با یک باشد. به عبارت دیگر برای هر k، $\|y_k\| = ۱$. هر تبدیل خطی از $V \to W$ با اثر دادن آن بر بردارهای پایه مشخص می‌شود. از این رو، تبدیل خطی $T : V \to W$ را با اثر دادن بر بردارهایی از پایه‌ی $\mathcal{B}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T(y_k) &= kw, \quad k \in \mathbb{N} \\ T(y) &= \circ\,, \quad y \in \mathcal{B} \setminus \{y_k|\ k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

توجه کنید که $\|T(y_k)\| = k\|w\| = k$. چون برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم $\|y_k\| = ۱$، T بی‌کران است. بنابراین با توجه به این که پیوستگی برای نگاشت‌های خطی معادل با کرانداری است، نتیجه می‌گیریم T در هر $v_\circ \in V$ ناپیوسته است. ■

تعریف **۱۰.۲** تبدیل خطی $x : H \longrightarrow H$ کراندار است اگر $\|x\| < \infty$، که در آن $\|x\|$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|x\| = \sup\{\|x\xi\| :\ \xi \in H,\ \|\xi\| \leq ۱\}$$

گزاره **۱۱.۲** اگر $x \in B(H)$ باشد، آن‌گاه $\|x\| = \sup\{\ |\langle x\xi, \eta\rangle| :\ \|\xi\| = \|\eta\| = ۱\}$.

اثبات. فرض کنیم $\eta, \xi \in H$ به طوری که $\|\xi\| = \|\eta\| = ۱$. در این صورت بنا به نامساوی کوشی—شوارتز داریم

$$|\langle x\xi, \eta\rangle| \leq \|x\xi\|\ \|\eta\| = \|x\xi\|$$

بنابراین

$$\sup_{\|\xi\|=1} |\langle x\xi, \eta\rangle| \leq \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\| = \|x\|$$

در نتیجه داریم

$$\sup\{\ |\langle x\xi, \eta\rangle| :\ \|\xi\| = \|\eta\| = 1\} \leq \|x\|$$

حال نشان می‌دهیم $\|x\| \leq \sup\{\ |\langle x\xi, \eta\rangle| :\ \|\xi\| = \|\eta\| = 1\}$.
توجه کنید که $\|x\xi\|$ را می‌توانیم به صورت $\|x\xi\| = \langle x\xi, \frac{x\xi}{\|x\xi\|}\rangle$ بنویسیم. بنابراین

$$\|x\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\| = \sup_{\|\xi\|=1} \langle x\xi, \frac{x\xi}{\|x\xi\|}\rangle \leq \sup\{\ |\langle x\xi, \eta\rangle| :\ \|\xi\| = \|\eta\| = 1\}$$

■

لم ۱۲.۲ اگر $x \in B(H)$ و برای هر $\xi \in H$ داشته باشیم $\langle x\xi, \xi\rangle = 0$، آن‌گاه $x = 0$.

اثبات. بنا به فرض برای هر $\eta, \xi \in H$ داریم

$$\langle x(\xi + \eta), \xi + \eta\rangle = 0$$

لذا پس از ساده کردن داریم

$$\langle x\xi, \eta\rangle + \langle x\eta, \xi\rangle = 0 \qquad (1)$$

با جایگذاری $i\eta$ به جای η در (۱) خواهیم داشت

$$i\langle x\eta, \xi\rangle - i\langle x\xi, \eta\rangle = 0 \qquad (2)$$

با ضرب (۲) در i و جمع آن با (۱) نتیجه می‌شود

$$2\langle x\xi, \eta\rangle = 0$$

چون تساوی بالا برای هر ξ و η برقرار است، قرار می‌دهیم $\eta = x\xi$. بنابراین برای هر $\xi \in H$ داریم $\langle x\xi, x\xi\rangle = 0$. لذا بنا به تعریف نرم $\|x\xi\| = 0$ و در نتیجه داریم $x = 0$. ■

تعریف ۱۳.۲ فرض کنیم A یک فضای خطی روی $\mathbb{C}$ همراه با عمل ضرب $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ باشد به‌طوری که برای هر $a, b, c \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱) $(ab)c = a(bc)$،

۲) $(a+b)c = ac + bc$،

۳) $a(b+c) = ab + ac$،

۴) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

در این صورت A را یک جبر می‌نامیم.

زیر فضای B از A را یک زیر جبر از A گوییم هرگاه همراه با اعمال A یک جبر باشد.

تعریف ۱۴.۲ یک برگشت روی جبر A، نگاشت مزدوج خطی روی A است که با $*$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$* : A \to A, \quad a \mapsto a^*$$

و برای هر $b, a \in A$ دارای خاصیت زیر است

$$a^{**} = a \ , \ (ab)^* = b^* a^*$$

در این صورت زوج مرتب $(A, *)$ را $*-$جبر می‌نامیم.

فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از $*-$جبر A باشد. قرار می‌دهیم $S^* = \{a^* : \ a \in S\}$ و اگر $S = S^*$، آن‌گاه S را خود الحاق گوییم. زیر جبر خود الحاق B از $*-$جبر A را یک $*-$زیر جبر از A می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۲ A را یک C^*-جبر نرم‌دار مختلط با برگشت $*$ می‌نامیم اگر

۱) نرمی چون $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $(A, \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ باشد.

۲) برای هر $x, y \in A$، $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$.

۳) برای هر $x \in A$، $\|x^* x\| = \|x\|^۲$.

مثال ۱۶.۲ در اینجا دو مثال از C^*-جبر ارایه می‌دهیم.

۱) هر زیر جبر A از $B(H)$ که تحت نرم بسته باشد و برای $x \in A$، x^* نیز متعلق به A باشد یک C^*-جبر است.

۲) جبر $C(\Omega)$ از توابع مختلط مقدار پیوسته روی فضای هاسدورف فشرده Ω، که در آن برای هر $f \in C(\Omega)$ تعریف می‌کنیم $\|f\| = \max\{|f(w)| : w \in \Omega\}$ و $f^*(w) = \overline{f(w)}$، یک C^*−جبر است.

تعریف **۱۷.۲** توپولوژی قوی عملگری، یک توپولوژی روی $B(H)$ است که با استفاده از خانواده‌ی نیم نرم‌های $\{\rho_f \ : \ f \in H\}$ تعریف می‌شود که در آن برای هر $x \in B(H)$ داریم $\rho_f(x) = \|xf\|$. یادآوری می‌کنیم که این توپولوژی، کوچکترین توپولوژی روی $B(H)$ است که تحت آن کلیه‌ی توابع $\rho_f : B(H) \to \mathbb{R}$ پیوسته هستند.

تعریف **۱۸.۲** الحاقی $x \in B(H)$، تبدیل خطی یکتای x^* روی H است که در مورد آن معادله $\langle x\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x^*\eta\rangle$ برای هر $\eta, \xi \in H$ برقرار است.

تذکر **۱۹.۲** به آسانی ثابت می شود که $\|x^*\| = \|x\|$. در نتیجه برگشت $*$ یک طولپا روی $B(H)$ است. علاوه‌براین برای هر $x \in B(H)$ داریم $\|x\|^۲ = \|x^*x\|$. بنابراین $B(H)$ یک C^*−جبر است.

تعریف **۲۰.۲** $*$−زیر جبر M از $B(H)$ را یک جبر فون نویمان می‌نامیم اگر

۱) $۱ \in M$

۲) M نسبت به توپولوژی قوی عملگری بسته باشد.

گزاره **۲۱.۲** فرض کنیم $x \in B(H)$. در این صورت

۱) $\ker x = (\mathrm{ran}\ x^*)^\perp$

۲) $(\mathrm{ran}\ x)^- = (\ker x^*)^\perp$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $\xi \in \ker x$ باشد. برای هر $\phi \in \mathrm{ran}\ x^*$ عضو $\eta \in H$ وجود دارد به طوری که $x^*\eta = \phi$. از آنجا که

$$\langle \xi, \phi\rangle = \langle \xi, x^*\eta\rangle = \langle x\xi, \eta\rangle = ۰$$

بنابراین $\xi \in (\text{ran } x^*)^\perp$. در نتیجه داریم $\ker x \subseteq (\text{ran } x^*)^\perp$.

حال فرض کنیم $\xi \in (\text{ran } x^*)^\perp$. در این صورت برای هر $\eta \in H$ داریم $\langle \xi, x^*\eta \rangle = \circ$. به‌ویژه، اگر قرار دهیم $\eta = x\xi$، آن‌گاه

$$\circ = \langle \xi, x^*\eta \rangle = \langle \xi, x^*x\xi \rangle = \langle x\xi, x\xi \rangle = \|x\xi\|^۲$$

بنابراین $\xi \in \ker x$. در نتیجه داریم $(\text{ran } x^*)^\perp \subseteq \ker x$.

در گزاره‌ی (۱) اگر x را با x^* جایگزین کنیم، آن‌گاه داریم $\ker x^* = (\text{ran } x)^\perp$. از طرفی می‌دانیم اگر M یک زیر فضا باشد، آن‌گاه $M^{\perp\perp} = \overline{M}$. بنابراین $(\ker x^*)^\perp = (\text{ran } x)^{\perp\perp} = (\text{ran } x)^-$. ■

تعریف ۲۲.۲ عملگر $z \in B(H)$ را معکوس‌پذیر نامیم، هرگاه عضو $y \in B(H)$ وجود داشته باشد به طوری که $yz = zy = ۱$. مجموعه عناصر وارون پذیر $B(H)$ را با $\text{Inv}(B(H))$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۲ طیف $x \in B(H)$ را با نماد $\sigma(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \ x - \lambda ۱ \notin \text{Inv}(B(H))\}$$

که در آن ۱ نشان دهنده عملگر همانی روی H است که هر عضو را به خودش می‌برد.

تعریف ۲۴.۲ شعاع طیفی عملگر $x \in B(H)$ را با نماد $r(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$$

تعریف ۲۵.۲ برد عددی $x \in B(H)$ را با نماد $W(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$W(x) = \{\langle x\xi, \xi \rangle :\ \xi \in H,\ \|\xi\| = ۱\}$$

تعریف ۲۶.۲ عملگر x روی H را هرمیتی نامیم، اگر $x = x^*$.

گزاره **۲۷.۲** عملگر $x \in B(H)$ هرمیتی است اگر و تنها اگر برای هر $\xi \in H$ داشته باشیم $\langle x\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم x هرمیتی باشد. در این صورت برای هر $\xi \in H$ داریم

$$\langle x\xi, \xi\rangle = \langle \xi, x^*\xi\rangle = \langle \xi, x\xi\rangle = \overline{\langle x\xi, \xi\rangle}$$

بنابراین $\langle x\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$.

حال فرض کنیم برای هر $\vartheta \in H$، $\langle x\vartheta, \vartheta\rangle \in \mathbb{R}$. در این صورت $\langle x\vartheta, \vartheta\rangle = \langle \vartheta, x\vartheta\rangle$. فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{C}$ دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $\vartheta = \xi + \lambda\eta$. اگر $\mathrm{Re}z$ و $\mathrm{Im}z$ به ترتیب نمایش قسمت‌های حقیقی و موهومی عدد مختلط z باشند، از آنجا که

$$\begin{aligned}\langle x\vartheta, \vartheta\rangle &= \langle x\xi, \xi\rangle + \overline{\lambda}\langle x\xi, \eta\rangle + \lambda\langle x\eta, \xi\rangle + |\lambda|^{۲}\langle x\eta, \eta\rangle,\\ \langle \vartheta, x\vartheta\rangle &= \langle \xi, x\xi\rangle + \overline{\lambda}\langle \xi, x\eta\rangle + \lambda\langle \eta, x\xi\rangle + |\lambda|^{۲}\langle \eta, x\eta\rangle,\end{aligned}$$

تساوی $\langle x\vartheta, \vartheta\rangle = \langle \vartheta, x\vartheta\rangle$ نتیجه می‌دهد

$$\overline{\lambda}\langle x\xi, \eta\rangle - \lambda\overline{\langle x\xi, \eta\rangle} = \overline{\lambda}\langle \xi, x\eta\rangle - \lambda\overline{\langle \xi, x\eta\rangle}.$$

اگر قرار دهیم $\lambda = i$ در این صورت داریم $\mathrm{Re}\langle x\xi, \eta\rangle = \mathrm{Re}\langle \xi, x\eta\rangle$ و با قرار دادن $\lambda = ۱$ تساوی $\mathrm{Im}\langle x\xi, \eta\rangle = \mathrm{Im}\langle \xi, x\eta\rangle$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین برای هر $\eta, \xi \in H$ داریم $\langle x\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x\eta\rangle$. در نتیجه داریم $x = x^*$. ■

گزاره **۲۸.۲** اگر x هرمیتی باشد، آن‌گاه $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$.

اثبات. چون $\sigma(x) \subseteq \overline{\{\langle x\xi, \xi\rangle : \|\xi\| = ۱\}}$ و از آنجا که x هرمیتی است بنا به گزاره‌ی ۲۷.۲ داریم $\langle x\xi, \xi\rangle \subseteq \mathbb{R}$. بنابراین، $\overline{\{\langle x\xi, \xi\rangle : \|\xi\| = ۱\}} \in \mathbb{R}$. لذا داریم $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$. ■

تعریف **۲۹.۲** یک تصویر روی H، عملگر خطی پیوسته و هرمیتی $x : H \to H$ است که $x^{۲} = x$.

تعریف **۳۰.۲** فرض کنیم A یک C^*−جبر باشد. $a \in A$ را مثبت گوییم اگر هرمیتی باشد و $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+_۰$. که در آن $\mathbb{R}^+_۰ = \{r \in R : r \geq ۰\}$. مجموعه‌ی عناصر مثبت A رابا A^+ نمایش می‌دهیم.

قضیه **۳۱.۲** فرض کنیم A یک C^*−جبر و $a \in A^+$ باشد. در این صورت عضو منحصر بفرد $b \in A^+$ وجود دارد به طوری که $b^{۲} = a$.