
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد

رشته ریاضی

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه :

چه موقع یک تابع خطی ضربی است

استاد راهنما :

فریبا ارشاد

استاد مشاور :

بهمن یوسفی

نگارش :

سید صاحب معصومی

بهمن ماه 1388

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : چه موقع یک تابعک خطی ضربی است

که توسط سید صاحب معصومی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع : 1388/11/29 نمره : 17/75 (هفده وهفتادوپنج) درجه ارزشیابی: خوب

اعضای هیئت داوران :

	نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
.1	دکترفریباارشاد	استادراهنما	استادیار	
.2	دکتر بهمن یوسفی	استاد مشاور	استاد	
.3	دکتر صدیقه جاهدی	استاد داور	استاد یار	
.4	دکتر حسین توللی	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

سپاسگزاری

با تشکر و سپاس از استاد بزرگوار سرکار خانم دکتر ارشاد که با اندیشه و فکر خود اندیشه کردن را آموخت .

فهرست مطالب

چکیده:

چه وقت یک تابعک خطی ضربی است

به وسیله ی :

سید صاحب معصومی

پایان نامه ای که در پیش رو دارید حاوی سه فصل می باشد که در فصل اول مقـدمات و تابعک های ضربی روی جبرهای باناخ و قضیهٔ گلیسیون – کاهانه – زلازکو (G.K.Z) را ملاحظه خواهید کرد و در فصل دوم در بخش اول زیـر فضـاهای باهمبعـد متنـاهی و در بخش دیگر آن خاصیت P(k,n) برای جبرهای باناخ را می بینیـد و امـا در فصـل سـوم قضایای معادل با قضیهٔ (G.K.Z) و همچنین در بخش پایانی آن شرایطی را بررسـی مـی کنیم در خصوص اینکه چه موقع یک تابعک خطی ضربی است. امید اسـت مـورد پسـند قرار گیرد.

فصل اول

مـقـدمـات

۱-۱- ۱ تـعـریـف: هرجبرمختلط یک فضای برداری روی میدان مختلط است که در آن یک ضرب تعریف شده است که دارای خواص زیر است .

به ازای هر x, y, z در A داریم

الف) $(xy)z = x(yz)$ ب $)(x+y)z = xz + yz$

. $)x(y+z) = xy + xz$

به ازای هر x, y در A و a اسکالر ت $)a(xy) = x(ay) = (ax)y$

2-1-1 تعریف: هرگاه یک نرم در A موجود باشد که A را به یک فضای خطی نرم دار مبدل کـرده و در نامساوی $(x, y \in A)$ $\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$ صدق کند آنگاه A یک جبر مخـتلط نـرم دار است.

3-1-1 تعریف: اگر در جبر باناخ A به ازای هر $x, y \in A$ ، $xy = yx$ آنگاه A را تعـویض پـذیر گویند(در این پایان نامه)

4-1-1 تعریف: اگر جبر مختلط نرم دار A یک فضای متری تام باشد یعنی A یـک فضـای بانـاخ باشد، آنگاه A را یک جبر باناخ گویند.

چند مثال:

مثال 1. فرض کنید $A=C(X)$ که درآن X یک فضای فشرده باشد. با نرم سوپرمم و ضرب نقطه به نقطه معمولی توابع، $(fg)(x)=f(x).g(x)$، A یک جبر باناخ تعویض پذیر یکدار می باشد.

مثال 2. $C_0(R^1)$ یک جبر باناخ تعویض پذیر است که یکدار نیست.

مثال 3. مجموعه تمام عملگرهای خطی بر R^k با نرم عملگر با جمع و ضرب تعریف شده بوسیله،

$$(A+B)x=Ax+Bx \quad , \quad (AB)(x)=A(Bx)$$

و
$$\|A\|=Sup\{\|Ax\| : \quad \|x\|\leq 1\}$$

در سرتا سر این نوشتار منظور از جبر باناخ، جبرباناخ روی میدان اعداد مختلط است که یکدار نیز می باشد مگر آنکه خلاف آن ذکر شده باشد.

5-1-1 تعریف: در جبر باناخ A ، عنصر $x\in A$ را معکوس پذیر گویند هرگاه $y\in A$ باشد به طوریکه $yx=xy=1$. این عنصر y را با x^{-1} نمایش می دهیم.

6-1-1 تعریف: در جبر باناخ A، طیف $x\in A$ را با $s(x)$ نشان می دهیم که به صورت زیر تعریف می شود.

$$s(x)=\{l\in ¢ : \text{وارون پذیر نباشد } l.1-x\}$$

برای مثال، اگر X فشرده باشد و $f\in C(X)$ آنگاه $s(f)=f(X)$.

7-1-1 تعریف: به ازای هر $x\in A$ شعاع طیفی $r(x)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$r(x)=\sup\{|l|, l\in s(x)\}.$$

1-1- 8 قضیه[28]: $s(x)$ به ازای هر $x\in A$فشرده و ناتهی است

9-1-1 تبصره[2]: $s(x)$ به فضای A وابسته است. مثلاً فرض کنید Bبست یکنواخت

چندجمله ایها در $A=C(\partial D)$ باشد $(\partial D=\{z\in ¢ : |z|=1\})$در این صورت $s_A(z)=\partial D$ و

$s_B(z)=\overline{D}$

شکل کلی تر مثال بالا درقضیه 1-1 . 14 بیان شده است.قبل از آن به تعاریف زیر نیازمندیم:

1-1- 10 تعریف: می گوییم a مولد جبر باناخ B است هرگاه B کوچکترین جبر باناخ

شامل $1,a$باشددر حقیقت مجموعه $\{p(a) :$ یک چند جمله ای است $p\}$در B چگال باشد.

11-1-1 مثال: اگر Aجبر باناخ تولید شده توسط f و Bجبر باناخ تولید شده

توسط $mf+l.1$جایی که $m,l\in ¢$ باشد، آنگاه $A=B$. زیرا $l.1\in A$ و $m.1$ سپس $l.1+mf\in A$

لذا $B\subset A$.

همچنین $-l.1\in B$ پس $f=\frac{1}{m}((mf+l.1)-l.1)\in B$ پس $A\subset B$.

1-1- 12 تعریف: فرض کنیم $K\subset ¢$فشرده باشد در این صورت«غلاف محدب

چند جمله ای K ($Polyno\min ally\ convex\ hull$) به صورت زیر تعریف می شود.

$\hat{K}=\{z\in ¢ : |p(z)|\le\|p\|_k , p$ برای هر چند جمله ای$\}$

که در آن $\|.\|_k$ نرم سوپریمم روی K می باشد.

1-1- 13 قضیه[2]: فرض کنید Kزیر مجموعه فشرده $¢$باشد آنگاه K برابر اجتماع K با مولفه

های همبندی کراندار $¢\setminus K$ است.

1-1- 14 قضیه[2]: اگر A یک جبر باناخ و $B \subset A$ جبر باناخ با مولد a باشد.

آنگاه $s_{B}(a) = \hat{s}_{A}(a)$.

1-1- 15 تعریف ایده آل : زیر مجموعه I از جبر تعویض پذیر A یک ایده آل است اگر :

الف) زیر فضای A (به مفهوم فضای برداری) باشد.

ب) هرگاه $x \in A$ و $y \in I$ آنگاه $xy \in I$.

اگر $A \neq I$ آنگاه I یک ایده آل حقیقی است. ایده آل ماکسیمال ایده آل حقیقی است، که در هیچ ایده آل حقیقی بزرگتر قرار ندارد. هیچ ایده آل حقیقی شامل یک عنصر معکوس پذیر نیست.

1-1- 16 قضیه[28]: اگر A جبر باناخ باشد، هر ایده آل ماکسیمال بسته است.

17-1-1 تعریف: فرض کنید A یک حلقه یکدار(تعویض پذیر) باشد آنگاه اشتراک تمام ایده آل های چپ ماکسیمال را با $Rad(A)$ نمایش می دهند.

هرگاه $Rad(A) = \{0\}$، A را نیمه ساده می نامیم.

1-1- 18 تعریف:اگر A یک جبر باناخ باشد، یک تابعک خطی c روی A را یک تابعک خطی ضربی می گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in A$ $c(xy) = c(x).c(y)$ و $c \neq o$ و این شرط معادل این است که بگوییم $c(1) = 1$ زیر $c(1) = c(x).c(1)$

اگر c یک تابعک خطی ضربی روی A باشد به راحتی می توان بررسی کرد که برای هر $x \in A$, $c(x) \in s(x)$.

اگر $(x - c(x).1)y = 1$ آنگاه باید $c(1) = 0$ و این غیر ممکن است.

در نتیجه $|c(x)| \le r(x) \le \|x\|$. بنابراین c یک تابعک خطی ضربی پیوسته و با نرم 1 است.

1-1-۱۹ **تعریف تبدیل گلفاند**: فرض کنیم A یک جبر باناخ تعویض پذیر یکدار و $m(A)$ مجموعه تمام تابعک های خطی ضربی A باشد به ازای هر $f \in A$ یک تبدیل خطی مانند $\hat{f}$ روی $m(A)$ چنان تعریف می کنیم که برای هر $h \in m(A)$ داشته باشیم $\hat{f}(h) = h(f)$. $\hat{f}$ را تبدیل گلفاند f می نامیم

در قضیه بعد A را یک جبر باناخ تعویض پذیر فرض کرده ایم.

1-1-۲۰ **قضیه**: هر ایده آل ماکسیمال M از A هسته یک $h \in M(A)$ است.

اثبات: وقتی M ایده آل ماکسیمال است آنگاه $\frac{A}{M}$ میدان است چون M بسته است . [1-1-16]

$\frac{A}{M}$ یک جبر باناخ است بنابراین یک ، یک ریختی مانند j از $\frac{A}{M}$ به میدان مختلط $\mathbb{C}$ وجود دارد.

هرگاه $h = j o j$ که در آن j نگاشت طبیعی از A به روی $\frac{A}{M}$ است ،آنگاه $h \in m(A)$ و $\ker h = M$.

1-1-21 **تعریف فضای هاسدورف**: فضای توپولوژیک X را یک فضای هاسدورف گوییم هرگاه برای هر $p, q \in X$, $(p \ne q)$ مجموعه های باز V,U وجود داشته باشد به طوریکه، $p \in U$, $q \in V$: $U \cap V = \emptyset$

1-1-22 **مثال**: هر فضای متری یک فضای هاسدورف است.

1-1-23 **تعریف**:گوییم زیر فضای M از جبر باناخ A دارای همبعد n است هرگاه $\dim \frac{A}{M} = n$.

1-1- 24 **تعریف**: فضای توپولوژیک X را یک فضای فشرده موضعی گویند هرگاه هرنقطه فضا همسایگی با بست فشرده داشته باشد یعنی هر $p \in X$ همسایگی مانند V داشته باشد بطوریکه $\overline{V}$ فشرده باشد.

1-1- 25 **تعریف**: مجموعه E را یک فضای توپولوژیک s فشرده گویند هرگاه E اجتماع شمارش پذیری از مجموعه های فشرده باشد.

26-1-1 **تعریف**: جبر $A(D)$ (disc algebra) فضای تمام توابعی است که روی $D = \{z \in ₵ : |z| < 1\}$ تحلیلی و روی $\overline{D}$ پیوسته می باشند.

27-1-1 **قضیه(بئر)**[28] :اگر فضای متریک تام و ناتهی X اجتماع شمارایی از مجموعه های بسته باشد آنگاه حداقل یکی از آنها دارای درون ناتهی است. به عبارت دیگر اگر X فضای متریک کامل باشد آنگاه اشتراک هر گردایه شمارا از مجموعه های باز چگال در X ، خود نیز در X چگال است.

1 - 2 **تابعک های خطی ضربی روی جبرهای باناخ**:

- برای جبر $C[0,1]$ از همه توابع پیوسته تعریف شده روی قطعه یکه $[0,1]$، هر تابعک خطی ضربی برابر با $-d(x)$ تابعک ارزیابی (سنجش) در نقطه $x \in [0,1]$ است [4]

$$\lfloor d_x(f) = f(x) \rfloor$$

برای جبر $H^{\infty}(D)$ از همه توابع تحلیلی کراندار تعریف شده روی قرص یکه باز $\{D = \{z \in ₵ : |z| < 1\}$، تابعکهای d_Z ، $Z \in D$ به وضوح خطی و ضربی هستند اما همچنین مجموعه بزرگی از دیگر تابعک های ضربی خطی وجود دارد که به مرز D مربوط می شود [5]

- برای جبر گروهی $L^1(T)$ از توابع انتگرال پذیر روی دایره یکه T، با ضرب پیچش، هر تابعک خطی ضربی با یک عضو از دوگان Z (مجموعه اعداد صحیح)داده می شود [2]
- برای جبر عملگری $B(X)$ از همه نگاشت های خطی کراندار روی یک فضای باناخ داده شده X مجموعه $m(B(X))$ برای بسیاری از فضاهای باناخ کلاسیک شامل فضاهای هیلبرت خالی است اگر چه برای برخی فضاهای باناخ ممکن است $m(B(X))$ بطور شگفت آور بزرگ باشد

فضای تمام تابعک های خطی کراندار روی جبر باناخ A را با A^* نمایش می دهیم.

قضیه زیر توسط آپوتی (Aupetit) اثبات شده است آنرا مجدداً بیان می کنیم؛

1-2-1 **قضیه**: فرض می کنیم A یک جبر باناخ یکدار باشد آنگاه $c \in A^*$ یک تابعک خطی ضربی است،اگر و تنها اگر برای هر $x \in A$، $c(x) \in s(x)$.

اثبات: فرض کنیم که برای هر $x \in A$. $c(x) \in s(x)$ به ویژه $c(1) \in s(1)$. بنابراین $c(1) = 1$.

فرض می کنیم برای هر $n \geq 2$ ، $p(l) = c(l.1-x)^n$. به وضوح p یک چند جمله ای از درجه n و دارای n ریشه $l_n, l_{n-1}, ..., l_2, l_1$ است داریم؛

$o = p(l_i) = c(l_i.1-x)^n \in s(l_i.1-x)^n$ در نتیجه $l_i \in s(x)$ (زیرا برای هر چند جمله ای P، داریم $s(P(x)) = P(s(x))$ [1]) و بنابراین $|l_i| \leq r(x)$.

همچنین

$$p(l) = l^n - nc(x).l^{n-1} + \binom{n}{2} c(x^2)\, l^{n-2} + ... + (-1)^n c(x^n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (l - l_i).$$

بنابراین $\sum_{i=1}^{n} l_i = nc(x) \qquad \sum_{1\le i\le j\le n} l_i l_j = \binom{n}{2} c(x^2).$

پس

$$(\sum_{i=1}^{n} l_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 + 2\sum_{1\le i\le j\le n} l_i l_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} l_i^2 + n(n-1)c(x^2)$$
$$(nc(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 + n(n-1)c(x^2).$$

در نتیجه

$$n^2(c(x))^2 - n^2 c(x^2) = \sum_{i=1}^{n} l_i^2 - nc(x^2).$$

بنابراین

$$|n^2(c(x))^2 - c(x^2)| = |\sum_{i=1}^{n} l_i^2 - nc(x^2)|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |l_i|^2 + n|c(x^2)|$$
$$\le \sum_{i=1} r(x)^2 + n|c(x^2)|.$$

پس

$$|c(x)^2 - c(x^2)| \le (r(x)^2 + |c(x^2)|) \times \frac{1}{n}.$$

لذا برای هر $x \in A$،

$$|c(x)^2 - c(x^2)| = 0$$

درنتیجه،

$$c(x)^2 = c(x^2)$$

گیریم $x, y \in A$ پس؛

از طرفی
$$c((x+y)^2) = c(x^2 + y^2 + xy + yx) \quad (1)$$
$$= c(x^2) + c(y^2) + c(xy + yx)$$

$$c((x+y))^2 = (c(x+y))^2$$
$$= (c(x) + c(y))^2$$
$$= c(x)^2 + c(y^2) + 2c(x).c(y) \quad (2)$$

بنابراین از رابطه 1 و 2 نتیجه می گیریم که،

$$c(xy + yx) = 2c(x).c(y) \quad (3)$$

حال اتحاد

$$(ab - ba)^2 + (ab + ba)^2 = 2[a(bab) + (bab)a]$$

نتیجه می دهد که،

$$(c(ab - ba))^2 + 4c(a)^2.c(b)^2 = 4c(a).c(bab)$$

باقراردادن $a = x - c(x).1$ داریم $c(a) = 0$ حال اگر $b = y$ آنگاه $c(ay) = c(ya)$ و بنابراین $c(xy) = c(yx)$ سرانجام از (3) نتیجه می شود که $c(xy) = c(x).c(y)$.

2-2-1 قضیه: فرض کنید A یک جبر باناخ تعویض پذیر باشد آنگاه خواص زیر را داریم:

(i) $c \to \ker c$ یک نگاشت دو سویی از مجموعهٔ تابعک های خطی ضربی A به روی مجموعه ایده آل های ماکسیمال A تعریف می کند.

(ii) برای هر $x \in A$ داریم $s(x) = \{c(x) : A$ روی c برای هر تابعک خطی ضربی $\}$.

اثبات (i) : اگر c یک تابعک خطی ضربی از A باشد به وضوح $\ker c$ یک ایده آل A است. وآن ایده آل ماکسیمال است، زیرا $\dim \frac{A}{\ker c} = 1$. برعکس اگر I یک ایده آل ماکسیمال از A باشد آنگاه بنا به قضیه 1-1-20، هسته یک تابعک خطی ضربی خواهد بود. اگر $\ker c_1 = \ker c_2$ آنگاه چون $c_1(1) = c_2(1) = 1$ نتیجه می گیریم که $c_1 = c_2$ بنابراین نگاشت قبلی یک نگاشت دوسویی است.

(ii) اگر c یک تابعک خطی ضربی باشد آنگاه قبلاً نشان دادیم که $(x - c(x).1)$ معکوس پذیر نیست. برعکس، اگر $x - l.1$ معکوس پذیر نباشد آنگاه $(x - l.1)A$ یک ایده آل است که در ایده آل ماکسیمال مانند I مشمول است. با استفاده از (i) یک تابعک خطی ضربی c_0 موجود است که $\ker c_0 = I$ بنابراین $c_0((x - l.1).1) = c_0(x) - l = 0$ و بنابراین (ii) اثبات شده است.

۱ - ۲ - ۳ توضیح : این قضیه نتیجه می دهد که مجموعه تابعک های خطی ضربی A یعنی $m(A)$ ،تهی نیست. همچنین آن نتیجه می دهد که در حالت تعویض پذیری رادیکال A با مجموعه اعضای شبه پوچ توان(یعنی عناصری چون $a \in A$ بطوریکه $r(a) = 0$) آن برابر است. در حقیقت اگر داشته باشیم $r(x) = 0$ آنگاه، $c(x) = 0$ برای هر $c \in M(A)$. در نتیجه $c(xy) = 0$ برای هر $y \in A$ بنابراین $r(xy) = 0$ و طبق قضیه ای در [1]، $x \in rad\ A$.

۱ - ۲ - ۴ قضیه: فرض کنیم K یک مجموعه فشرده باشد و $A = C(K)$ آنگاه $m(A)$ می تواند با K یکی شود.

اثبات: برای هر $x \in f$ ، $f \to f(x)$ یک تابعک خطی ضربی روی A می باشدکه با c_x نشان داده می شود و برآورد (*evaluation*) در x نامیده می شود. ازآنجا که A نقاط K را جدا می کند آنگاه $x \to c(x)$ یک نگاشت نشاننده از K بتوی $m(A)$ است.

حال ثابت می کنیم که برای هر $c \in m(A)$ ، xی در K هست که $c = c_x$.

فرض می کنیم این درست نباشدوفرض می کنیم برای هر $x \in K$ $c_x \neq c$. بنابراین برای هر $x \in K$ $f_x \in A$ موجود است بطوریکه $f_x(x) \neq 0$ و $c(f_x) = 0$.مجموعه $V_x = \{y \in K : f_x(y) \neq 0\}$ها یک پوشش باز از K را تشکیل می دهد. بنابراین $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ وجود دارد بطوریکه اگر قرار دهیم $f_i = f_{xi}$ آنگاه برای هر $i = 1,2,...,n$ ، $c(f_i) = 0$ و برای هر $x \in K$یک i $(1 \le i \le n)$ موجود است بطوری که $f_i(x) \neq 0$.

فرض کنیم $g = f_1\bar{f}_1 + ... + f_n\bar{f}_n$آنگاه $c(g) = 0$ و برای هر $x \in K$ $g(x) > 0$ در نتیجه $g^{-1} \in C(K)$ که یک تناقض است. چون خواهیم داشت $c(1) = 0$.بنابراین $x \to c_x$ یک دوسویی از K برروی $m(A)$ است.

۱-۲-۵ گزاره: اگر Tیک تابعک خطی روی جبر Aباشد. T ضربی است اگر و تنها اگربرای هر $x \in A$ $T(x^2) = (T(x))^2$.

اثبات: اگر T ضربی باشد، برای هر $x \in A$ $T(x^2) = T(x)T(x) = (T(x))^2$. حال فرض کنیم برای هر $x \in A$ $T(x^2) = (T(x))^2$ مانند اثبات قضیه 1-2-1، می توان نشان داد T ضربی است.

گزاره 1-2-5 یک گزاره صرفاً جبری است. گزاره بعدی یک نتیجه جالب آنالیزی از یک فرض جبری است.

6-2-1 گزاره : اگر T یک تابعک خطی روی جبر باناخ Aو $T(1) = 1$ و برای $x \in A$ ، $T(x^2) = (T(x))^2$. آنگاه T پیوسته است.

اثبات: چون $T(x^2)=(T(x))^2$ پس بنا به گزاره 1-2- 5 ، T ضربی است. پس هیچ عنصر وارون پذیری در $\ker(T)$ وجود ندارد.در غیر این صورت اگر $x\in \ker T$ وارون پذیر باشد، $xx^{-1}=1$. پس $1=T(x)T(x^{-1})=0$ که تناقض است. در نتیجه برای هر $x\in \ker(T)$ و هر $0\neq l\in ℂ$، $\frac{x}{l}\in \ker(T)$.

پس $|1-\frac{x}{l}|\geq 1$ [[1]] در نتیجه

$$|l.1-x|\geq|l|=|T(l.1-x)| \quad ; \quad x\in \ker(T),\ 0\neq l\in ℂ \tag{1}$$

حال فرض کنیم $y\in A$ $x=y-T(y).1$ $l=T(y)$. پس $y=l.1+x$ $x\in \ker(T)$ در نتیجه بنا به رابطه (1) برای هر $y\in A$ $|T(y)|\leq|y|$ پس T پیوسته است.

1 - 3 **قضیه گلیسون - کاهانه زلازکو**:

فرض کنید A یک جبرباناخ مختلط جابجایی و یکدار باشد. گلیسون ($A.M,Gleason$) در سال 1967 [6] و دو ریاضیدان دیگر بنامهای کاهانه ($J.P.Kahane$) وزلازکو ($Z.Zelazko$) بطور مستقل در سال 1967 [14] ثابت کردند که اگر M یک زیر فضای A باشد به طوریکه هم بعد آن یک آنگاه M یک ایده آل است اگر و فقط اگر M تنها شامل عناصر وارون ناپذیر باشد. یک باشد تناظر یک به یک بین زیر فضاهای A باهمبعد یک و زیر فضاهای A^* (دوگان A) با بعد یک وجود دارد. بنابراین می توان نشان داد که مطلبی که سه ریاضیدان فوق اثبات کردند معادل این است که هرگاه $f\in A^*$، آنگاه ضربی است اگر و فقط اگر برای هر $x\in A$ ، $f(x)\in s(x)$.

1-3-1 قضیه: اگر A یک جبر باناخ یکدار و M یک زیرفضای A با همبعد یک باشد اگرهیچ یک از عناصر M وارون پذیر نباشند، آنگاه M یک ایده آل ماکسیمال است.

توجه کنید در قضیه فوق ماکسیمال بودن M نتیجه بدیهی از فرض $\dim(\frac{A}{M})=1$ است. پس قسمت مهم قضیه ایده آل بودن M می باشد.

اثبات: به کمک قضیه 1-2-1 این قضیه را اثبات می کنیم. چون $Co\dim M=1$ و M شامل هیچ عنصر وارون پذیری نیست پس M بسته است. از طرفی چون همبعد آن یک است پس تابعک خطی مانند F بر A وجود دارد که $M=\ker F$، چون $1\notin M$ ، پس $a=F(1)\neq 0$.

بنابراین $\frac{F}{a}(1)=1$ و $\ker F=\ker\frac{F}{a}$. پس بدون آنکه به کلیت مطلب خللی وارد شود می توان فرض کرد که $F(1)=1$ و در نتیجه برای هر $x\in A$ داریم:

$$F(F(x)1-x)=0\Rightarrow\ F(x)\ 1-x\in M.$$

بنابراین با توجه به فرض $F(x)1-x$ وارون پذیر نیست و در نتیجه برای هر $x\in A$, $F(x)\ \in\ s\ (x)$ و با توجه به قضیه 1-2-1 ، F ضربی و در نتیجه $\ker F$ یک ایده آل است.

از این به بعد این قضیه را با $G.K.Z$ نمایش می دهیم.

قضیه زیر را به کمک قضیه $G.K.Z$ اثبات می کنیم. در نتیجه قضیه 1-2-1 و $G.K.Z$ معادل خواهند شد .

۱-۳-۲ قضیه : تابعک خطی F بر جبر باناخ A ضربی است هر گاه برای هر $x\in A$, $F(x)\ \in\ s\,(x)$

اثبات:

قرار دهید $M=\ker F$. چون $F(x)\ \in\ s\,(x)$ پس $F(1)=1$ و در نتیجه $F(x)\ 1-x\in M$.

بنابراین $Co\dim M=1$ و M نیز یک زیر فضای بسته است. هر گاه $x,x\in M$ نمی تواند وارون پذیر باشد زیرا $F(x)\ \in\ s\,(x),F(x)=0$. پس با توجه به قضیه $G.K.Z$ ، M یک ایده آل