



به نام خدا



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیوتر

## بررسی حالت گذرای امواج در مواد پاشنده و کاربردهای آن

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی برق - مخابرات - میدان

قاسم ابراهیمی علویجه

استاد راهنما

دکتر رضا صفیان



دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده برق و کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی برق - مخابرات - میدان  
آقای قاسم ابراهیمی علویجه  
تحت عنوان

## بررسی حالت گذرای امواج در مواد پاشنده و کاربردهای آن

در تاریخ ۸۸/۱۲/۲۶ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

دکتر رضا صفیان

استاد راهنمای پایان‌نامه

دکتر ابولقاسم زیدآبادی نژاد

استاد مشاور پایان‌نامه

دکتر سید محمود مدرس هاشمی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

بر خود لازم می‌دانم که از توجه، راهنمایی و تشویق دوستان  
سپاسگزاری کنم مخصوصاً دکتر صفیان دکتر ابوالقاسم زیدآبادی  
نژاد و دوست عزیزم محمدباقر فریدنی سامانی تشکر کنم.

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،  
ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع  
این پایان‌نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی  
اصفهان است.

تقديم به :

پدر و مادر عزیزم

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
هشت	فهرست مطالب
1	چکیده
2	1- فصل اول
2	1-1 تاریخچه
3	2-1 علت فیزیکی وجود پیشرو
5	3-1 تحلیل ریاضی پیشروها و مقایسه آن با شبیه سازی عددی
5	4-1 کاربردهای پیشرو
6	5-1 ساختار پایان نامه
8	2- فصل دوم
8	1-2 مقدمه
9	2-2 صورت متعارف انتگرال موج
13	3-2 تقریب نقاط زینی و تابع فاز
14	1-3-2 تقریب فرکانس بالا
14	2-3-2 تقریب فرکانس پایین
20	3-3-2 مقایسه با نتایج شبیه سازی کامپیوتری
21	4-2 محاسبه‌ی انتگرال با استفاده از روش تندترین شیب
21	1-4-2 مسیر انتگرالگیری
22	2-4-2 اولین حالت گذرا(سامرفلد)
25	3-4-2 دومین حالت گذرا(بریلوئن)
27	5-2 سیگنال اصلی
28	6-2 سرعت انتقال پیشروها در محیط‌های پاشنده
29	3- فصل سوم
29	1-3 مقدمه
30	2-3 (STFT) Short Time Fourier Transform
31	3-3 تبدیل ویگنر-ویل
32	1-3-3 مولفه‌های متقابل ویگنر ویل
33	2-3-3 خواص WVD
33	3-3-3 حذف مولفه‌های متقابل و پیاده سازی عددی
35	4- فصل چهارم
35	1-4 مقدمه
35	2-4 فرمول بندی کلی روش PLRC
38	3-4 فرمول بندی کلی روش ADE
40	3-4 نحوه‌ی پیاده سازی عددی



41	5- فصل پنجم.....
41	1-5 مقدمه .....
41	2-5 بررسی پاسخ سیستم به ورودی پله مدوله شده با پارامترهایی مختلف .....
44	3-5 بررسی تاثیر پارامترهای محیط بر روی پیشروها .....
46	4-5 مقایسه با روش تحلیلی .....
48	5-5 نتیجه گیری .....
49	6- فصل ششم .....
49	1-6 مقدمه .....
51	2-6 تعیین توان تلف شده ی لحظه ای .....
52	3-6 حل معادله ی دما .....
54	4-6 مقایسه دو روش .....
55	5-6 نتیجه گیری و پیشنهاد .....
57	7- مراجع .....

## چکیده

انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیطهای پاشنده از موضوعاتی است که از ابتدای قرن بیستم، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. یکی از نتایج قابل توجه بررسی این محیطها، سرعت انتشار انرژی و مقایسهی آن با سرعتهای گروه و فاز در این محیط است. چگونگی انتشار امواج در محیط پاشنده بصورت تحلیلی و به طور تجربی نیز بررسی شده و نتایج بسیار جالبی به همراه داشته است. به این گونه که فارغ از نوع تحریک در نقطه صفر، حالت گذرای ثابتی وجود دارد که از لحاظ شکل موج هیچ ارتباطی به سیگنال اصلی ندارد و تنها به پارامترهای محیط وابسته است.

تمامی بررسیهای که پیش از این انجام شده به صورت تحلیلی تقریبی بوده است، در این پایان نامه حالتهای گذرای انتشار سیگنال با روش FDTD شبیه سازی می گردد و به ازای تغییر پارامترهای محیط لورنتس میدان انتشار یافته در این محیط را بدست آورده و تغییرات میدان انتشاری را بررسی شده است. این بررسی شامل تعیین فرکانس لحظه ای با استفاده از روش ویگنر- ویل می باشد. این سیگنال های پیشرو دارای خواص بسیار جالبی نیز می باشند که از جملهی آن می توان به تلفات بسیار کم آن نسبت به سیگنال اصلی اشاره کرد. با توجه به این نکته در محیطهای دیبای مانند آب، خاک و محیطهای پاشندهی دیگر براحتی می توان از این پیشرو به منظور مخابرات زیر آب و آشکارسازیهای زیر زمین استفاده کرد. که برای نمونه می توان به استفاده از پیشروها به جای سونار در آشکار سازی ها اشاره نمود و کاربرد دیگر آن، گرمایش اجسام است که بدلیل تلفات کم می تواند بصورت یکنواخت کل جسم تحت تابش را گرم نماید. در صورتی که در مدل های کنونی گرمایش از طریق تابش تنها محدود به لایه های بالایی می شود و لایه های زیرین تنها از طریق همرفت و رسانش گرم می شوند.

کلمات کلیدی: 1- پیشرو 2- تندترین شیب 3- روش تفاضلات محدود حوزهی زمان 4- تبدیل ویگنر- ویل  
5- محیط پاشنده

## فصل اول

### مقدمه

#### 1-1 تاریخچه

انتشار امواج در محیط خطی و پاشنده‌ی زمانی یکی از موضوعات پیچیده و در پاره‌ای اوقات بحث برانگیز از قرن نوزدهم بوده است. همیلتون<sup>1</sup> [1] اولین بررسی، روی محیط‌های پاشنده را در سال 1839 انجام داد. یعنی زمانی که سرعت گروه معرفی شد. متعاقباً، رایلی<sup>2</sup> تفاوت بین سرعت گروه و فاز را بیان کرد [2 و 3] مدل‌های کلاسیک لورنتس<sup>3</sup>، دیبای<sup>4</sup> و دورود<sup>5</sup> [4-6] نقطه عطفی در بیان ویژگی‌های محیط نارسانای خطی بوده است. سامرفلد<sup>6</sup> و بریلوئن<sup>7</sup> از جمله محققان پیشقدم در زمینه انتشار امواج در محیط خطی، همسانگرد، همگن و پاشنده بودند [7-10]. آنها از روش مجانبی تندترین شیب، برای توصیف انتشار یک سیگنال پله واحد مدوله شده با فرکانس حامل ثابت که در یک محیط لورنتس نیمه بینهایت، تک رزونانس و پسیو، استفاده کردند. هدف آنها پیدا کردن سرعت حرکت سیگنال در این محیط‌ها بود. این بررسی‌ها منجر به کشف دو سیگنال پیشرو<sup>8</sup> (پیش از انتشار سیگنال اصلی) شد. اولین پیشرو را که پیش از همه حرکت می‌کند و فرکانس بالایی دارد، سامرفلد و دومین پیشرو را که با اندکی تاخیر و با فرکانس پایین‌تری نسبت به پیشروی اولی نوسان می‌کند، بریلوئن می‌نامند.

---

<sup>1</sup> Hamilton

<sup>2</sup> Rayleigh

<sup>3</sup> Lorentz

<sup>4</sup> Debye

<sup>5</sup> Drude

<sup>6</sup> Sommerfeld

<sup>7</sup> Brillouin

<sup>8</sup> Precursor

سامرفلد متوجه شد که ابتدای سیگنال با سرعتی به اندازه‌ی سرعت نور در خلا، حرکت می‌کند و همچنین او ادعا می‌کند که برای ثبت این پیشرو نیاز به آشکار سازهای بسیار دقیق است و در صورتی که از این آشکار ساز استفاده شود سرعت انتشار برای پیشرو مستقل از پارامترهای محیط لورنتس است. رویکرد این دو نفر برای حل مساله به این گونه بود که ضریب شکست مختلط را با سری مک لورن ضریب شکست بر حسب فرکانس جایگزین کرده بودند. در نتیجه یک رابطه ساده‌ی حدودی که با فرکانس مختلط، فاصله و زمان در ارتباط بود، بدست آمد.

البته در مورد پیشروی نخست (سامرفلد) این روش تنها قسمت ابتدایی آن را بدست می‌آورد که این نقیصه را هندلرمن<sup>1</sup> و بلیستین<sup>2</sup> با استفاده از روش مجانبی یکنواخت<sup>3</sup> برطرف کردند [11]. بریلوئن و سامرفلد روش‌های گوناگونی را به منظور توصیف انتشار امواج در محیط‌های پاشنده‌ی به کار بردند. اما اگستن<sup>4</sup> جدیدترین و دقیق ترین روش برای توصیف انتشار امواج در این محیط را در ادامه‌ی تحقیقات سامرفلد و بریلوئن انجام داد [12-14]. با استفاده از روش مجانبی پیشرفته‌تر [15] توانستند توصیف دقیق تری را برای پیشروها برای محیط‌های لورنتس تک رزونانسی و دو رزونانسی ارائه دهند. همچنین در این تحقیقات [13] پاسخ محیط را به ازای ورودی ضربه و پله مدوله شده با حامل ثابت، بدست آورده شده است.

هرچند که بریلوئن و سامرفلد در همان آغاز 1914 وجود پیشروها را پیش‌بینی کرده بودند، اما این پیشروها بصورت عملی نیز به طور خیلی محدود و بیشتر کیفی، در محیط آب و گالیم آرسنیک در فرکانس مایکروویو [16] و نوری [17]، تجربه شده بودند. اخیراً یک سری آزمایش برای اثبات فرضیه نسیت انیشتین<sup>5</sup> در محیط‌های پاشنده، که سرعت گروه بالاتر از سرعت نور در خلا دارند، انجام شده است [18]. پیشرو سامرفلد در محیط‌های پاشنده‌ی دیگری همچون بافت‌های زنده نیز دیده شده است.

## 2-1 علت فیزیکی وجود پیشرو

هنگامی که موج در خلا حرکت می‌کند، هیچ تغییری در شکل و سرعت انتشار آن رخ نمی‌دهد. اما هنگامی که همین موج از یک محیط پاشنده عبور می‌کند، بخاطر اینکه هر مولفه به نحوه متفاوتی با محیط واکنش نشان می‌دهد، سرعت فاز و جذب برای هر فرکانس تغییر می‌کند که باعث تغییر در شکل موج می‌شود. این پدیده (پاشندگی) ناشی از نحوه رفتار گشتاور دو قطبی مواد نارسانا می‌باشد. می‌توان این گشتاورهای دو قطبی را همچون جرم و فنر مدل کرد [19]. اگر با استفاده از جرم و فنر یک اتم را مدل کنیم می‌توان به صورت رابطه‌ی (1-1) بنویسیم:

<sup>1</sup> Handelsman

<sup>2</sup> Bleistein

<sup>3</sup> Uniform asymptotic approach

<sup>4</sup> Oughstun

<sup>5</sup> Einstein

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\beta_p \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 = \frac{e}{m} E(r, t) \quad (1-1)$$

که با استفاده از تبدیل فوریه، حل زیر برای معادله (1-1) بدست می آید:

$$r(\omega) = \frac{e/mE(r,\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\beta_p\omega} \quad (2-1)$$

قطبش میکروسکوپی یک محیط  $P(r,\omega)$  از رابطه (2-1) بدست می آید.

$$P(r, \omega) = Np(r, \omega) = Ner(\omega) = \alpha_p E(r, \omega) \quad (3-1)$$

که در رابطه (3-1)،  $N$  تعداد مولکول بر واحد حجم می باشد و  $\alpha_p$  نفوذ پذیری الکتریکی مختلط و  $P(r,\omega)$  گشتاور دو قطبی میکروسکوپی می باشد. با مقایسه ی رابطه های (2-1) و (3-1) می توانیم  $\alpha_p$  برای محیط لورنتس محاسبه نماییم:

$$\alpha_p(\omega) = \frac{\left(\frac{Ne^2}{m}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta_p\omega} \quad (4-1)$$

قطبش میکروسکوپی  $P(r,\omega)$  و جابجایی الکتریکی با رابطه ی زیر بهم مرتبط می شوند:

$$D = \epsilon(\omega)E(r, \omega) = \epsilon_0(E(r, \omega) + P(r, \omega)) \quad (5-1)$$

از رابطه های (3-1) و (5-1) ضریب شکست به این صورت محاسبه می شود:

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)/\epsilon_0} = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta_p\omega}} \quad (6-1)$$

همانطور که در رابطه ی (6-1) می بینید، ضریب شکست به شدت به فرکانس وابسته می باشد که مویذ نکاتی است که در بالا اشاره شد و دلیل بوجود آمدن پیشروها به خوبی نمایان می شود. برای بهتر مشخص شدن حالت گذرا در مواد پاشنده میتوان به این صورت توجیه کرد که هنگامی که یک موج از خلا وارد محیط می شود، این موج یک سری از دو قطبی های میکروسکوپی را قطبی می کند که باعث یک قطبش ماکروسکوپی می شود که خود این قطبش یک میدان جدید ایجاد می کند که با میدان تابیده شده واکنش نشان می دهد. میدان نهایی دوباره با دو قطبی

ها واکنش نشان می‌دهد. و این روند تکرار می‌شود. برای رسیدن به حالت دائمی قطبش، نیاز به زمان است تا قبل از این حالت دائمی سیگنال‌هایی که بوجود می‌آیند پیشرو نامیده می‌شوند.

### 3-1 تحلیل ریاضی پیشروها و مقایسه آن با شبیه سازی عددی

اکنون با داشتن مدل ریاضی ضریب شکست، می‌توانیم پاسخ محیط را به موج تاییده شده بدست آوریم. این کار پیش از این مفصلاً بصورت تحلیلی انجام شده است. اما مشکلی که در روند حل تحلیلی این بحث وجود دارد تقریب‌هایی است که در این روش بکار برده شده است. که ممکن است خطای زیادی را به همراه داشته باشد [14]. به همین خاطر در این پایان نامه سعی شده است که این تحلیل‌ها با روش‌های عددی مقایسه شود روش عددی که در اینجا بکار برده شده است، روش تفاضل محدود حوزه‌ی زمان محدود می‌باشد. که جواب دقیق‌تری می‌دهد. البته نقیصه‌ی این روش نسبت به روش تحلیلی این است که برای هر تغییری که در پارامترهای محیط بدهیم باید مساله را دوباره شبیه سازی کنیم و دید جامعی نسبت به مساله پیدا نمی‌کنیم بنابراین از روش عددی تنها به منظور تایید صحت روش تحلیلی استفاده می‌کنیم.

پارامتر دیگری که باید در این دو روش با یکدیگر مقایسه شود فرکانس لحظه‌ای سیگنال پاسخ می‌باشد. از رابطه‌ی که در روش تحلیلی ارائه شده براحتی می‌توان فرکانس لحظه‌ای را محاسبه نمود [14]. برای محاسبه فرکانس لحظه‌ای در روش عددی از تبدیل ویگنر-ویل<sup>1</sup> (WVD) استفاده می‌شود. این روش که مفصلاً در پیوست دوم به آن می‌پردازیم، فرکانس لحظه‌ای دقیق را می‌دهد.

### 4-1 کاربردهای پیشرو

امروزه با توجه به قابلیت‌ها و نیازهایی که در مورد پالس‌های باریک نوری و پالس‌های میکروویوی پهن بانندی وجود دارد، بر اهمیت پیشروها بسیار افزوده شده است. ویژگی جالب توجه پیشروها، استقلال آنها از سیگنال اصلی می‌باشد بطوری که نه فرکانس و نه دوره زمانی آنها به سیگنال اصلی بستگی ندارد. همچنین پیشروها تلفات کمتری نسبت به سیگنال اصلی دارند و تلفات آنها با جذر فاصله رابطه دارد در حالی که تلفات سیگنال اصلی نمایی است. در محیط دیبای دوره زمانی پیشروها (T) از دوره‌ی تناوب سیگنال اعمالی ( $1/f_c$ ) بزرگ‌تر است ( $f_c$  نشان‌دهنده‌ی فرکانس سیگنال اعمالی می‌باشد). در محیط دیبای پیشروی دوم (بریلوئن) غالب می‌باشد و تلفات بسیار کمی دارد. بنابراین در محیط‌های دیبای مانند آب، خاک و محیط‌های پاشنده‌ی دیگر براحتی می‌توان از این پیشرو به منظور مخابرات زیر آب و آشکارسازی‌های زیر زمین استفاده نمود. برای نمونه می‌توان به استفاده از پیشروها به

<sup>1</sup> Wigner-Vill Distribution

جای سونار در آشکار سازی ها [20] اشاره نمود و کاربرد دیگری که می توان به آن اشاره کرد، برای گرمایش اجسام از آن می توان استفاده کرد که بدلیل تلفات کم می تواند بصورت یکنواخت کل جسم تحت تابش را گرم نماید. در صورتی که در مدل های کنونی گرمایش از طریق تابش تنها محدود به لایه های بالایی می شود و لایه های زیرین تنها از طریق همرفت و رسانش گرم می شوند. این کاربردها به طور مفصل در فصل پنجم توضیح داده می شوند.

## 1-5 ساختار پایان نامه

بر اساس مطالب گفته شده در این فصل، فصل های بعدی این پایان نامه به شرح زیر می باشد:

فصل دوم: در این فصل به بررسی تحلیلی انتشار میدان در محیط لورنتس می پردازیم. البته باید توجه کرد که در این روش تحلیلی تقریب نیز وجود دارد. روش تحلیلی که در این فصل به آن پرداخته شده است روش تندترین شیب می باشد. که در این روش مسیر انتگرال گیری تغییر داده می شود و به نحوی انتخاب می شود که با تقریب مناسبی حول یک نقطه مقدار انتگرال بدست آید. پس از بدست آوردن انتگرال، حالت های گذرای را که در ابتدا این فصل توضیح آن داده شد، بدست می آوریم. در پایان این فصل به بررسی فرکانس و رفتار این حالت های گذرا می پردازیم.

فصل سوم: در این فصل به بررسی روش های حوزه زمان - فرکانس می پردازیم و روش های مختلف برای بدست آوردن این حوزه را بررسی می کنیم. در نهایت روش انتخابی را که روش ویگنر - ویل است را شرح داده و مشکلات آنرا بررسی و رفع می کنیم.

فصل چهارم: در این فصل روش عددی تفاضل محدود حوزه ی زمان در محیط های پاشنده، بررسی شده است. برای تعیین میدان ها در محیط های پاشنده، روش های متعددی وجود دارد که تنها به دو روش آن اشاره شده است. سپس روابط بروز رسانی را در هر دو محیط لورنتس و دیبای بدست آورده ایم. از این روابط برای شبیه سازی و تعیین امواج الکترومغناطیسی در محیط لورنتس استفاده شده است.

فصل پنجم: در این فصل نتایج شبیه سازی با استفاده از روش‌هایی که در فصل چهارم توضیح آن داده شده است، آورده شده است. در این فصل تغییرات دامنه و فرکانس پیشروها و سیگنال اصلی با توجه به تغییر پارامترها محیط نیز بررسی شده است. همچنین با استفاده از روش ویگنر-ویل که در پیوست دوم توضیح داده شده است فرکانس لحظه‌ای پیشرو بدست آورده شده است. همچنین رفتار فرکانس لحظه‌ای با استفاده از روش تحلیلی و عددی مقایسه شده است.

فصل ششم: در این فصل با استفاده از روش‌های عددی که در فصل‌های پیشین شرح داده شد، به یکی از کاربردهای پیشرو در صنعت می‌پردازیم که این کاربرد همان گرمایش اجسام بوسیله امواج الکترومغناطیسی است با این تفاوت که به جای سیگنال اصلی از پیشروها استفاده می‌کنیم در نهایت نحوه گرم شدن بوسیله این دو روش را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم و فرض‌های ابتدایی را اثبات می‌نماییم.



## فصل دوم

### بررسی روش تندترین شیب و کاربرد آن در بررسی انتشار امواج در محیط‌های پاشنده

#### 1-2 مقدمه

در این فصل یک روش تحلیلی ارائه می‌گردد که با استفاده از آن می‌توان با داشتن رابطه ضریب شکست پاسخ محیط را در هر لحظه و هر مکان محاسبه نمود. پاشندگی امواج به دو نوع است:

- پاشندگی زمانی<sup>۱</sup>
- پاشندگی فضایی<sup>۲</sup>

پاشندگی که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد از نوع زمانی می‌باشد و در حوزه‌ی فرکانس مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل‌های مختلفی برای پاشندگی در مواد مختلف وجود دارد که در فصل سوم مفصلاً مورد بررسی قرار می‌گیرد، در این فصل تنها به مدل لورنتس<sup>۳</sup> که برای مدل کردن پاشندگی در گازها استفاده می‌شود، می‌پردازیم. که داریم:

---

<sup>1</sup> Temporal dispersion

<sup>2</sup> Spatial dispersion

<sup>3</sup> Lorentz

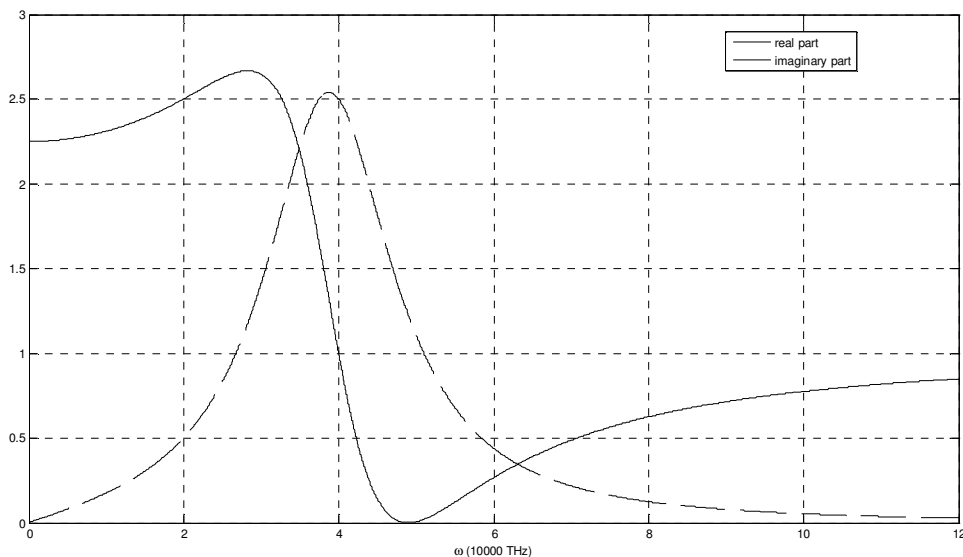
$$n(\omega) = \left( \frac{\omega_1^2 - \omega^2 - 2j\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2j\delta\omega} \right)^{1/2} \quad (1-2)$$

که در این رابطه  $\omega_0$  فرکانس تشدید،  $\delta$  ضریب جذب محیط،  $b$  فرکانس پلاسما می باشد [14 و 23].

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + b^2 \quad (2-2)$$

$$b^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

(1-2) مربوط به مقدار حقیقی و موهومی ضریب شکست ( $n(\omega)$ ) بر حسب فرکانس نشان داده شده است.



شکل (1-2) بخش حقیقی و موهومی ضریب شکست لورنتس بر حسب فرکانس

## 2-2 صورت متعارف<sup>1</sup> انتگرال موج

فرض کنید موج تخت الکترومغناطیسی در جهت مثبت  $Z$  در محیط خطی، همسانگرد و همگن منتشر شود و این محیط پاشنده‌ی زمانی از نوع لورنتس باشد. در صورتی که  $A(Z, t)$  هر مولفه میدان پتانسیل یا هر مولفه میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد، خواهیم داشت:

$$A(Z, t) = \oint \tilde{A}(Z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3-2)$$

<sup>1</sup> Canonic form

که  $\tilde{A}(Z, \omega)$  تبدیل لاپلاس  $A(Z, t)$  و  $\omega = \omega' + i\omega''$  فرکانس مختلط می‌باشد، که این تابع را می‌توان از معادله‌ی هلمهولتز بدست آورد که به صورت رابطه‌ی (4-2) می‌باشد:

$$[\nabla^2 + k^2(\omega)]A(\omega) = 0 \quad (4-2)$$

جواب معادله هلمهولتز [14] در یک بعد را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\tilde{A}(Z, \omega) = A_+(\omega)e^{+ikZ} - A_-(\omega)e^{-ikZ} \quad (5-2)$$

در صورتی که هیچگونه انعکاسی از محیط نداشته باشیم (یعنی انتشار در جهت  $-Z$  نداشته باشیم) می‌توانیم بنویسیم:

$$A(z, t) = \oint A_+(\omega) \exp[i(kz - \omega t)] dz \quad (6-2)$$

چون، میدان تابیده شده تخت است بنابراین :

$$A(0, t) = f(t) \quad (7-2)$$

$$f(t) = \oint A_+(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

از رابطه (7-2) عکس تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$A_+(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(t) e^{+i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \tilde{f}(\omega) \quad (8-2)$$

بنابراین انتگرال انتشار موج به صورت دقیق برای موج تخت در یک محیط پاشنده به صورت زیر است [14]:

$$A(Z, t) = \frac{1}{2\pi} \oint \tilde{f}(\omega) \exp[(i(k(\omega)Z - \omega t)] d\omega \quad Z > 0 \quad (9-2)$$

می‌توان رابطه بالا را به صورت زیر هم تعریف کرد:

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \tilde{f}(\omega) \exp\left[\frac{z}{c} \phi(\omega, \theta)\right] d\omega \quad \theta = \frac{ct}{z} \quad (10-2)$$

که  $\phi(\omega, \theta)$  تابع فاز مختلط به صورت زیر است:

$$\phi(\omega, \theta) = i\omega[n(\omega) - \theta] \quad (11-2)$$

از آنجا که  $n(\omega) = n^*(-\omega^*)$  از رابطه (11-2) خواهیم داشت:

$$\varphi(\omega, \theta) = \varphi^*(\omega^*, \theta) \quad (12-2)$$

از آنجایی که سیگنال برای  $t < 0$  برابر صفر می‌باشد، مقدار انتگرال به ازای  $\theta < 1$  برابر صفر است در غیر این صورت سرعت انتقال سیگنال بیشتر از  $c$  می‌باشد که خلاف اصول نسبیت است. براساس تابع فازی که در رابطه‌ی (11-2) تعریف شد و با جایگذاری  $n(\omega)$  از رابطه (1-2) می‌توان مشاهده کرد که تابع فاز دارای دو شاخه بریدگی است [23]، که در شکل (2-2) نمایش داده شده است.

$$\omega'_{\pm} = \pm \sqrt{\omega_1^2 - \delta^2} - \delta i \quad \omega_{\pm} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} - \delta i \quad (13-2)$$

برای آنالیز تابع فاز از پارامترهای بریلوئن که در [13] آمده است، استفاده می‌کنیم:

$$\omega_0 = 4 \times 10^{16} \text{ rad/sec}$$

$$b^2 = 20 \times 10^{32} \text{ rad/sec}^2$$

$$\delta = 0.28 \times 10^{16} \text{ rad/sec}$$