بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی بابل
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

عنوان:

k-ایده‌آلهای فازی در نیم‌حلقه‌های سه‌تایی

استاد راهنما:

دکتر بهرام محمدزاده

استاد مشاور:

دکتر مهران مطیعی

نگارش :

لیلا خلیلی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیر و تشکر:

شکر و سپاس خدایی را که به انسان نعمت تفکر و قدرت اندیشه عطا کرد تا بر اساس آن از فقر تا رفاه و از جهل تا کمال دانش و معنویت گام بردارد.

تشکر می‌کنم از پدر و مادر عزیزم که بی‌شک نمی‌توانم جوابگوی لطف و محبت بی‌دریغ آنها باشم.

همچنین لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر بهرام محمدزاده تشکر و قدردانی نمایم که با صداقت، خلوص نیت و اشراف بر مطالب چراغ راهم شدند تا بتوانم این تحقیق را به پایان برسانم.

از استاد مشاور محترم، جناب آقای دکتر مهران مطیعی که با راهنمایی‌های تاثیرگذارشان مرا درپیش برد این رساله یاری نموده‌اند، سپاسگزارم.

از داوران گرامی که زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

همچنین از استاد عزیزم، زنده یاد جناب آقای دکتر حسین هدایتی کمال تشکر را دارم و از خداوند متعال برایشان طلب مغفرت دارم.

در پایان نیز از همه عزیزانی که به هر نحو در این امر مرا یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر می‌نمایم.

تقدیم به:

پدر و مادر

عزیزم

چکیده

هدف از این رساله مطالعه ساختار k–ایده‌آلهای فازی در نیم‌حلقه‌های سه‌تایی و تعمیم آنهاست. به این منظور ابتدا به مفهوم نیم‌حلقه‌های سه‌تایی و ایده‌آلهای آن پرداخته و زیرساختارهای فازی آن را معرفی می‌کنیم. تعریف و مطالعه نیم‌حلقه‌های سه‌تایی L–فازی و ایده‌آلهای آنها و k–ایده‌آلهای فازی در فصل دوم و سوم صورت می‌گیرد و قضایای مهمی را در این فصول ثابت می‌کنیم. در نهایت مفهوم k–ایده‌آلهای فازی (α, β)–شهودی و k–ایده‌آلهای فازی $(\in, \in \vee q)$–شهودی را در فصل چهارم تعریف کرده و ساختار جدیدی از یک نیم‌حلقه سه‌تایی را مطرح می‌کنیم.

کلمات کلیدی: نیم‌حلقه سه‌تایی، k–ایده‌آل فازی، نیم‌حلقه سه‌تایی L–فازی، k–ایده‌آل فازی (α, β)–شهودی، k–ایده‌آل فازی $(\in, \in \vee q)$–شهودی

پیشگفتار

نظریه سیستم‌های جبرسه‌تایی در سال ۱۹۳۲ توسط لهمر[۱] [۳۰] مطرح گردید. او برخی سیستم‌های سه‌تایی جبری را که سه‌تایی نامیده می‌شوند را مورد مطالعه و بررسی قرار داد. در سال ۱۹۷۱، لیستر[۲] [۳۱] نیم‌گروه‌های جمعی از حلقه‌ها، که تحت ضرب سه‌تایی حلقه‌ها بسته‌اند، را معرفی کرده است و این سیستم جبری را حلقه سه‌تایی نامید.

داتا[۳] و کار[۴] [۱۵] نظریه‌ای از نیم‌حلقه‌های سه‌تایی را معرفی کردند که برگرفته از حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌های سه‌تایی بوده است و برخی خواص از نیم‌حلقه‌های سه‌تایی را مورد مطالعه قرار دادند ([۱۵]، [۱٦]، [۱۷]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۱]، [۲٦]).

در سال ۱۹٦۵، استاد ایرانی‌تبار دانشگاه برکلی، لطفی عسگرزاده نظریه مجموعه‌های فازی را ارائه نمود. بسیاری از مقالات در مورد مجموعه‌های فازی، اهمیت و کاربرد این نظریه را در منطق، نظریه مجموعه، نظریه گروه، نظریه حلقه، آنالیز حقیقی، توپولوژی، نظریه اندازه و غیره نشان می‌دهند.

در سال ۱۹۸۸، ژانگ[۵] [۳٦]، ایده‌آلهای L-فازی اول و ایده‌آلهای L-فازی اولیه در حلقه‌ها را مورد بررسی قرار داده است، جایی که L، یک مشبکه توزیعی کامل است. مفاهیم ایده‌آلهای L-فازی در نیم‌حلقه‌ها توسط جان[٦]، نگرس[۷] و کیم[۸] در [۲۳] و [۲۴] و [۳۲] و [۳۳] مورد مطالعه قرار گرفته است.

[۱] Lehmer

[۲] Lister

[۳] Datta

[۴] Kar

[۵] Zhang

[٦] Jun

[۷] Neggers

[۸] Kim

اخیراً کاویل کومار[۹]، خمیس[۱۰] و جان، ایده‌آلهای فازی، ابرایده‌آلهای فازی و شبه ایده‌آلهای فازی در نیم‌حلقه‌های سه‌تایی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند [۲۷] و [۲۸]. همچنین با توجه به اهمیت نظریه گروه در ریاضیات در بسیاری از برنامه‌های کاربردی، مفهوم گروه فازی و ساختار آن مورد بررسی قرار گرفت که توسط روزنفلد[۱۱] مطرح شده است [۳۴]. نوع جدیدی از زیرگروه فازی، زیرگروه $(\in, \in \vee q)$–فازی است که در مقاله‌ای از بهاکت[۱۲] و داس[۱۳] [۸] معرفی شده است. در حقیقت زیرگروه $(\in, \in \vee q)$–فازی تعمیم مهمی از زیرگروه فازی روزنفلد است. این مفهوم در [۹] مورد مطالعه قرار گرفت. عبدالله و همکاران [۱] نظریه ایده‌آلهای فازی (α, β)–شهودی از نیم‌حلقه‌ها را معرفی کردند، جاییکه $\alpha, \beta \in \{\in, q, \in \vee q, \in \wedge q\}$ با شرط $\alpha \neq \in \wedge q$ و خواص مربوط به آن را مورد بررسی قرار دادند. در این رساله با استفاده از رابطه $(\in)$ و شبه ارتباط با رابطه (q) بین نقاط فازی شهودی و مجموعه‌های فازی شهودی، نظریه k–ایده‌آلهای فازی (α, β)–شهودی را معرفی می‌کنیم که در فصل چهارم گردآوری شده است.

---

[۹] Kavilkumar

[۱۰] Khamis

[۱۱] Rosenfeld

[۱۲] Bhakat

[۱۳] Das

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

مقدمه:

در این فصل ابتدا مفاهیمی همچون نیم‌حلقه و زیرنیم‌حلقه سه‌تایی و ایده‌آل را تعریف کرده و با ارائه چند مثال به تبیین این مفاهیم خواهیم پرداخت و همریختی روی نیم‌حلقه‌های سه‌تایی را تعریف می‌کنیم. در بخش بعد به مفهوم k–ایده‌آل در نیم‌حلقه سه‌تایی پرداخته و تعاریفی از زیرمجموعه فازی، تابع مشخصه و مجموعه تراز می‌آوریم.

۱.۱ نیم‌حلقه‌های سه‌تایی و زیرساختارهای آن

تعریف ۱.۱.۱ : یک زیرمجموعه غیرتهی مانند S همراه با دو عمل دوتایی شرکت‌پذیر که جمع و ضرب نامیده می‌شوند(به ترتیب با + و $\cdot$ نمایش داده می‌شوند) را یک نیم‌حلقه گوییم، اگر $(S,+)$ یک نیم‌گروه جابه‌جایی‌پذیر و $(S,\cdot)$ یک نیم گروه و همچنین عمل ضرب روی جمع از هر دو طرف راست و چپ توزیع‌پذیر باشد. یعنی به ازای همه $a,b,c \in S$ داشته باشیم:

$$a(b+c) = ab + ac \qquad , (a+b)c = ac + bc.$$

تعریف ۲.۱.۱ : یک مجموعه غیرتهی مانند S همراه با یک عمل دوتایی و یک عمل سه‌تایی که به ترتیب جمع و ضرب سه‌تایی نامیده می‌شوند را نیم حلقه سه تایی گوییم، اگر $(S,+)$ یک نیم‌گروه شرکت‌پذیر باشد که در شرایط زیر صدق کند:

به ازای همه $a,b,c,d,e \in S$

(الف) $(abc)de = a(bcd)e = ab(cde)$،

(ب) $(a+b)cd = acd + bcd$،

(ج) $a(b+c)d = abd + acd$،

(د) $ab(c+d) = abc + abd$.

به آسانی می‌توان دید که هر نیم‌حلقه می‌تواند یک نیم‌حلقه سه‌تایی باشد، اما طبق مثال زیر یک نیم‌حلقه سه تایی لزوماً نمی‌تواند یک نیم‌حلقه باشد.

مثال ۳.۱.۱ : $Z_{\circ}^{-}$ را که مجموعه همه اعداد صحیح غیرمثبت تحت جمع معمولی و ضرب سه‌تایی است در نظر می‌گیریم. می‌بینیم که $Z_{\circ}^{-}$ یک نیم‌گروه جمعی است که تحت ضرب سه‌تایی بسته است، اما تحت ضرب دوتایی بسته نیست. بنابراین $Z_{\circ}^{-}$ یک نیم‌حلقه سه‌تایی است، اما یک نیم‌حلقه تحت جمع و ضرب معمولی نیست.

تعریف ۴.۱.۱ : فرض کنید S یک نیم حلقه سه‌تایی باشد. اگر عضوی مانند $\circ \in S$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم:

$$xy\circ = x\circ y = \circ xy = \circ, \qquad x + \circ = x = \circ + x.$$

در این صورت $\circ$ را عنصر صفر یا به طور خلاصه صفر از نیم‌حلقه سه‌تایی S می‌گوییم و در این صورت می‌گوییم S یک نیم‌حلقه سه‌تایی با صفر است.

تعریف ۵.۱.۱ : زیر نیم‌گروه جمعی T از S را یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از S می نامیم، اگر به ازای همه $t_1, t_2, t_3 \in T$ داشته باشیم:

$$t_1t_2t_3 \in T$$

تعریف ۶.۱.۱ : زیرنیم‌گروه جمعی I از S را یک ایده‌آل چپ (به ترتیب: راست، افقی [1]) از S می گوییم، اگر به ازای هر $s_1, s_2 \in S$ و $i \in I$ داشته باشیم: $s_1s_2i \in I$ [به ترتیب: $is_1s_2 \in I$ و $s_1is_2 \in I$].
اگر I یک ایده‌آل چپ و راست و افقی از S باشد، سپس I را یک ایده‌آل از S می‌نامیم.

[1] Lateral

تعریف ۷.۱.۱ : فرض کنید S و R نیم‌حلقه‌های سه‌تایی باشند. نگاشتی مانند $\varphi : S \to R$ یک همریختی نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $x, y, z \in S$ داشته باشیم:

$$\varphi(xyz) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z), \qquad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

نتیجه ۸.۱.۱ : اگر $\varphi : S \to R$ یک همریختی پوشا از نیم‌حلقه‌های سه‌تایی باشد و I ایده‌آلی از S باشد، آنگاه $\varphi(I)$ یک ایده‌آل از R می باشد و اگر S و R نیم‌حلقه‌های سه‌تایی با صفر باشند، آنگاه $\varphi(0) = 0$.

۲.۱ k–ایده‌آل در نیم‌حلقه سه‌تایی

تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنید S یک مجموعه غیرتهی باشد. آنگاه نگاشتی مانند $\mu : S \to [0, 1]$ را یک زیرمجموعه فازی از S می نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ : فرض کنید A یک زیرمجموعه غیرتهی باشد. تابع مشخصه χ_A که A یک زیرمجموعه فازی از S است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر}\ x \in A, \\ 0 & \text{اگر}\ x \notin A. \end{cases}$$

تعریف ۳.۲.۱ : فرض کنید μ یک زیرمجموعه فازی از یک زیرمجموعه غیرتهی S باشد. برای $t \in [0, 1]$ مجموعه $\mu_t = \{x \in S \mid \mu(x) \geq t\}$ یک زیرمجموعه تراز از S نسبت به μ نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱ : ایده‌آل I از نیم‌حلقه سه‌تایی S را یک $k-$ایده‌آل می نامیم، اگر به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم:

$$x + y, y \in I \Rightarrow x \in I.$$

مثال ۵.۲.۱ : نیم‌حلقه $Z_\circ^-$ تحت جمع معمولی و ضرب سه‌تایی را در نظر بگیرید. فرض کنید $I = \{\circ, -۳\} \cup \{-۵, -۶, -۷, \cdots\}$. به آسانی می‌توان ثابت کرد I یک ایده‌آل از $Z_\circ^-$ است اما یک $k-$ ایده‌آل از $Z_\circ^-$ نیست. زیرا:

$(-۳) + (-۲) \in I$ و -۳ اما $-۲ \notin I$.

مثال ۶.۲.۱ : نیم‌حلقه سه‌تایی $Z_\circ^-$ تحت جمع معمولی و ضرب سه‌تایی را در نظر بگیرید. فرض کنید $I = \{-۳k \mid k \in N \cup \{\circ\}\}$. به آسانی می‌توان نشان داد که I یک $k-$ایده‌آل از $Z_\circ^-$ است.

تعریف ۷.۲.۱ : برای هر ایده‌آل I از نیم‌حلقه سه‌تایی S ، $k-$بستار $\overline{I}$ از I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{I} = \{x \in S \mid a + x = b \quad a, b \in I \text{ برای برخی}\}$$

قضیه ۸.۲.۱ : فرض کنید I یک ایده‌آل از نیم‌حلقه سه‌تایی با صفر S است. آنگاه I یک $k-$ایده‌آل از S است، اگر و تنها اگر $I = \overline{I}$.

اثبات: بدیهی است. □

فصل ۲

زیرنیم‌حلقه‌های سه‌تایی $L-$فازی و ایده‌آلهای $L-$فازی در نیم‌حلقه‌های سه‌تایی

مقدمه

در ابتدای این فصل به تعریف زیرمجموعه L–فازی و زیرنیم حلقه سه‌تایی L–فازی پرداخته و ایده‌آل L–فازی از نیم‌حلقه سه‌تایی را تعریف می‌کنیم و به بررسی و اثبات قضایای مهمی می‌پردازیم. در بخش بعد تعریفی از زیرنیم‌حلقه سه‌تایی مشخصه آورده و زیرنیم‌حلقه سه‌تایی مشخصه L–فازی معرفی می کنیم. همچنین می‌توان تعریف مشابهی برای ایده‌آلهای مشخص L–فازی ارائه دهیم و سپس به اثبات چند قضیه می‌پردازیم.

در بخش آخر، زیرمجموعه L– فازی نرمال را از نیم‌حلقه سه‌تایی معرفی می‌کنیم و به دنبال آن گزاره‌ای می‌آوریم که نتیجه مستقیم از این تعریف می‌باشد و این بخش را با ارائه قضیه‌ای به پایان می‌رسانیم.

۱.۲ زیرمجموعه L–فازی و زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L–فازی

تعریف ۱.۱.۲ : مجموعه جزئاً مرتب $(L, \leq)$ را با اعمال دوتایی $\wedge$ و $\vee$ مشبکه یا لاتیس می نامیم، هرگاه به ازای $a, b, c \in L$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$۱)\quad \begin{cases} a \wedge b = b \wedge a \\ a \vee b = b \vee a \end{cases}$$

$$۲)\quad \begin{cases} a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \\ a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \end{cases}$$

$$۳)\quad \begin{cases} a \wedge a = a \\ b \vee b = b \end{cases}$$

$$۴)\quad \begin{cases} a \wedge (a \vee b) = a \\ a \vee (a \wedge b) = a \end{cases}$$

مثال ۲.۱.۲ : $([۰, ۱], \leq, \min, \max)$ یک مشبکه است.

تعریف ۳.۱.۲ : مشبکه L را کامل می نامیم، هرگاه برای هر زیر مجموعه دلخواه A از L داشته باشیم:

$$\bigvee_{a\in A} a \in L \quad \text{و} \quad \bigwedge_{a\in A} a \in L$$

مثال ۴.۱.۲ : مشبکه‌های $[0,1]$ و $P(X)$ کامل هستند.

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم $L = (L, \leq, \wedge, \vee)$ یک مشبکه توزیعی کامل است که کوچکترین و بزرگترین عناصر را که به ترتیب 0, 1 می‌گوییم دارد.

تعریف ۵.۱.۲ : فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی باشد. یک زیرمجموعه L-فازی از X نگاشتی مانند $\mu : X \to L$ است و نیز مجموعه همه زیرمجموعه‌های L-فازی از X را با $F(X)$ نشان می دهیم.

برای $\mu, \nu \in F(X)$ ، فرض کنید $\mu \subseteq \nu$. اگر به ازای همه $x \in X$، $\mu(x) \leq \nu(x)$، به آسانی می‌توان دید که $F(X) = (F(X), \subseteq, \wedge, \vee)$ یک مشبکه توزیعی کامل است که کوچکترین و بزرگترین عناصر را که به ترتیب 0 و 1 می‌گوییم دارد. یعنی برای همه $x \in X$ داریم: $0 = 0(x)$ و $1 = 1(x)$.

گزاره ۶.۱.۲ : ([۲۴]) فرض کنید f نگاشتی از یک مجموعه مانند X به یک مجموعه مانند Y باشد و $\mu \in F(X)$، سپس برای همه $t \in L$ و $t \neq 0$ داریم:

$$(f(\mu))_t = \bigcap_{0<s<t} f(\mu_{t-s}).$$

تعریف ۷.۱.۲ : برای هر دو مجموعه X و Y فرض کنید $\mu \in F(X)$ و همچنین فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. به ازای هر $y \in Y$، $\nu \in F(Y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nu(y) = \begin{cases} \sup_{x\in f^{-1}(y)} \mu(x) & f^{-1}(y) \neq \phi \ \text{اگر}, \\ 0 & \text{سایر جاها}. \end{cases}$$

و می‌گوئیم ν تصویر μ تحت f است و به صورت $f(\mu)$ نشان می دهیم.

برعکس، برای $\nu \in F(f(x))$ و به ازای همه $x \in X$، $\mu \in F(X)$ را به صورت $\mu(x) = \nu(f(x))$ تعریف کرده و می‌گوییم μ هم تصویر ν تحت f است و به صورت $f^{-1}(\nu)$ نشان می دهیم.

تعریف ۸.۱.۲ : یک زیرمجموعه L–فازی مانند μ از یک نیم‌حلقه سه‌تایی S را یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L–فازی از S می نامیم اگر به ازای همه $x, y, z \in S$ داشته باشیم:

(الف) $\mu(x+y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$،

(ب) $\mu(xyz) \geq \min\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\}$.

تعریف ۹.۱.۲ : یک زیر نیم‌حلقه سه‌تایی L–فازی مانند μ از یک نیم‌حلقه سه‌تایی S را یک ایده‌آل چپ [به ترتیب: راست، افقی] L–فازی از S می نامیم، اگر برای همه $x, y, z \in S$ رابطه زیر برقرار باشد:

$\mu(xyz) \geq \mu(z)$ [به ترتیب: $\mu(xyz) \geq \mu(x)$، $\mu(xyz) \geq \mu(y)$].

اگر μ یک ایده‌آل چپ، راست و افقی L–فازی از S باشد، سپس μ یک ایده‌آل L–فازی از S نامیده می‌شود.

فرض کنید S یک نیم‌حلقه سه‌تایی و $\mu \in F(S)$ باشد. آنگاه زیرمجموعه t–تراز از μ را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\mu_t = \{x \in S \mid \mu(x) \geq t\}.$$

گزاره ۱۰.۱.۲ به ازای همه $s \in L$ به‌طوری‌که $s < t$ داریم:

(الف) به ازای $s, t \in L$، اگر $s < t$، آنگاه $\mu_t \subseteq \mu_s$ و

(ب) به ازای $t \in L$، $\mu(x) = t$ اگر و تنها اگر $x \in \mu_t$ و $x \notin \mu_s$.

قضیه ۱۱.۱.۲ : فرض کنید S یک نیم‌حلقه سه‌تایی و $\mu \in F(S)$ باشد، سپس احکام زیر برقرارند:

(الف) μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L–فازی از S است اگر و تنها اگر برای هر $t \in L$ به‌طوری‌که $\mu_t \neq \phi$، μ_t

یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از S باشد.

(ب) μ یک ایده‌آل چپ [به ترتیب. راست، افقی] L-فازی از S است اگر و تنها اگر برای هر $t \in L$ به‌طوری‌که $\mu_t \neq \phi$، μ_t یک ایده‌آل چپ [به ترتیب. راست، افقی] از S باشد.

(ج) μ یک ایده‌آل L-فازی از S است اگر و تنها اگر برای هر $t \in L$ به‌طوری‌که $\mu_t \neq \phi$، μ_t یک ایده‌آل از S باشد.

اثبات: (الف) فرض کنید μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L-فازی از S باشد و $t \in L$ به‌طوری‌که $\mu_t \neq \phi$.

فرض کنید $x, y, z \in \mu_t$، آنگاه داریم:

$$\mu(x), \mu(y), \mu(z) \geq t.$$

سپس

$$\mu(x+y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$$

و

$$\mu(xyz) \geq \min\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\} \geq t.$$

بنابراین $xyz \in \mu_t$ و μ_t یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از S می باشد.

برعکس؛ فرض کنید $x, y, z \in S$ و $t = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

سپس $\mu(x), \mu(y) \geq t$. بنابراین $x, y \in \mu_t$.

طبق فرض $x + y \in \mu_t$، در نتیجه

$$\mu(x+y) \geq t = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

حال فرض کنید $s = \min\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\}$. سپس $\mu(x), \mu(y), \mu(z) \geq s$. بنابراین $x, y, z \in \mu_s$.

طبق فرض $xyz \in \mu_s$، لذا

$$\mu(xyz) \geq s = \min\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\}.$$

درنتیجه μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L-فازی از S می‌باشد.

(ب) فرض کنید μ یک ایده‌آل چپ L- فازی از S باشد و $t \in L$ به‌طوری‌که $\mu_t \neq \phi$.

فرض کنید $x, y \in \mu_t$، سپس $\mu(x), \mu(y) \geq t$ و لذا $\mu(x+y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq t$.

حال فرض کنید $x, y \in S$ و $z \in \mu_t$. داریم $\mu(xyz) \geq \mu(z) \geq t$. بنابراین $xyz \in \mu_t$ که نتیجه می دهد μ_t

یک ایده‌آل چپ از S است.

برعکس؛ فرض کنید $x,y,z \in S$ و $t = \min\{\mu(x),\mu(y)\}$. سپس $\mu(x),\mu(y) \geq t$. بنابراین $x,y \in \mu_t$.

طبق فرض، $x+y \in \mu_t$. بنابراین $\mu(x+y) \geq t = \min\{\mu(x),\mu(y)\}$. سپس فرض کنید $s=\mu(z)$، آنگاه داریم $\mu(z) \geq s$ و بنابراین $z \in \mu_s$.

طبق فرض، $xyz \in \mu_s$. بنابراین $\mu(xyz) \geq s = \mu(z)$. در نتیجه μ یک ایده‌آل چپ L-فازی از S است.

اثبات حالهای دیگر نیز مشابه این اثبات می‌باشد.

(ج) به آسانی از اثبات (ب) نتیجه می شود. □

قضیه ۱۲.۱.۲ : فرض کنید R یک نیم‌حلقه سه‌تایی باشد، سپس احکام زیر صحیح می‌باشند:

(الف) اگر A یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از R باشد، آنگاه یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L-فازی μ از R وجود دارد به‌طوری‌که برای برخی $t \in L$ داریم، $\mu_t = A$.

(ب) اگر A یک ایده‌آل چپ [به ترتیب. راست، افقی] از R باشد، آنگاه یک ایده‌آل چپ [به ترتیب. راست، افقی] L-فازی μ از R وجود دارد به‌طوری‌که برای برخی $t \in L$ داریم، $\mu_t = A$.

(ج) اگر A یک ایده‌آل از R باشد، سپس ایده‌آل L-فازی μ از R وجود دارد به‌طوری‌که برای برخی $t \in L$ داریم، $\mu_t = A$.

اثبات: (الف) فرض کنید $t \in L$ و مجموعه L-فازی از R را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mu(x) = \begin{cases} t & x \in A \text{ اگر}, \\ \circ & \text{سایر جاها}. \end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد $\mu_t = A$.

برای $s \in L$ داریم:

$$\mu_s = \begin{cases} R & s = \circ \text{ اگر}, \\ A & \circ < s \leq t \text{ اگر}, \\ \phi & \text{سایر جاها}. \end{cases}$$

چون A و R زیرنیم‌حلقه‌های سه‌تایی از R هستند نتیجه می گیریم که هر زیرمجموعه تراز غیرتهی μ_s از μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از R است. با توجه به قضیه ۱۱.۱.۲ (ب)، μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L-فازی از

R می‌باشد.

اثبات قسمتهای (ب) و (ج) نیز مشابه اثبات (الف) می‌باشد. □

قضیه ۱۳.۱.۲ : فرض کنید S یک نیم‌حلقه سه‌تایی با صفر و $S_\mu = \{x \in S \mid \mu(x) \geq \mu(\circ)\}$ باشد، آنگاه احکام زیر برقرار می‌باشند:

(الف) اگر μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L–فازی از S باشد، آنگاه S_μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از S است.

(ب) اگر μ یک ایده‌آل چپ [به ترتیب. راست، افقی] L–فازی از S باشد، سپس S_μ یک ایده‌آل چپ [به ترتیب. راست، افقی] از S است.

(ج) اگر μ یک ایده‌آل L–فازی از S باشد، سپس S_μ یک ایده‌آل از S است.

اثبات: (الف) فرض کنید μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L–فازی از S باشد و $x, y, z \in S_\mu$. بنابراین $\mu(x), \mu(y), \mu(z) \geq \mu(\circ)$. سپس

$$\mu(x+y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \geq \mu(\circ)$$

و

$$.\mu(xyz) \geq \min\{\mu(x), \mu(y), \mu(z)\} \geq \mu(\circ)$$

بنابراین $xyz \in S_\mu$ و $x+y$ و در نتیجه S_μ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از S می‌باشد.

(ب) اثبات آن مشابه اثبات (الف) می‌باشد.

(ج) نتایج از قسمت (ب). □

فرض کنید S یک نیم‌حلقه سه‌تایی باشد. اگر $\mu \in F(S)$ یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی L–فازی از S باشد، $\mu_t (\neq \phi)$ را یک زیرنیم‌حلقه سه‌تایی از μ می نامیم .

ایده‌آل‌های چپ [به ترتیب. ایده‌آل‌های راست، ایده‌آل‌های افقی، ایده‌آل ها] تراز از μ نیز به صورت مشابه تعریف می‌شوند.

لم ۱۴.۱.۲ : فرض کنید S یک نیم‌حلقه سه‌تایی و $\mu \in F(S)$ باشد. اگر μ یک زیرمجموعه L–فازی از