بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۶۹۰

دانشگاه ارومیه

ساختارجداسازی های متقاطع در متروید‌ها

حافظ خزائی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر قدرت الله آزادی

دانشگاه ارومیه

زمستان ۱۳۸۸

پایان نامه آقای/~~خانم~~ حافظ خزایی به تاریخ ۱۷ / ۱۱ / ۱۳۸۸

شماره ۲-۱۰۲۹ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸/۲ هجده ۲/م

قرار گرفت .

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر قدرت اله آزادی

۲- استاد مشاور : دکتر —

۳- داور خارجی : دکتر حبیب ازانیر

۴- داور داخلی : دکتر محسن قاسمی

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر هوشیار محمدی

تقدیر و تشکر

حمد وسپاس خداوند یگانه را که پرتو الطاف بی شمار او همواره در لحظه لحظه زندگی ام شامل حال من بوده و هست و هر چه دارم از اوست. ستایش و ثنا می کنم خداوند یگانه را که فکر و اندیشه را در بستر روح و روانم جاری ساخت و توفیق داد تا از خوان گسترده علم و دانش بهره اندکی ببرم.

با لطف و عنایات خداوند منان این پایان نامه را تدوین نمودم و در طول تدوین آن تجربیات استاد ارجمندم جناب آقای دکتر آزادی روشنگر راه من بود که جا دارد کمال تشکر و قدردانی را از محضر ایشان داشته باشم.

همچنین از محضر استاد محترم جناب آقای دکتر اذانچیلر و دیگر اساتید محترم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از زحمات همسر مهربانم که مرا در تدوین این پایان نامه یاری نمود و همواره مشوق و راهنمای من در طول تحصیل بوده کمال تشکر و قدردانی را به عمل می آورم.

تقدیم :

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی.

به پاس عاطفه سرشار از گرمای امید بخش وجودشان که در این سرد ترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید.

و به پاس محبت های بی دریغشان که هیچگاه فروکش نخواهد کرد.

این مجموعه را به پدر ، **مادر و همسرم** که حامی و پشتیبانم بوده اند تقدیم می کنم.

فهرست مندرجات

چکیده

برای ماتروید ۳− همبند M، آکسلی [۱]، سمپل [۲] و وایتل [۳]، یک تجزیه درختی از آن را که نمایش دهنده همه ۳− جداسازی های غیر بدیهی ماتروید M می باشد، ارائه کرده اند. مطالعه ۳− جداسازی های متقاطع، باعث شناسایی ساختار مهمی در ماتروید ها به نام گل ها شد. در این پایان‌نامه بدون هیچ فرضی در مورد همبندی ماتروید M، ساختار گل ها را تعمیم داده و ساختار حاصل را k − گل می نامیم. به علاوه دسته بندی کاملی از k − گل ها را بر حسب همبندی موضعی بین جفت گلبرگ های آنها ارائه می کنیم.

این پایان نامه بر اساس مقاله

Jeremy Aikin , James Oxley , The structure of crossing separations in matroids ,

Advances in Applied Mathematics 41(2008) 10 - 26

تنظیم شده است.

---

[۱] J.oxley

[۲] semple

[۳] Whittle

مقدمه

فصل (۱) را با ارائه مفاهیم مقد ماتی از نظریه گراف و متروید آغاز می کنیم. در این فصل، به ویژه همبندی و همبندی موضعی مترویدها را بررسی می کنیم و در اواخر فصل چند لم را که ویژگیهای مفیدی از توابع همبندی و همبندی موضعی به ما می دهد و در اثبات نتیجه اصلی به آنها نیاز داریم را اثبات می کنیم.

در فصل (۲) گل را تعریف کرده، مشخصات و انواع گل ها را بررسی می کنیم و نیز همبندی موضعی گلبرگ ها را مطالعه می کنیم.

در فصل (۳) ضمن تعریف $k-$ گل، همبندی موضعی بین مجموعه گلبرگ های $k-$ گلها را بررسی می کنیم.

و در فصل (۴) ثابت می کنیم هر $k-$ گل یا یک $k-$ شقایق است و یا یک $k-$ مرواريد است و همچنین برای برخی $n \geq ۵$ و $k \geq ۱$، اگر $(P_۱, P_۲, ..., P_n)$ یک $k-$ گل Φ در یک چند مترويد باشد، آنگاه اعداد صحیح نا منفی c و d با شرط

$$k-۱ \geq c \geq d \geq max\{۲c-(k-۱), ۰\}$$

طوری وجود دارند که همبند ی موضعی بین گلبرگ های مجزا ، اگر گلبرگ ها متوالی باشند،

برابر $c = \sqcap(P_1, P_2)$ و در غیر این صورت برابر $d = \sqcap(P_1, P_3)$ است و سپس ثابت می کنیم Φ تعریف شده در بالا یک k — شقایق است اگر و فقط اگر $c = d$ باشد و نیز ثابت می کنیم همبند ی موضعی بین هر دو مجموعه از گلبرگ های دارای مجموعه اند یس های مجزای I و J بر حسب k, d, c, J, I بیان می شوند. و این تحت جایگشت $(1, 2, ..., n)$ ثا بت است.

و در فصل (۵) به این می پردازیم که اگر (P_1, P_2, P_3, P_4) یک k — گل Φ در یک چند ماترويد باشد. آنگاه اعداد صحیح c ، d_1 و d_2 با شرط

$$k - 1 \geq c \geq d_1 \geq d_2 \geq max\{2c - (k - 1), 0\}$$

طوری وجود دارند که همبند ی موضعی بین گلبرگ های مجزای متوالی برابر c است و $\{\sqcap(P_1, P_3), \sqcap(P_2, P_4)\} = \{d_1, d_2\}$. به علاوه برای هر ۳ تایی (c, d_1, d_2) که $c \geq d_1 \geq d_2 \geq 0$ و هر k در $\{2c + 1 - d_2, 2c + 1 - d_2 + 1, ...2c + 1\}$ یک k — گل با ۴ گلبرگ در یک ماترويد با شرایط گفته شده وجود دارد.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به برخی از مفاهیم مقدماتی که در فصلهای بعدی به آن نیاز خواهد شد، می پردازیم.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ یک گراف [۱]، سه‌تایی [۲] است متشکل از یک مجموعه‌ی متناهی و غیرخالی $V(G)$ و یک مجموعه ی $E(G)$ به همراه رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می کند. اعضای $V(G)$ را رأس‌های گراف، و اعضای $E(G)$ را یال های گراف می نامند.

---

[۱] graph
[۲] triple

اگر $e = uv$ یک یال ازگراف G باشد، آنگاه u و v را **نقاط انتهایی**[۱] آن یال می نامیم.

علاوه بر این u و v را دو رأس **مجاور**[۲] نیز می نامیم.

اگر نقاط انتهایی یالی بر هم منطبق باشند، آنگاه آن یال را یک **طوقه**[۳] گویند.

اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آنگاه آن دو یال رایال **های موازی**[۴] می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ : گراف فاقد طوقه ویال های موازی را **گراف ساده**[۵] می نامند .

تعریف ۳.۱.۱ : یک **گشت**[۶] در گراف G دنباله ای از رأس ها و یال های G به صورت $v_\circ e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$ است که در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند.

تعریف ۴.۱.۱ : اگر هیچ یالی در گشت تکرار نشده باشد، آنگاه به آن گشت **گذر**[۷] می گوییم .

تعریف ۵.۱.۱ : یک **مسیر**[۸] گذری است که در آن هیچ رأسی تکرار نشده باشد.

تعریف ۶.۱.۱ : اگر در مسیر $v_\circ e_1 v_1 e_2 \ldots e_n v_n$ رابطه ی $v_n = v_\circ$ برقرار باشد، آنگاه آن مسیر را **دور**[۹] گویند.

---

[۱] end points

[۲] adjacent

[۳] loop

[۴] parallel edges

[۵] simple graph

[۶] walk

[۷] trail

[۸] path

[۹] circuite

تعریف ۷.۱.۱ : گراف همبند[۱]، گرافی است که برای هر دو رأس دلخواه آن مانند u و v یک $u-v$ مسیر موجود باشد .

تعریف ۸.۱.۱ : هر زیر گراف همبند ماکسیمال گراف G را یک مؤلفه[۲] گراف G می گوییم.

تعریف ۹.۱.۱ : یک برش رأسی[۳] گراف G، مجموعه ای از رأس ها است که با حذفِ آنها، تعداد مؤلفه های گراف G افزایش می یابد .

تعریف ۱۰.۱.۱ : گراف G، $k-$ همبند است هرگاه هر برش رأسی G دارای حداقل k رأس باشد. همبندی گراف G با $k(G)$ نمایش داده می شود. $k(G)$ کمترین تعداد اعضای یک برش رأسی است.

[۱] connected
[۲] component
[۳] vertex cut

۲.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه متروید

تعریف ۱.۲.۱ : متروید[1] M زوج مرتب $M=(E,\mathcal{I})$ است که در آن E مجموعه‌ای متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق می‌کنند:

(I_1) $\phi \in \mathcal{I}$.

(I_2) اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، آنگاه $I' \in \mathcal{I}$.

(I_3) اگر $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ و $|I_1| < |I_2|$، آنگاه عضوی مثل $e \in I_2 - I_1$ وجود دارد که $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M=(E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد، آنگاه M را یک متروید روی E و E را**مجموعه ی زمینه ی**[2] آن گویند.

هر عضو $\mathcal{I}$ یک **مجموعه‌ی مستقل**[3] M نامیده می‌شود.

زیرمجموعه‌هایی از E را که در $\mathcal{I}$ نیستند **مجموعه‌های وابسته**[4]ی M گویند.

تعریف ۲.۲.۱ : یک زیر مجموعه وابسته ی مینیمال M را یک دور می نامند .

گردایه‌ی همه‌ی دورهای M را با $\mathcal{C}(M)$ و یا با $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم.

دوری از M را که شامل n عضو باشد، یک n−دور گویند.

دوری را که شامل سه عضو می باشد، یک **مثلث**[5] می نامیم.

[1] matroid
[2] ground set
[3] independent set
[4] dependent set
[5] triangle

مجموعه‌ی $\mathcal{C}$ از دورهای ماترویید M دارای خواص زیر است:

(C_1) $\phi \notin \mathcal{C}$.

(C_2) اگر $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ و $C_1 \subseteq C_2$، آنگاه $C_1 = C_2$.

(C_3)

لم ۳.۲.۱ اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آنگاه عضوی مثل C_3 از $\mathcal{C}$ وجود دارد به‌طوری که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

برهان: [[۵]، لم ۱.۱.۳]. ■

مثال ۴.۲.۱ فرض کنید E مجموعه ای از بردارها و $\mathcal{I}$ گردایه تمام زیر مجموعه های مستقل خطی E باشد، دراین صورت $M = (E,\mathcal{I})$ یک ماترویید است. این ماترویید را **ماترویید برداری** [۱] گویند.

تعریف ۵.۲.۱ : دو ماترویید M_1 و M_2 را یکریخت گویند و می‌نویسند $M_1 \cong M_2$ هرگاه تناظر یک به یک

$$\psi : E(M_1) \to E(M_2)$$

وجود داشته باشد به طوری که برای هر $X \subseteq E$، $\psi(X)$ مجموعه‌ای مستقل در M_2 است اگر وفقط اگر X در M_1 مستقل باشد.

تعریف ۶.۲.۱ : هرگاه M یکریخت با ماترویید برداری حاصل از ماتریس A روی میدان F باشد، گوییم M **قابل نمایش** [۲] روی میدان F است (یا F — **قابل نمایش** [۳] است). ماتریس A را

[۱] vector matroid
[۲] Representable
[۳] F-Representable

نیز یک نمایش[۱] از M روی میدان F گوییم.

تعریف ۷.۲.۱ : فرض کنید G یک گراف باشد و $E = E(G)$. مجموعه ی $\mathcal{I}$ را گردایه ی مجموعه های یال های تمامی زیر گراف های بی دور G در نظر بگیرید.(یعنی $\mathcal{I}$ شامل زیر مجموعه هایی از E است که زیر گراف تولید شده توسط آنها بی دور می باشد.) در این صورت $(E,\mathcal{I})$ یک ماترويد است. این ماترويد را **ماترويد دوری**[۲] گراف G گویند. این ماترويد را با $M(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۸.۲.۱ : ماترويد M را گرافیک[۳] گویند، هرگاه گرافی وجود داشته باشد که ماترويد دوری تولید شده توسط آن یکریخت با M باشد.

تعریف ۹.۲.۱ : هر عضو e از ماترويد M را یک طوقه گوییم اگر $\{e\}$ یک دور M باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱ : هر مجموعه‌ی مستقل ماکسیمال ماترويد M را یک پایه‌ی[۴] M گویند.

لم ۱۱.۲.۱ : فرض کنید B_1 و B_2 دو پایه از ماترويد M باشند، در این صورت $|B_1| = |B_2|$.

برهان: [[۵]، لم ۱.۲.۱]. ■

لم ۱۲.۲.۱ : فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد، در این صورت $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک ماترويد روی E است اگر و فقط اگر در شرایط زیر صدق کند:

---
[۱] Representation
[۲] cycle matroid
[۳] graphic
[۴] base

(B_1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

(B_2) اگر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 - B_2$، آنگاه عضو $y \in B_2 - B_1$ وجود دارد به‌طوری که $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

برهان: [[۵]، لم ۱.۲.۲]. ■

تعریف ۱۳.۲.۱ : فرض کنیم E یک مجموعه‌ی n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های m عضوی E باشد که در آن $0 \leq m \leq n$، در این صورت $\mathcal{B}$ گردایه ی پایه‌های یک ماترويد روی E است. چنین ماترويدی را با $U_{m,n}$ نمایش داده و آن را ماترويد یکنواخت[۱] گوییم و داریم؛

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E \ : \ |X| \leq m\}$$

ونیز

$$\mathcal{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset & m = n \text{ اگر} \\ \{X \subseteq E : |X| = m+1\} & m < n \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف ۱۴.۲.۱ : فرض کنید $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماترويد و $X \subseteq E$ باشد. فرض کنیم X_0 زیر مجموعه مستقل ماکزیمال X باشد، تعریف می کنیم $r(X) = |X_0|$، $r(X)$ را رتبه[۲]ی X در ماترويد M گوییم. بدیهی است که $r(M) = r(E) = |B|$ که در آن B یک پایه ی M است.

---
[۱] uniform
[۲] rank

تعریف ۱۵.۲.۱ : فرض کنید $E(M)$ مجموعه زمینه ی ماترویید M باشد. تابع $r : 2^E \to \mathbb{N} \cup \{0\}$، تابع رتبه ی یک ماترویید روی E است اگر وفقط اگر r در شرایط زیر صدق کند:

(R_1) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $0 \leq r(X) \leq |X|$.

(R_2) اگر $X \subseteq Y$، آنگاه $r(X) \leq r(Y)$.

(R_3) **لم ۱۶.۲.۱** اگر $X, Y \subseteq E$، آنگاه $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

برهان: [[۵]، لم ۱.۳.۱]. ■

خاصیت (R_3) را خاصیت زیر مدولاری نامند.

لم ۱۷.۲.۱ : فرض کنید M یک ماترویید با تابع رتبه ی r و $X \subseteq E(M)$ باشد، در این صورت؛

X مستقل است اگر و فقط اگر $r(X) = |X|$.

X یک پایه است اگر و فقط اگر $|X| = r(X) = r(M)$،

X یک دور است اگر و فقط اگر غیر خالی باشد وبرای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$r(X - x) = |X| - 1 = r(X)$.

تعریف ۱۸.۲.۱ : فرض کنید M یک ماترویید روی E با تابع رتبه‌ی r باشد. تابع

$$cl : 2^E \to 2^E$$

با ضابطه‌ی
$$cl(X) = \{x \in E \mid r(X \cup x) = r(X)\}$$

را عملگربستار[۱] ماترویید M گویند.

لم ۱۹.۲.۱ : عملگر بستار ماترویید M روی E در خواص زیر صدق می‌کند:

(cl_1) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $X \subseteq cl(X)$.

(cl_2) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آنگاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

(cl_3) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $cl(cl(X)) = cl(X)$.

(cl_4) اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$، آنگاه $x \in cl(X \cup y)$.

برهان: [[۵]، لم ۱.۴.۲]. ■

تعریف ۲۰.۲.۱ : فرض کنید M یک ماترویید باشد. اگر برای زیر مجموعه $X \subseteq E(M)$، داشته باشیم $cl(X) = E(M)$، گوییم X، M را **تولید**[۲] می کند. به همین ترتیب اگر برای $X, Y \subseteq E(M)$، داشته باشیم $cl(X) = Y$، گوییم X، Y را تولید می کند. در این حالت Y را توسیع X در M نیز گویند.

لم ۲۱.۲.۱ : اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$، آنگاه $r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + 1$

برهان: [[۵]، لم ۱.۴.۳]. ■

تعریف ۲۲.۲.۱ : فرض کنیم M یک ماترویید و $X \subseteq E(M)$ باشد. اگر $X = cl(X)$، در این صورت X را یک مجموعه‌ی بسته[۳] یا یک **فلت**[۴] گویند.

[۱] clouser operator
[۲] span
[۳] closed
[۴] flat

تعریف ۲۳.۲.۱ : زیرمجموعه‌ی بسته ی X از $E(M)$ را که $r(X) = r(M) - 1$، یک ابر صفحه[1] ی M می نامیم. زیرمجموعه X از $E(M)$ رایک مجموعه فرا گیر[2] گوییم اگر $E(M) = cl(X)$.

قضیه ۲۴.۲.۱ : فرض کنید M یک ماتروید باشد. فرض کنید

$$\mathcal{B}^*(M) = \{E(M) - B : B \in \mathcal{B}\}$$

در این صورت $\mathcal{B}^*(M)$ گردایه ی پایه های یک ماتروید روی $E(M)$ است.

برهان: [[۵]، قضیه ۲.۱.۱]. ■

تعریف ۲۵.۲.۱ : مترویدی که گردایه ی پایه های آن $\mathcal{B}^*(M)$ است رادوگان[3] ماتروید M گویند و با M^* نمایش می دهیم. پایه ها و دورهای ماتروید M^* را به ترتیب هم‌– پایه[4] ها و هم‌– دور[5] های M گوییم .

گزاره ۲۶.۲.۱ : اگر $X \subseteq E(M)$، آنگاه $r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X)$ که در آن r^* تابع رتبه ی ماتروید M^* است.

برهان: [[۵]،گزاره ۲.۱.۹]. ■

---

[1] hyperplane
[2] Spanning set
[3] dual
[4] cobase
[5] cocircuit