دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

برآورد حداکثر درستنمایی پارامترهای مدل اتورگرسیو با نوفه پایدار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

جواد علیمرادی

استاد راهنما

دکتر صفیه محمودی

دی‌ماه ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی آقای جواد علیمرادی
تحت عنوان

برآورد حداکثر درستنمایی پارامترهای مدل اتورگرسیو با نوفه پایدار

در تاریخ ۲۷ /۱۰ /۱۳۹۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما　　دکتر صفیه محمودی

۲– استاد مشاور　　دکتر سروش علیمرادی

۳– استاد داور۱　　دکتر افشین پرورده

۴– استاد داور۲　　دکتر ساره گلی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　دکتر فرید بهرامی

سپاس بی کران خداوندی، که موهبت تفکر را به انسان ارزانی داشت تا از برکت آن به پرورش و شکوفایی ذوق و اندیشه خویش بپردازد و از سایر موجودات عالم هستی ممتاز گردد و درود بر رسولش پیامبر رحمت و امام پیشوایان و درود بر اهل بیت عصمت و طهارت، چراغ های تاریکی ها، نگاهبان امّت ها و مشعلگاه روشن دین.

اکنون که به یاری و عنایت پروردگار، پایان نامه خود را به پایان رسانده ام، به رسم ادب و حق شناسی، تشکر و قدردانی از عزیزانی که همواره همراهم بودند و یاری ام نمودند را بر خود لازم می دانم.

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بی کران، در کمال افتخار و امتنان صمیمانه تقدیم می کنم:

به محضر ارزشمند پدر و مادر، کسانی که درس خوب زیستن را عاشقانه به من آموختند و با چراغ وجودشان همیشه روشنگر مسیر زندگی ام بوده و خواهند بود...

به همسر مهربانم که صبورانه همراه من در مسیر به انتهای خوشبختی بوده و خواهد بود و چه خوش است این همراهی...

به استاد راهنمای بزرگوار و مهربانم سرکار خانم دکتر محمودی که در نهایت صبر و حسن خلق و با راهنمایی های بسیار ارزشمند، این پایان نامه را به انتهای خوب و نتیجه مطلوب هدایت کردند. بی شک یاری و دستگیری ایشان و ایثار و محبت بی دریغشان برگ سبزی ست جدا ناشدنی از تنه استوار ایشان در مقام تعلیم و تربیت...

و به خواهران و برادر مهربان، عزیز و دلسوزم که حضورشان لازمه و تضمین کننده تمام موفقیت های من بوده و هست...

همچنین از استاد مشاور محترم و ارجمند خود جناب آقای دکتر علیمرادی و نیز از اساتید محترم داور، جناب آقای دکتر پرورده و سرکار خانم دکتر گلی که با نظرات و پیشنهادات بسیار سازنده خود موجب ارتقای این پایان نامه شدند صمیمانه تشکر می نمایم.

دیماه ۱۳۹۳

کلیه حقوق مادی مترتّب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلّق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

تاکنون برآوردهای متعددی برای پارامترهای مدل اتورگرسیو سببی با نوفه دُم سنگین انجام شده است، مانند برآورد کمترین مربعات، کمترین قدر مطلق انحرافات، کمترین قدر مطلق انحرافات وزنی، برآوردگرهای M، وایتل و برآورد گشتاوری. در این پایان نامه به بررسی برآوردگر حداکثر درستنمایی (ML) پارامترهای مدل اتورگرسیو سببی و غیر سببی با نوفه پایدار غیر نرمال پرداخته می‌شود و توزیع‌های حدی ناتباهیده برای برآوردگرهای حداکثر درستنمایی پارامترهای چند جمله‌ای اتورگرسیو و پارامترهای توزیع نوفه پایدار مورد مطالعه قرار می‌گیرند. مشاهده می‌شود برآوردگرهای پارامترهای چند جمله‌ای اتورگرسیو $n^{\frac{1}{\alpha}}$-سازگار هستند و در توزیع به ماکزیمم کننده یک فرآیند تصادفی همگرا می‌شوند. با توجه به اینکه پیدا کردن فرم دقیق این توزیع حدی دشوار است، شکل این توزیع حدی با استفاده از روش بوت استراپ مشخص می‌گردد و نشان داده می‌شود که استفاده از روش بوت استراپ، تحت شرایط کلی معتبر است. همچنین دیده می‌شود برآوردگرهای حداکثر درستنمایی پارامترهای توزیع نوفه پایدار دارای نرخ همگرایی $n^{\frac{1}{2}}$ بوده و به صورت مجانبی دارای توزیع نرمال هستند و نیز از برآرودگرهای حداکثر درستنمایی پارامترهای چند جمله‌ای اتورگرسیو مستقل می‌باشند.

کلمات کلیدی: مدل‌های اتورگرسیو، برآورد حداکثر درستنمایی، غیر سببی، غیر گوسی، توزیع پایدار، بوت استراپ

فصل ۱

مقدمه

در بسیاری از سری‌های زمانی مشاهده شده، به علت حالت تصادفی فرآیند، به دفعات تغییرات ناگهانی در مشاهدات دیده می‌شود. به طوری‌که این تغییرات ناگهانی در بعضی از مشاهدات دارای مقادیر با قدر مطلق بسیار بزرگ هستند. توزیع‌های پایدار غیر نرمال که عموماً دم سنگین هستند اغلب برای مدل کردن این سری‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرآیندهایی که رفتار پایدار غیر نرمال نشان می‌دهند در زمینه‌هایی چون اقتصاد و سرمایه گذاری (امبریچتز، کلوپلبرگ و میکش [۱۲] ، مک کالچ [۲۳] و میتنیک و راچیف [۲۲])، پردازش سیگنال (نیکیاس و شائو [۲۶]) و مهندسی مخابرات (رزنیک [۲۹]) مشاهده شده‌اند.

مدل اتورگرسیو توصیف کننده فرآیندهای بسیاری در طبیعت، اقتصاد و غیره است. این مدل بیان می‌کند که متغیر خروجی به طور خطی به مقادیر گذشته‌اش وابسته است. همچنین مدل اتورگرسیو با نوفه دم سنگین کاربردهای بسیاری دارد که از جمله آنها می‌توان از برازش زمانهای بین ورودی شبکه (رزنیک [۲۹])، درجه حرارت سطح دریا (گالاگر [۱۵]) و نرخ لگاریتمی بازگشت سهام بورس (لینگ [۲۱]) نام برد.

نظریه توزیع های پایدار در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ توسط پائول لِوی و الکساندر یائولویچ خینچین مطرح شد. براساس این نظریه، توزیع‌های پایدار خواصی را ایجاد می‌کنند که با توزیع‌های متعارف از جمله توزیع‌های گوسی متفاوتند. توزیع‌های گوسی نسبت به میانگین خود متقارن اند، اما توزیع های غیر گوسی پایدار می‌توانند به هر اندازه دلخواه دارای چولگی باشند. چنین توزیع هایی انعطاف پذیری و تغییر پذیری بیشتری نسبت به توزیع های گوسی دارند. بر خلاف توزیع‌های گوسی که به طور کامل به وسیله میانگین و واریانس خود مشخص می‌شوند، توزیع‌های پایدار غیر گوسی به پارامترهای بیشتری برای مشخص شدن نیازمندند.

متغییرهای تصادفی پایدار غیر گوسی دارای واریانس نامتناهی هستند و به علت جِرم موجود در دُم تابع چگالی توزیع‌شان، آنها را توزیع‌های دُم سنگین می‌نامند یعنی:

$$P(|X| > x) \sim Cx^{-\alpha} \qquad x > 0 \qquad , \qquad 0 < \alpha < 2$$

که C یک عدد ثابت است و هرچقدر α کوچکتر باشد، جِرم احتمال در دُم‌ها بیشتر است.

امروزه تعداد زیادی مقاله و کتاب در زمینه توسعه مدل‌هایی برای داده‌های دم سنگین دیده می‌شوند و بعضی از این مقالات در ارتباط با برآورد پارامترهای فرآیندهای خطی هستند که توسط نوفه دم سنگین یا نوفه دارای واریانس نامتناهی تولید می‌شوند.

تاکنون برآوردهای متعددی برای پارامترهای فرآیند اتورگرسیو سببی با نوفه دم سنگین انجام شده است. به عنوان مثال دیویس و رزنیک در سال ۱۹۸۶ [۷] ، ”برآوردگرهای کمترین مربعات“، دیویس و نایت و لیو در سال ۱۹۹۲ [۹] و دیویس در سال ۱۹۹۶ [۸]، ”برآوردگرهای کمترین قدر مطلق انحرافات و برآوردگرهای M، میکش، گادریچ و کلوپلبرگ در سال ۱۹۹۵ [۲۵] ، ”برآوردگرهای وایتل“ و لینگ در سال ۲۰۰۵ [۲۱] ، ”برآوردگرهای کمترین قدر مطلق انحرافات وزنی “ را بررسی کرده‌اند.

هدف از نگارش این پایان‌نامه بررسی برآوردگر حداکثر درستنمایی(ML) پارامترهای مدل سری زمانی اتورگرسیو(AR) سببی و غیر سببی و نیز پارامترهای نوفه پایدار غیر نرمال تولید کننده آن براساس مطالعات انجام شده توسط اندروز، کلدر و دیویس [۳] می‌باشد. همچنین بررسی رفتار مجانبی این برآوردگرها مد نظر است.

بدین منظور ابتدا در فصل دوم به بیان مفاهیم و قضایای اولیه در سری‌های زمانی و نیز ویژگی سری‌های زمانی اتورگرسیو و همچنین به مروری بر روش‌های برآوردیابی مطالعه شده برای پارامترهای سری زمانی اتورگرسیو سببی با نوفه دم سنگین پرداخته می‌شود. در فصل سوم مفاهیم و تعاریف لازم در توزیع‌های پایدار و خواص آنها و نحوه تشخیص داده‌های پایدار و برآورد پارامترهای توزیع پایدار مطرح می‌شود. فصل چهارم به روش بدست آوردن برآورد حداکثر درستنمایی پارامترهای مدل اتورگرسیو و پارامترهای توزیع نوفه پایدار و بررسی رفتار مجانبی این برآوردگرها و فصل پنجم به ارائه روش بوت استراپ برای تقریب توزیع مجانبی برآوردگرهای حداکثر درستنمایی بدست آمده می‌پردازد. و در پایان در فصل ششم شبیه سازی و نتایج عددی ارائه می‌گردد.

فصل ۲

مفاهیم کلی

۱.۲ مقدمه

در این فصل به بیان مفاهیم اولیه و تعاریف و قضایای مورد نیاز جهت آشنایی با سری‌های زمانی و در حالت خاص سری‌های زمانی اتورگرسیو و استفاده از این مفاهیم در فصل‌های پیش رو می‌پردازیم و اثبات قضایا به منابع ذکر شده ارجاع داده شده است.

۲.۲ سری‌های زمانی

فرآیند تصادفی مجموعه ای از متغیرهای تصادفی است و سری زمانی، مشاهداتِ آن است که هرکدام در یک زمان خاص جمع آوری شده اند. در این پایان نامه به جای فرآیند تصادفی از سری زمانی نیز نام برده می‌شود.

ساده ترین مدل برای یک سری زمانی می‌تواند زمانی باشد که متغیرها مستقل و هم توزیع هستند و با نماد $\{X_t\} \sim IID(\mu, \sigma^2)$ نشان داده می‌شود که μ نشان دهنده میانگین و σ^2 نشان دهنده واریانس X_t است. این فرآیند را تصادفی محض یا به عبارت دیگر نوفه مستقل و هم توزیع می‌نامند.

از دیدگاه تحلیلی، در برخورد با یک مجموعه داده این اقدامات به ترتیب انجام می‌گیرد که ابتدا یک مدل ریاضی فرضی یا خانواده‌ای از مدل‌ها برای نمایش داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. سپس این امکان فراهم می‌آید تا پارامترهای این مدل فرضی با استفاده از روش‌های‌برآورد یابی موجود برآورد شوند. بعد از آن به بررسی نیکویی برازش این مدل بر داده‌ها پرداخته می‌شود و از مدل برازش شده جهت بهبود مکانیزم تولید این سری زمانی استفاده می‌گردد. زمانی که مدل قانع کننده‌ای بدست آمد، این مدل میتواند در زمینه‌های متعددی، وابسته به نوع کاربرد آن زمینه، مورد استفاده قرارگیرد. کاربردهایی چون جدا سازی نویز از سیگنال‌ها، پیش بینی مقادیر آینده سری و کنترل مقادیر آینده.

تعریف ۱.۲.۲ یک فرآیند تصادفی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_t, t \in T\}$ است که روی یک فضای احتمال (Ω, F, P) تعریف می‌شوند. در واقع به ازای هر $t \in T$ ، $X_t(.)$ تابعی روی مجموعه Ω و به ازای هر ثابت $\omega \in \Omega$،

$X_{.}(\omega)$ تابعی روی T است.

تعریف ۲.۲.۲ فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرآیند تصادفی با $EX_t^2 < \infty$ باشد. تابع میانگین $\{X_t\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_X(t) = E(X_t).$$

تابع اتوکواریانس $\{X_t\}$نیز برای اعداد صحیح دلخواه $r, s \in T$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma_X(r,s) = cov(X_r, X_s) = E\left[(X_r - \mu_X(r))\,(X_s - \mu_X(s))\right].$$

تعریف ۳.۲.۲ فرآیند تصادفی $\{X_t, t = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ ایستای ضعیف (یا ایستا) نامیده می‌شود اگر $\mu_X(t)$ مقداری ثابت و به ازای هر h، $\gamma_X(t, t+h)$ مستقل از t باشد.

تعریف ۴.۲.۲ فرآیند تصادفی $\{X_t, t = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$ اکیداً ایستا نامیده می‌شود اگر به ازای هر h صحیح و به ازای هر $n > 0$، بردارهای $(X_1, \cdots, X_n)$ و $(X_{1+h}, \cdots, X_{n+h})$ دارای توزیع توام یکسان باشند.

ملاحظه ۵.۲.۲ اگر $\{X_t\}$ یک فرآیند ایستا باشد، آنگاه برای هر $r, s \in T$، $\gamma_X(r,s) = \gamma_X(r-s, 0)$. بنابراین در فرآیندهای ایستا مناسب‌تر است تابع خودکواریانس با یک متغیر به صورت زیر تعریف شود

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(h, 0) = cov(X_{t+h}, X_t) \;\;,\;\; t, h \in T$$

تعریف ۶.۲.۲ تابع خود همبستگی فرآیند ایستای $\{X_t\}$ با تأخیر h، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = corr(X_{t+h}, X_t) \;\;,\;\; t, h \in T\;,$$

بنابراین $\rho_X(0) = 1$ و $|\rho_X(h)| \leq 1$.

تعریف ۷.۲.۲ تابع خود همبستگی جزئی تابع خود همبستگی فرآیند ایستای $\{X_t\}$ را با $\alpha(\cdot)$ نشان داده و برای تأخیر h به صورت $\alpha(h) = \phi_{hh}$ تعریف می‌کنیم که $\alpha(0) = 1$ و ϕ_{hh} آخرین مؤلفه از بردار ϕ_{hh} است که در رابطه

$$\phi(h) = \Gamma_h^{-1}\gamma(h)$$

صدق می‌کند و

$$\gamma(h) = [\gamma(n)] \;\;,\;\; \Gamma_h = [\gamma(i-j)] \;\;,\;\; \phi(h) = [\phi h_i] \;\;;\;\; i, j, n = 1, 2, \cdots, h\;.$$

تعریف ۸.۲.۲ دنباله $\{Z_t, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots\}$، نوفه سفید با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ نامیده می‌شود اگر $\{Z_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ناهمبسته هرکدام با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ باشد و با $\{Z_t\} \sim WN\left(۰, \sigma^۲\right)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۹.۲.۲ دنباله $\{Z_t, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots\}$، نوفه پایدار نامیده می‌شود اگر $\{Z_t, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای مستقل و هم توزیع از توزیع پایدار باشد.

تعریف ۱۰.۲.۲ فرآیند $\{X_t, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots\}$ را فرآیند میانگین متحرک مرتبه q یا $MA\left(q\right)$ می‌نامند اگر $\{X_t\}$ یک فرآیند ایستا باشد و به ازای هر t

$$X_t = Z_t + \theta_۱ Z_{t-۱} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \ ,$$

که $\{Z_t\} \sim WN\left(۰, \sigma^۲\right)$ و $\theta_۱, \theta_۲ \cdots, \theta_q$ مقادیر ثابتی هستند.

تعریف ۱۱.۲.۲ فرآیند $\{X_t, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots\}$ را فرآیند اتورگرسیو مرتبه p یا $AR\left(p\right)$ می‌نامند اگر $\{X_t\}$ یک فرآیند ایستا باشد و به ازای هر t

$$X_t = \phi_۱ X_{t-۱} + \phi_۲ X_{t-۲} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \ ,$$

که $\{Z_t\} \sim WN\left(۰, \sigma^۲\right)$ و $\phi_۱, \phi_۲, \cdots, \phi_p$ مقادیر ثابتی هستند.

تعریف ۱۲.۲.۲ فرآیند $\{X_t, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots\}$ یک فرآیند خطی است اگر برای هر عدد صحیح t داشته باشیم

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \ ,$$

که $\{Z_t\} \sim WN\left(۰, \sigma^۲\right)$ و $\{\psi_j\}$ دنباله ای از اعداد ثابت است به طوریکه $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

تعریف ۱۳.۲.۲ فرآیند $\{X_t, t = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots\}$ یک فرآیند $ARMA\left(p, q\right)$ است اگر ایستا بوده و برای هر t داشته باشیم

$$X_t - \phi_۱ X_{t-۱} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_۱ Z_{t-۱} + \cdots + \theta_q Z_{t-q} \ ,$$

که $\{Z_t\} \sim WN\left(۰, \sigma^۲\right)$ و چند جمله‌ای های $\left(۱ - \phi_۱ z - \cdots \phi_p z^p\right)$ و $\left(۱ + \theta_۱ + \cdots + \theta_q z^q\right)$ هیچ ریشه مشترکی نداشته باشند.

معادلات تعریف قبل را می‌توان به فرم خلاصه به صورت معادلات تفاضلی $\phi\left(B\right)X_t=\theta\left(B\right)Z_t$ نوشت که $\phi\left(.\right)$ و $\theta\left(.\right)$ چند جمله‌ایی به صورت زیر هستند

$$\theta\left(z\right)=1+\theta_1 z+\cdots+\theta_q z^q \quad , \quad \phi\left(z\right)=1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p$$

و B نماد عملگر پسرو می‌باشد به طوریکه $\left(B^k X_t=X_{t-k} \quad , \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$. فرآیند $\{X_t\}$ یک فرآیند $AR\left(p\right)$ است اگر $\theta\left(z\right)\equiv1$ و یک فرآیند $MA\left(q\right)$ است اگر $\phi\left(z\right)\equiv1$.

۳.۲ فرآیندهای اتورگرسیو

با توجه به بخش قبل فرض کنید $\{X_t,t=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ یک فرآیند اتورگرسیو باشد که در معادلات تفضلی

$$\phi_0\left(B\right)X_t=Z_t \tag{۱.۲}$$

صدق می‌کند و $\{Z_t\}$ دنباله از متغیرهای مستقل و هم توزیع است. چند جمله‌ای $\phi_0\left(z\right)=1-\phi_{01}z-\cdots-\phi_{0p}z$ چند جمله‌ای اتورگرسیو نام دارد و فرض کنیم $\phi_0\left(z\right)$ روی دایره واحد ریشه نداشته باشد $\left(\phi_0\left(z\right)\neq0 \quad , \quad |z|=1\right)$ ، آنگاه بسط لورنت $\frac{1}{\phi_0(z)}$ به ازای هر $z\in\left\{z:\ a^{-1}<|z|<a\ ,a>1\right\}$، وجود دارد و به صورت

$$\frac{1}{\phi_0\left(z\right)}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j z^j$$

نوشته می‌شود. بنابراین یک جواب اکیدا ایستا برای معادلات تفاضلی (۱.۲) به صورت

$$X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j Z_{t-j}$$

می‌باشد.(براکول و دیویس [۵] ، فصل سوم)

تعریف ۱.۳.۲ فرآیند اتورگرسیو $\{X_t\}$ سببی نامیده می‌شود اگر چند جمله‌ای اتورگرسیو داخل و روی دایره واحد ریشه‌ای نداشته باشد. یعنی برای $|z|\leq1$ ، $\phi_0\left(z\right)\neq0$. در این صورت به ازای هر $j<0$، داریم $\psi_j=0$ و در نتیجه

$$X_t=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j Z_{t-j}\ ,$$

که تنها تابعی از گذشته و حال دنباله $\{Z_t\}$ است.

تعریف ۲.۳.۲ فرآیند اتورگرسیو $\{X_t\}$ اکیداً غیر سببی نامیده می‌شود اگر چند جمله‌ای اتورگرسیو بیرون و روی دایره واحد ریشه نداشته باشد. یعنی برای $|z| \geq ۱$، $\phi_۰(z) \neq ۰$ و داریم

$$X_t = \sum_{j=۰}^{\infty} \psi_{-j} Z_{t+j} \ .$$

با توجه به بسط لورنت، در این حالت ضرایب $\{\psi_j\}$ در رابطه زیر

$$(۱ - \phi_{۰۱} z - \cdots - \phi_{۰p} z^p) \left(\psi_۰ + \psi_{-۱} z^{-۱} + \cdots\right) = ۱ \,, \qquad (۲.۲)$$

صدق می‌کنند که اگر $\phi_{۰p} \neq ۰$، آنگاه ضرایب $\psi_۰ = \psi_{-۱} = \cdots = \psi_{۱-p} = ۰$ و $\psi_{-p} = \phi_{۰p}$.

اگر چند جمله اتورگرسیو غیر سببی باشد، یعنی دارای تعدادی ریشه داخل و تعدادی ریشه خارج دایره واحد باشد (و نیز روی دایره واحد ریشه نداشته باشد)، آنگاه چند جمله‌ای اتورگرسیو را می‌توان به صورت حاصلضرب دو چند جمله‌ای سببی و اکیدا غیر سببی به صورت زیر نوشت

$$\phi_۰(z) = (۱ - \theta_{۰۱} z - \cdots - \theta_{۰r} z^r) \left(۱ + \theta_{۰,r+۱} z + \cdots \theta_{۰,r+s} z^{r+s}\right) \qquad (۳.۲)$$

که $r+s = p$، $\theta_۰^{\dagger}(z) = ۱ - \theta_{۰۱} z - \cdots - \theta_{۰r} z^r \neq ۰$ برای $|z| \leq ۱$ و $\theta_۰^*(z) = ۱ + \theta_{۰,r+۱} z + \cdots + \theta_{۰,r+s} z^{r+s} \neq ۰$ برای $|z| \geq ۱$. بنابراین چند جمله‌ای $\phi_۰(z)$ به صورت حاصلضرب دو چند جمله‌ای سببی و اکیدا غیر سببی $\theta_۰^{\dagger}$ و $\theta_۰^*$ نوشته می‌شود.

۴.۲ مروری بر روش‌های برآورد پارامترهای فرآیند $AR(p)$ سببی با نوفه دُم سنگین

تا کنون برآوردگرهای متعددی برای پارامترهای فرآیند اتورگرسیو سببی با نوفه دم سنگین معرفی شده است. شاید بتوان گفت اولین برآوردگر برای پارامترهای فرآیند $AR(p)$ سببی، برآوردگر یول-واکر (YW) است و بصورت جواب معادلات معروف به یول-واکر

$$\hat{\mathbf{R}} \hat{\boldsymbol{\phi}}_{YW} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

تعریف می‌شود که $\hat{\mathbf{R}} = [\hat{\rho}(i-j)]_{i,j=۱}^{p}$، $\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\hat{\rho}(۱), \cdots, \hat{\rho}(p))'$ و $\hat{\rho}(h) = \frac{C(h)}{C(۰)}$ ، به‌طوریکه

$$C(h) = n^{-۱} \sum_{j=۱}^{n-h} (X_{j+h} - \bar{X})(X_j - \bar{X}) \ .$$

هنان و کنتر [۱۸] در سال ۱۹۷۷ نشان دادند برای $0 < \alpha < 2$ و به ازای هر $\delta > \alpha$، وقتی $n \to \infty$

$$n^{1/\delta}(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{YW} - \boldsymbol{\phi}_0) \to 0 \quad a.s$$

همچنین دیویس و رزنیک [۷] در سال ۱۹۸۶ نشان دادند

$$\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/\alpha} (\hat{\boldsymbol{\phi}}_{YW} - \boldsymbol{\phi}_0) \overset{d}{\Rightarrow} \mathbf{DY} \ ,$$

که $\mathbf{D}$ یک ماتریس $p \times p$ و $\mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_p)'$ به‌طوریکه

$$Y_n = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\rho(h+j) + \rho(h-j) - 2\rho(j)\rho(h)\right) S_j / S_0 \quad , \quad h = 1, \cdots, p$$

که در آن $S_1, S_2, \cdots$ یک دنباله از متغیرهای مستقل و هم توزیع از توزیع α-پایدار متقارن هستند که از متغیر S_0 با توزیع $\frac{\alpha}{2}$-پایدار مستقل‌اند. از آنجایی که نرخ همگرایی برآوردگر یول-واکر زمانی که نوفه دارای توزیعی با واریانس متناهی است، برابر با $n^{1/2}$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم نرخ همگرایی این برآوردگر در حالت نوفه با واریانس نامتناهی سریع‌تر است از حالتی که نوفه دارای واریانس متناهی است.

بعد از برآوردگرهای یول-واکر، برآوردگرهای کمترین مربعات (LS) که به صورت مینیمم کننده

$$\sum_{t=p+1}^{n} (X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p})^2 \ ,$$

نسبت به $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_p)'$ تعریف می‌شوند، توسط محققین مختلفی از جمله هنان و کنتر [۱۸] مورد مطالعه قرار گرفتند. آنها در سال ۱۹۷۷ نشان دادند اگر $0 < \alpha < 2$ و $\delta > \alpha$، آنگاه

$$n^{1/\delta}(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\mathrm{LS}} - \boldsymbol{\phi}_0) \to 0 \quad a.s$$

و نیز دیویس و رزنیک [۷] در سال ۱۹۸۶ نشان دادند یک تابع به کندی تغییر پذیر مانند $L_0(n)$ وجود دارد به گونه‌ای که وقتی $n \to \infty$،

$$n^{1/\alpha} L_0(n)(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\mathrm{LS}} - \boldsymbol{\phi}_0) \overset{d}{\Rightarrow} \mathbf{Y} \ ,$$

که $\mathbf{Y}$ از تقسیم دو متغیر تصادفی پایدار تشکیل می‌شود.

برآوردگر دیگر پارامترهای مدل $AR(p)$ برآوردگر کمترین قدر مطلق انحرافات (LAD) است که به صورت مینیمم کننده

$$\sum_{t=p+1}^{n} |X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}| \ ,$$

نسبت به $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_p)'$ تعریف می‌شود. گراس و استیجر [۱۷] در سال ۱۹۷۹ سازگاری قوی برآوردگرهای LAD را تحت این فرض که Z_1 دارای یک میانه یکتا در صفر باشد و $E\,|Z_1| < \infty$ ثابت کردند. آن و شن [۲] در سال ۱۹۸۲ توانستند نرخ همگرایی برای برآوردگر $\hat{\phi}_{\text{LAD}}$ ارائه کنند با این شرط که یا Z_1 دارای یک میانه یکتا در صفر باشد و به دامنه جذب یک توزیع پایدار با شاخص پایداری $\alpha \in (1,2)$ تعلق داشته باشد، یا Z_1 دارای توزیع کوشی مرکزی شده در صفر باشد. در حالت خاص آنها نشان دادند برای $\delta > \alpha$ وقتی $n \to \infty$،

$$n^{1/\delta}(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{LAD}} - \boldsymbol{\phi}_0) \xrightarrow{P} 0 \,.$$

اگرچه شن و آن باور داشتند که نرخ همگرایی برای $\alpha \in (0,1)$ نیز مشابه حالت قبل ($(\alpha \in (1,2)$) است، اما نتوانستند این نتیجه را با روش قبل ثابت کنند. برآکول و دیویس [۵] در سال ۱۹۹۱ نشان دادند اگر توزیع نوفه پایدار یا شبیه به توزیع پارتو باشد، آنگاه تابع $L_0(n)$ برای برآوردگر LS برابر است با $(\ln n)^{-1/\alpha}$ و بنابراین نرخ همگرایی برآوردگر LS برابر $(\frac{n}{\ln n})^{\frac{1}{\alpha}}$ می‌شود. همچنین دیویس [۸] در سال ۱۹۹۶ نشان داد

$$(Cn)^{1/\alpha}(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{LAD}} - \boldsymbol{\phi}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{\tau} \,,$$

که C یک مقدار ثابت و $\boldsymbol{\tau}$ یک بردار تصادفی است و از آنجایی که

$$\frac{n^{1/\alpha} L_0(n)}{Cn^{1/\alpha}} \to 0$$

آنگاه

$$\frac{\left\|\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{LAD}} - \boldsymbol{\phi}_0\right\|}{\left\|\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{LS}} - \boldsymbol{\phi}_0\right\|} \xrightarrow{P} 0 \,.$$

در نتیجه زمانی که نوفه دارای توزیع پایدار یا شبیه به پارتو است، $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{LAD}}$ به صورت مجانبی نسبت به $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{LS}}$ زودتر همگرا می‌شود.

دیویس، نایت و لیو [۹] در سال ۱۹۹۲ برآوردگر M پارامترهای فرآیند $AR(p)$ را به صورت مینیمم‌کننده تابع هدف

$$U_n(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{t=p+1}^{n} \rho(X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p}) \,,$$

نسبت به $\boldsymbol{\phi}$ تعریف کردند که $\rho(\cdot)$ نشان دهنده تابع زیان است. همچنین آنها همگرایی ضعیف $\hat{\phi}_{\text{M}}$ برای زمانی که ρ محدب باشد و مشتق آن در شرایط مشتق‌گیری لیپشیتز (تعریف شده در قضیه ۱.۵.۲) صدق کند را اثبات کردند. آنها نشان دادند وقتی $n \to \infty$،

$$n^{1/\alpha} L_1(n)(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{\text{M}} - \boldsymbol{\phi}_0) \xrightarrow{d} \boldsymbol{\xi} \,,$$

که ξ مینیمم کننده یکتای یک فرآیند تصادفی و $L_1(n)$ یک تابع به کندی تغییر پذیر است.
فیجین و رزنیک [۱۳] در سال‌های ۱۹۹۲ و ۱۹۹۴ برآورد پارامترهای فرآیند $AR(p)$ زمانی که نوفه دارای توزیع دم سنگین با مقادیر مثبت است را مورد مطالعه قرار دادند و نرخ همگرایی برآوردگر خود را که از روش برنامه ریزی خطی بدست می‌آمد، $n^{1/\alpha}L(n)$ بدست آوردند که $L(n)$ یک تابع به کندی تغییر پذیر است.
هسینگ [۱۹] در سال ۱۹۹۳ برآوردگر پارمترهای فرآیند $AR(p)$ را براساس مقادیر بحرانی تعریف کرد و نرخ همگرایی این برآوردگر را $(\frac{n}{\ln n})^{1/\alpha}$ بدست آورد.
میکش، گادریچ ،کلوپلبرگ و آدلر [۲۵] در سال ۱۹۹۵ توانستند روش برآورد بر اساس دوره نگار نمونه‌ای ارائه دهند. این روش، بر اساس روش وایتل در سال ۱۹۵۳ استوار است، با این تفاوت که در برآوردگرهای وایتل از نوفه گوسی استفاده می‌شود. برآوردگرهای وایتل در حالت نوفه گوسی، توسط برآکوِل و دیویس [۵] در سال ۱۹۹۱ به دقت مورد مطالعه قرار گرفتند و نشان داده شد که این برآورگرها به طور مجانبی معادل برآوردگرهای حداکثر درستنمایی هستند. میکش، گادریچ و کلوپلبرگ دریافتند که در حالت نوفه پایدار، برای دستیابی به برآودگر حداکثر درستنمایی با مشکلات زیادی رو به رو هستند. مشکل اصلی، فرم نافرمان تابع چگالی توزیع پایدار بود. از آنجا که تنها راه رسیدن به برآورد حداکثر درستنمایی، استفاده از روش‌های عددی است و نیز همه الگوریتم‌های عددی موجود، برای محاسبه چگالی‌های پایدار به سرعت همگرا نیستند، روش برآورد حداکثر درستنمایی را روشی نامعمول و سخت دانستند. این در حالی بود که برآوردگر وایتل را در حالت نوفه پایدار نسبت به حالت نوفه گوسی دارای سختی‌های عددی بیشتری ندیدند. آنها نشان دادند که برآوردگر وایتل پارامترهای مدل $ARMA$ سببی (در حالت خاص مدل AR) با نوفه پایدار ، با نرخ $(\frac{n}{\ln n})^{\frac{1}{\alpha}}$ در توزیع همگرا می‌شود.
برآوردگر کمترین قدر مطلق انحرافات وزنی پارامترهای فرآیند $AR(p)$ سببی در سال ۲۰۰۵ توسط لینگ [۲۱] مورد بررسی قرار گرفت. این برآوردگر دارای نرخ همگرایی $n^{1/2}$ است، در حالی که برآوردگر کمترین قدر مطلق انحرافات غیر وزنی دارای نرخ همگرایی سریع‌تر $n^{1/\alpha}$ می‌باشد.
در ادامه در بخش ۵.۲ برآوردگرهای M که دارای ویژگی‌های مشابهی با برآوردگر حداکثر درستنمایی مطالعه شده در این پایان نامه هستند، معرفی می‌شوند.

۵.۲ برآوردگرهای M پارامترهای مدل $AR(p)$ با نوفه پایدار

در آمار، برآوردگرهای M کلاس بزرگی از برآوردگرها را تشکیل می‌دهند که در آن برآورد از طریق مینیمم کردن جمع توابعی خاص وابسته به پارامتر و داده‌ها بدست می‌آید. برآوردگرهای M پارامترهای مدل $AR(p)$ سببی با نوفه پایدار، با جزئیات بیشتر در سال ۱۹۹۲ توسط دیویس، نایت و لیو [۹] مورد بررسی قرار گرفتند.

فرض کنیم $\{X_t\}$ یک فرآیند اتورگرسیو باشد که در معادلات بازگشتی

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots \phi_p X_{t-p} = Z_t \tag{۴.۲}$$